



FROM THE LIBRARY
OF
CHARLES SANDERS PEIRCE

(Class of 1859, Harvard College)

LOGICIAN
INVESTIGATOR OF THE HISTORY OF SCIENCE
CONTRIBUTOR TO THE PHILOSOPHY OF EVOLUTION

THE GIFT OF
MRS. CHARLES S. PEIRCE
THROUGH THE
HARVARD COLLEGE LIBRARY

BOSTON COLLEGE
PHYSICS DEPT./

2 vol

~~79~~---

①A803

• N4



PHILOSOPHIÆ NATURALIS

PRINCIPIA

MATHEMATICA.

AUCTORE

ISAACO NEWTONO, EQ. AUR.

PERPETUIS COMMENTARIIS ILLUSTRATA,

COMMUNI STUDIO

PP. THOMÆ LE SEUR ET FRANCÍSCI JACQUIER,

EX GALRICANA MINIMORUM FAMILIA, MATH. PROFF.

EDITIO NOVA, SUMMA CURA RECENSITA.

VOL. I.

BOSTON COLLEGE
PHYSICS DEPT.

GLASGUÆ:

EXCUDIT GEORGIUS BROOKMAN;

IMPENSIS T. T. ET J. TEGG, LONDINI;

ET R. GRIFFIN ET SOC., GLASGUÆ.

MDCCCXXXII.

260131

QA

803

N4

21

V.1

LECTORI

S.

TYPOGRAPHUS.



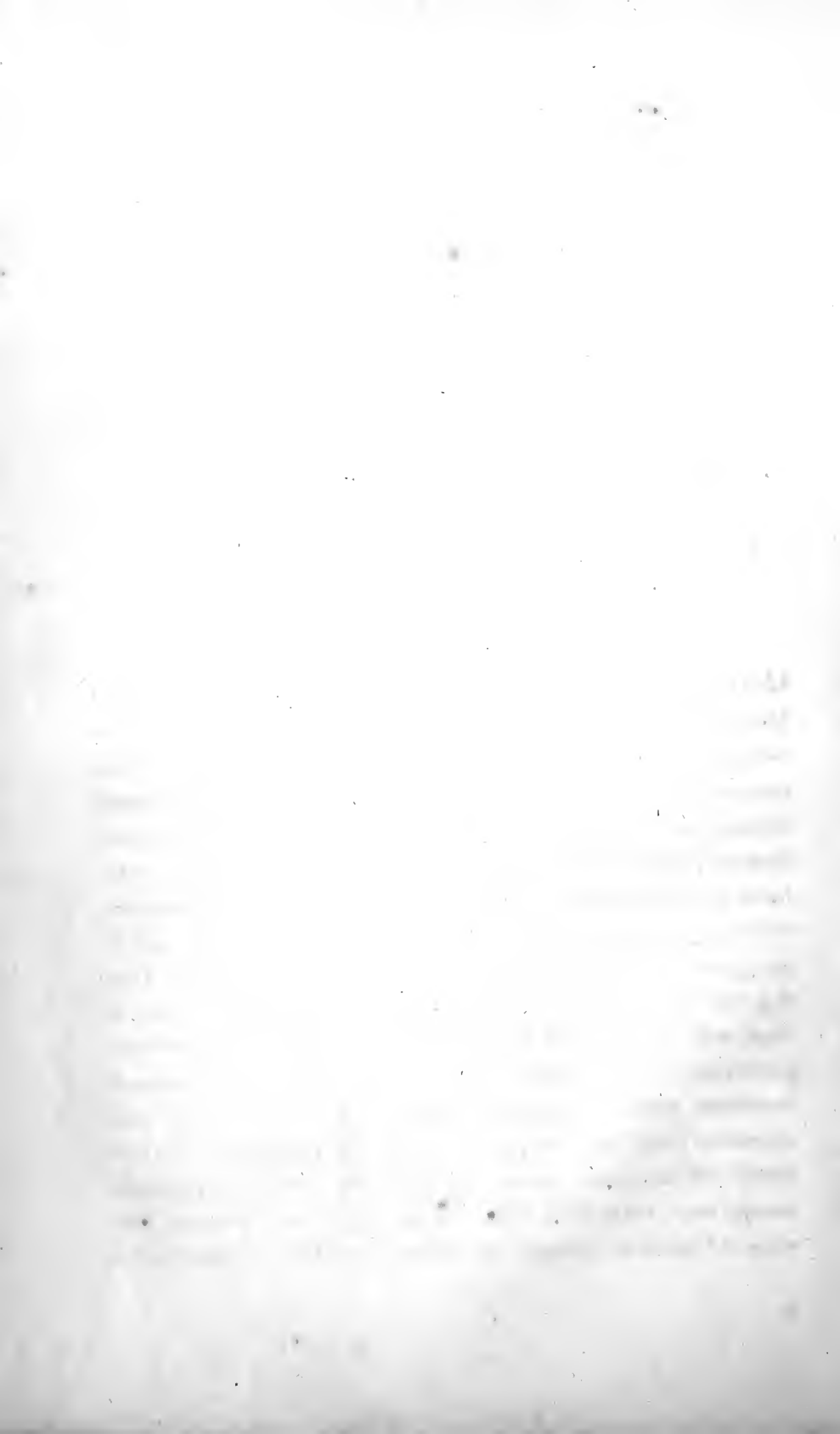
NEWTONI illustrissimi opus hoc in primis laudandum, cujus exemplaria sunt rarissima, et impenso pretio parantur, nunc formâ commodiore tibi in manum tradimus. Quid in hac editione exspectandum, paucis te monitum velimus.

Erat nobis in animo illam LE SEUR et JACQUIER, Societatis Iesu Sociorum, cum eorum commentario perpetuo, in omnibus integram edere, nisi revera ubi macula forsân hic illic furtim irrepsisset. Quidquid penes nos fuit, præstitimus. Editiones Genevæ an. 1739-42 et Coloniae Allobrogum 1760 evulgatas, inter sese fideliter collatas, curaverimus, ut discrepantiæ in lucem eductæ omnes perlustrarentur, quâ errores haud paucos foras extrusimus. Denique ut nihil deesset, quîn librum singulis consummatum faceremus, studio permissus erat viri matheseos plane periti Joannis M. Wright, Academiae Cantabrigiensis alumni, qui, schedis omnibus diligentius perlectis, maculas quidem cumulatim (teste ipsius autographo) quæ in editionibus prioribus latuissent, ejecit. Quâ de causâ nobis spes maxima editionem nostram præ omnibus eligendam, tum cæteris multo emendatorem, tum arte typographicâ longè adornatorem. At si non in omni parte sit perfecta, in memoriam revoca, Lector benevole, quam difficile est, fortasse ultra hominis sortem, hujusmodi studiorum statum optimum, quantumvis exoptatum, attingere aut accedere.

Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
Boston Library Consortium Member Libraries

ILLUSTRISSIMÆ
SOCIETATI REGALI
A
SERENISSIMO REGE
CAROLO II.
AD PHILOSOPHIAM PROMOVENDAM
FUNDATÆ,
ET
AUSPICIIIS
SERENISSIMI REGIS
GEORGII
FLORENTI,
TRACTATUM HUNC
D. D. D.

IS. NEWTON.



R E R U M
MATHEMATICARUM
STUDIOSIS,
PHILOSOPHIÆ NEWTONIANÆ
INTERPRETES.



QUAM recondita sint simul et utilia Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica, norunt ii omnes qui vel ipsum clarissimi Authoris nomen audierunt. Tanta est rerum dignitas atque sublimitas, tanta sermonis plusquàm geometrica brevis, ut præstantissimum illud opus paucissimis duntaxat geometris factum videatur. Eas ob causas viris matheseos cultiorisque physices studiosis gratissimam fore putavimus, eo modo comparatam interpretationem, ut omnes tam utilis philosophiæ propositiones, corollaria omnia atquè scholia inoffenso pede possint decurrere, qui vel ipsis geometriæ et vulgaris algebrae elementis probè imbuti sunt. Quod ut præstaremus, mechanices et calculi infinitorum principia, quantum instituti nostri ratio postulat, Newtoni vestigiis insistentes demonstravimus; perbreve, sed theorematum fœcunditate plenum, nostris commentariis inseruimus tractatum sectionum conicarum; quæ vel minimùm, nimîa obscuritate lectori negotium parere possent, ea omnia exponere et in bono lumine collocare conati sumus; quæ in scholiis, corollariis, propositionumque serie, prætermisâ demonstratione, pronuntiat Newtonus, præmissis vel interjectis lemmatis scrupulosè demonstrata invenient, qui in

sola doctissimi authoris verba jurare nolunt; eximia quæ in Newtoni propositionibus latent inventa, deteximus atque evolvimus; tandem cum præstantissima illa summi viri principia non solum intelligere, sed et illam quam sibi aperuit ad inventionem viam explorare plurimum delectationis habeat et utilitatis, dispersa huc et illuc generalia quædam problemata lector reperiet. Hæc sunt quæ facere voluimus, quo exitu, penes benevolum lectorem esto iudicium. Ex brevi illo commentariorum nostrorum prospectu satis patet quos nobis lectores postulemus; nec præstantissimis mathematicis nec imperito philosophorum vulgo nos scribere profitemur; ad hujusce operis lectionem eos duntaxat admittimus qui ea quæ jam diximus elementa in promptu habent, et tali insuper polent mentis acie, ut longioris demonstrationis vim atque seriem studiosè persequi et animo comprehendere possint.

De nostris commentariis hæc satis dicta sint. Verum naturalis æquitas et mathematicus candor postulant, ut nos plurimum debere fateamur doctissimis viris, Davidi Gregorio, Varignonio, Jacobo Hermanno, Joanni Keillio, aliisque multis, qui varias Newtonianæ Philosophiæ partes luculentis scriptis illustrarunt. Eadem æquitatis atque ingenuitatis lege a nobis religiosè factum est, ut eos omnes quorum spoliis aliquandò ditescimus, in commentariorum nostrorum decursu honoris causâ nominemus. Publicum quoque grati animi testimonium deesse nolumus clariss. D^{no}. J. L. Calandrino in Academiâ Genevensi Professori in rebus mathematicis versatissimo, qui hanc nostram Newtoni Principiorum editionem adornari curavit ad normam elegantissimæ illius editionis, quæ additionibus multis locupletata Londini prodiit anno 1726. Deindè id sibi laboris assumpsit vir doctissimus non solum ut schemata incidi, suis locis disponi, typographica menda corrigi sedulò invigilaret, sed etiam ea quæ jam laudavimus sectionum conicarum elementa composuit, et quæ a nobis non satis perspicuè videbantur exposita propriis notis aliquandò illustravit.

Hoc nostro labore fruantur rerum mathematicarum cultores.

ILLUSTRISSIMÆ
SOCIETATI REGALI
A
SERENISSIMO REGE
CAROLO II.
AD PHILOSOPHIAM PROMOVENDAM
FUNDATÆ,
ET
AUSPICIIIS
SERENISSIMI REGIS
GEORGII II.
FLORENTI,
COMMENTARIUM PERPETUUM IN HUNC
CELEBERR. IS. NEWTONI TRACTATUM
D. D. D.
THOMAS LE SEUR ET FRANCISCUS JACQUIER.

AUCTORIS PRÆFATIO

AD

LECTOREM.



CUM veteres Mechanicam (uti auctor est Pappus) in rerum naturalium investigatione maximi fecerint; et recentiores, missis formis substantialibus et qualitatibus occultis, phænomena naturæ ad leges mathematicas revocare aggressi sint: visum est in hoc tractatu mathesim excolere, quatenus ea ad philosophiam spectat. Mechanicam verò duplicem veteres constituerunt: rationalem, quæ per demonstrationes accuratè procedit, et practicam. Ad practicam spectant artes omnes manuales, a quibus utique mechanica nomen mutuata est. Cum autem artifices parùm accuratè operari soleant, fit ut mechanica omnis a geometriâ ita distinguatur, ut quicquid accuratum sit ad geometriam referatur, quicquid minùs accuratum ad mechanicam. Attamen errores non sunt artis, sed artificum. Qui minùs accuratè operatur, imperfectior est mechanicus, et si quis accuratissimè operari posset, hic foret mechanicus omnium perfectissimus. Nam et linearum rectarum et circulorum descriptiones, in quibus geometria fundatur, ad mechanicam pertinent. Has lineas describere geometria non docet, sed postulat. Postulat enim ut tyro easdem accuratè describere prius didicerit, quam limen attingat geometriæ; dein quomodo per has operationes problemata solvantur, docet; rectas et circulos describere problemata sunt, sed non geometrica. Ex mechanica postulatur horum solutio, in geometria docetur solutorum usus. Ac gloriatur geometria quod tam paucis principiis aliunde petitis tam multa præstet. Fundatur igitur geometria in praxi mechanica, et nihil aliud est quam mechanicæ universalis pars illa, quæ artem mensurandi accuratè proponit ac demonstrat. Cum autem artes manuales in corporibus movendis præcipuè versentur, fit ut geometria ad magnitudinem, mechanica ad motum vulgo

referatur. Quo sensu mechanica rationalis erit scientia motuum, qui ex viribus quibuscunque resultant, et virium quæ ad motus quoscunque requiruntur, accuratè proposita ac demonstrata. Pars hæc mechanicæ a veteribus in potentiis quinque ad artes manuales spectantibus exculta fuit, qui gravitatem (cum potentia manualis non sit) vix aliter quam in ponderibus per potentias illas movendis considerarunt. Nos autem non artibus sed philosophiæ consulentes, deque potentiis non manualibus sed naturalibus scribentes, ea maximè tractamus, quæ ad gravitatem, levitatem, vim elasticam, resistantiam fluidorum et ejusmodi vires seu attractivas seu impulsivas spectant: et eâ propter, hæc nostra tanquam philosophiæ principia mathematica proponimus. Omnis enim philosophiæ difficultas in eo versari videtur, ut a phænomenis motuum investigemus vires naturæ, deinde ab his viribus demonstremus phænomena reliqua. Et huc spectant propositiones generales, quas libro primo et secundo pertractavimus. In libro autem tertio exemplum hujus rei proposuimus per explicationem systematis mundani. Ibi enim, ex phænomenis cœlestibus, per propositiones in libris prioribus mathematicè demonstratas, derivantur vires gravitatis, quibus corpora ad solem et planetas singulos tendunt. Deinde ex his viribus per propositiones etiam mathematicas, deducuntur motus planetarum, cometarum, lunæ et maris. Utinam cætera naturæ phænomena ex principiis mechanicis eodem argumentandi genere derivare liceret. Nam multa me movent, ut nonnihil suspicer ea omnia ex viribus quibusdam pendere posse, quibus corporum particulæ per causas nondum cognitæ vel in se mutuò impelluntur et secundum figuras regulares cohærent, vel ab invicem fugantur et recedunt: quibus viribus ignotis, philosophi hactenus naturam frustrâ tentarunt. Spero autem quod vel huic philosophandi modo, vel veriori alicui, principia hîc posita lucem aliquam præbeant.

In his edendis, vir acutissimus et in omni literarum genere eruditissimus Edmundus Halleius operam navavit, nec solum typothetarum sphalmata correxit et schemata incidi curavit, sed etiam auctor fuit, ut horum editionem aggrededer. Quippe cum demonstratam a me figuram orbium cœlestium impetraverat, rogare non destitit, ut eandem cum Societate Regali communicarem, quæ deinde hortatibus et benignis suis auspiciis effecit, ut de eâdem in lucem emittendâ cogitare inciperem. At postquam motuum lunarium inæqualitates aggressus essem, deinde etiam alia tentare cœpissem, quæ ad leges et mensuras gravitatis et aliarum virium, et figuras a corporibus secundum datas quascunque leges attractis descri-

bendas, ad motus corporum plurium inter se, ad motus corporum in mediis resistantibus, ad vires, densitates et motus mediorum, ad orbes cometarum et similia spectant, editionem in aliud tempus differendam esse putavi, ut cætera rimarer et unâ in publicum darem. Quæ ad motus lunares spectant (imperfecta cum sint) in Corollariis Propositionis LXVI. simul complexus sum, ne singula methodo prolixiore quam pro rei dignitate proponere, et sigillatim demonstrare tenerer, et seriem reliquarum propositionum interrumpere. Nonnulla serò inventa locis minùs idoneis inserere malui, quam numerum propositionum et citationes mutare. Ut omnia candidè legantur et defectus in materiâ tam difficili non tam reprehendatur, quam novis lectorum conatibus investigentur, et benignè suppleantur, enixè rogo.

*Dabam Cantabrigiæ, e Collegio S. Trinitatis,
Maii 8. 1686.*

IS. NEWTON.

AUCTORIS PRÆFATIO

IN

EDITIONEM SECUNDAM.

IN hâc secundâ Principiorum editione multa sparsim emendantur, et nonnulla adjiciuntur. In Libri Primi Sectione II. inventio virium, quibus corpora in orbibus datis revolvî possint, faciliior redditur et amplior. In Libri Secundi Sectione VII. theoria resistantiæ fluidorum accuratiùs investigatur, et novis experimentis confirmatur. In Libro Tertio theoria lunæ et præcessio æquinociorum ex principiis suis pleniùs deducuntur, et theoria cometarum pluribus et accuratiùs computatis orbium exemplis confirmatur.

Dabam Londini, Mar. 28. 1713.

IS. NEWTON.

EDITORIS PRÆFATIO

LS

EDITIONEM SECUNDAM.



NEWTONIANÆ Philosophiæ novam tibi, lector benevole, diuque desideratam editionem, plurimum nunc emendatam atque auctiorem exhibemus. Quæ potissimum contineantur in hoc opere celeberrimo, intelligere potes ex indicibus adjectis: quæ vel addantur vel immutentur, ipsa te ferè docebit auctoris præfatio. Reliquum est, ut adjiciantur nonnulla de methodo hujus philosophiæ.

Qui physicam tractandam susceperunt, ad tres ferè classes revocari possunt. Extiterunt enim, qui singulis rerum speciebus qualitates specificas et occultas tribuerint; ex quibus deinde corporum singulorum operationes, ignotâ quâdam ratione, pendere voluerunt. In hoc posita est summa doctrinæ scholasticæ, ab Aristotele et Peripateticis derivatæ: Affirmant utique singulos effectus ex corporum singularibus naturis oriri; at unde sint illæ naturæ non docent; nihil itaque docent. Cumque toti sint in rerum nominibus, non in ipsis rebus; sermonem quandam philosophicum censendi sunt adinvenisse, philosophiam tradidisse non sunt censendi.

Alii ergo melioris diligentiae laudem consequi sperarunt rejecta vocabulorum inutili farragine. Statuerunt itaque materiam universam homogeneam esse, omnem verò formarum varietatem, quæ in corporibus cernitur, ex particularum componentium simplicissimis quibusdam et intellectu facillimis affectionibus oriri. Et rectè quidem progressio instituitur a simplicioribus ad magis composita, si particularum primariis illis affectionibus non alios tribuunt modos, quam quos ipsa tribuit natura. Verùm ubi licentiam sibi assumunt, ponendi quascunque libet ignotas partium figuras et magnitudines, incertosque situs et motus; quin et fingendi fluida quædam occulta, quæ corporum poros liberrimè permeent, omni-

potente prædita subtilitate, motibusque occultis agitata; jam ad somnia delabuntur, neglectâ rerum constitutione verâ: quæ sanè frustra petenda est ex fallacibus conjecturis, cùm vix etiam per certissimas observationes investigari possit. Qui speculationum suarum fundamentum desumunt ab hypothesibus; etiamsi deinde secundum leges mechanicas accuratissimè procedant; fabulam quidem elegantem fortè et venustam, fabulam tamen concinnare dicendi sunt.

Relinquitur adeo tertium genus, qui philosophiam scilicet experimentalem profitentur. Hi quidem ex simplicissimis quibus possunt principiis rerum omnium causas derivandas esse volunt: nihil autem principii loco assumunt, quod nondum ex phænomenis comprobatum fuerit. Hypotheses non comminiscuntur, neque in physicam recipiunt, nisi ut quæstiones de quarum veritate disputetur. Duplici itaque methodo incedunt, analyticâ et syntheticâ. Naturæ vires legesque virium simpliciores ex selectis quibusdam phænomenis per analysin deducunt, ex quibus deinde per synthesin reliquorum constitutionem tradunt. Hæc illa est philosophandi ratio longè optima, quam præ cæteris meritò amplectendam censuit celeberrimus auctor noster. Hanc solam utique dignam judicavit, in quâ excolendâ atque adornandâ operam suam collocaret. Hujus igitur illustrissimum dedit exemplum, mundani nempe systematis explicationem e theoriâ gravitatis felicissimè deductam. Gravitatis virtutem universis corporibus inesse, suspicati sunt vel finxerunt alii: primus ille et solus ex apparentiis demonstrare potuit, et speculationibus egregiis firmissimum ponere fundamentum.

Scio equidem nonnullos magni etiam nominis viros, præjudiciis quibusdam plus æquo occupatos, huic novo principio ægrè assentiri potuisse, et certis incerta identidem prætulisse. Horum famam vellicare non est animus: tibi potius, benevole lector, illa paucis exponere lubet, ex quibus tute ipse judicium non iniquum feras.

Igitur ut argumenti sumatur exordium a simplicissimis et proximis; dispiciamus paulisper qualis sit in terrestribus natura gravitatis, ut deinde tutiùs progrediamur ubi ad corpora cœlestia, longissimè a sedibus nostris remota, perventum fuerit. Convenit jam inter omnes philosophos, corpora universa circumterrestria gravitare in terram. Nulla dari corpora verè levia, jamdudum confirmavit experientia multiplex. Quæ dicitur levitas relativa, non est vera levitas, sed apparens solummodo; et oritur a præpollente gravitate corporum contiguorum.

Porro, ut corpora universa gravitent in terram, ita terra vicissim in

corpora æqualiter gravitat; gravitatis enim actionem esse mutuam et utrinque æqualem, sic ostenditur. Distinguatur terræ totius moles in binas quascunque partes, vel æquales vel utcunque inæquales: jam si pondera partium non essent in se mutuò æqualia; cederet pondus minus majori, et partes conjunctæ pergerent rectâ moveri ad infinitum, versus plagam in quam tendit pondus majus: omninò contra experientiam. Itaque dicendum erit, pondera partium in æquilibrio esse constituta: hoc est, gravitatis actionem esse mutuam et utrinque æqualem.

Pondera corporum, æqualiter a centro terræ distantium, sunt ut quantitates materiæ in corporibus. Hoc utique colligitur ex æquali acceleratione corporum omnium, e quiete per ponderum vires cadentium: nam vires quibus inæqualia corpora æqualiter accelerantur, debent esse proportionales quantitibus materiæ movendæ. Jam verò corpora universa cadentia æqualiter accelerari, ex eo patet, quod in vacuo Boyliano temporibus æqualibus æqualia spatia cadendo describunt, sublatâ scilicet aëris resistentiâ: accuratiùs autem comprobatur per experimenta pendulorum.

Vires attractivæ corporum, in æqualibus distantiiis, sunt ut quantitates materiæ in corporibus. Nam cùm corpora in terram et terra vicissim in corpora momentis æqualibus gravitent; terræ pondus in unumquodque corpus, seu vis quâ corpus terram attrahit, æquabitur ponderi corporis ejusdem in terram. Hoc autem pondus erit ut quantitas materiæ in corpore: itaque vis quâ corpus unumquodque terram attrahit, sive corporis vis absoluta, erit ut eadem quantitas materiæ.

Oritur ergo et componitur vis attractiva corporum integrorum ex viribus attractivis partium: siquidem auctâ vel diminutâ mole materiæ, ostensum est, proportionaliter augeri vel diminui ejus virtutem. Actio itaque telluris ex conjunctis partium actionibus conflari censenda erit; atque adeò corpora omnia terrestria se mutuò trahere oportet viribus absolutis, quæ sint in ratione materiæ trahentis. Hæc est natura gravitatis apud terram: videamus jam qualis sit in cœlis.

Corpus omne perseverare in statu suo vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare; naturæ lex est ab omnibus recepta philosophis. Inde verò sequitur, corpora quæ in curvis moventur, atque adeò de lineis rectis orbitas suas tangentibus jugiter abeunt, vi aliquâ perpetuò agente retineri in itinere curvilineo. Planetis igitur in orbibus curvis revolvantibus necessariò aderit vis aliqua, per cujus actiones repetitas indesinenter a tangentibus deflectantur.

Jam illud concedi æquum est, quod mathematicis rationibus colligitur et certissimè demonstratur; corpora nempe omnia, quæ moventur in lineâ aliquâ curvâ in plano descriptâ, quæque radio ducto ad punctum vel quiescens vel utcumque motum describunt areas circa punctum illud temporibus proportionales, urgeri a viribus quæ ad idem punctum tendent. Cùm igitur in confesso sit apud astronomos, planetas primarios circum solem, secundarios verò circum suos primarios, areas describere temporibus proportionales; consequens est ut vis illa, quâ perpetuò detorquentur a tangentibus rectilineis et in orbitis curvilineis revolvi coguntur, versus corpora dirigatur quæ sita sunt in orbitalium centris. Hæc itaque vis non ineptè vocari potest, respectu quidem corporis revolventis, centripeta; respectu autem corporis centralis, attractiva; a quâcumque demùm causâ oriri fingatur.

Quin et hæc quoque concedenda sunt, et mathematicè demonstrantur: Si corpora plura motu æquabili revolvantur in circulis concentricis, et quadratura temporum periodicorum sint ut cubi distantiarum a centro communi; vires centripetas revolventium fore reciproçè ut quadrata distantiarum. Vel, si corpora revolvantur in orbitis quæ sunt circulis finitimæ, et quiescant orbitalium apsides; vires centripetas revolventium fore reciproçè ut quadrata distantiarum. Obtinere casum alterutrum in planetis universis consentiunt astronomi. Itaque vires centripetæ planetarum omnium sunt reciproçè ut quadrata distantiarum ab orbium centris. Si quis objiciat planetarum, et lunæ præsertim, apsides non penitus quiescere; sed motu quodam lento ferri in consequentia: responderi potest, etiamsi concedamus hunc motum tardissimum exinde profectum esse quod vis centripetæ proportio aberret aliquantùm a duplicata; aberrationem illam per computum mathematicum inveniri posse et planè insensibilem esse. Ipsa enim ratio vis centripetæ lunaris, quæ omnium maximè turbari debet, paululum quidem duplicatam superabit; ad hanc vero sexaginta ferè vicibus propiùs accedet quàm ad triplicatam. Sed varior erit responsio, si dicamus hanc apsidum progressionem, non ex aberratione a duplicatâ proportionem, sed ex aliâ prorsus diversâ causâ oriri, quemadmodum egregiè commonstratur in hac philosophia. Restat ergo ut vires centripetæ, quibus planetæ primarii tendunt versùs solem et secundarii versùs primarios suos, sint accuratè ut quadrata distantiarum reciproçè.

Ex iis quæ hactenus dicta sunt, constat planetas in orbitis suis retineri per vim aliquam in ipsos perpetuò agentem: constat vim illam dirigi semper versùs orbitalium centra: constat hujus efficaciam augeri in acces-

su ad centrum, diminui in recessu ab eodem : et augeri quidem in eadem proportionem qua diminuitur quadratum distantiae, diminui in eadem proportionem quâ distantiae quadratum augetur. Videamus jam, comparatione instituta inter planetarum vires centripetas et vim gravitatis, annon ejusdem fortè sint generis. Ejusdem verò generis erunt, si deprehendantur hinc et inde leges eadem, eademque affectiones. Primò itaque lunæ, quæ nobis proxima est, vim centripetam expendamus.

Spatia rectilinea, quæ a corporibus e quiete demissis dato tempore sub ipso motus initio describuntur, ubi a viribus quibuscunque urgentur, proportionalia sunt ipsis viribus : hoc utique consequitur ex ratiociniis mathematicis. Erit igitur vis centripeta lunæ in orbitâ suâ revolvantis, ad vim gravitatis in superficie terræ, ut spatium quod tempore quàm minimo describeret luna descendendo per vim centripetam versùs terram, si circulari omni motu privari fingeretur ad spatium quod eodem tempore quàm minimo describit grave corpus in vicinia terræ, per vim gravitatis suæ cadendo. Horum spatiorum prius æquale est arcûs a luna per idem tempus descripti sinui verso, quippe qui lunæ translationem de tangente, factam a vi centripeta, metitur; atque adeò computari potest ex datis tum lunæ tempore periodico, tum distantia ejus a centro terræ. Spatium posterius invenitur per experimenta pendulorum, quemadmodum docuit Hugenius. Inito itaque calculo, spatium prius ad spatium posterius, seu vis centripeta lunæ in orbita sua revolvantis ad vim gravitatis in superficie terræ, erit ut quadratum semidiametri terræ ad orbitæ semidiametri quadratum. Eandem habet rationem, per ea quæ superiùs ostenduntur, vis centripeta lunæ in orbita sua revolvantis ad vim lunæ centripetam propè terræ superficiem. Vis itaque centripeta propè terræ superficiem æqualis est vi gravitatis. Non ergo diversæ sunt vires, sed una atque eadem, si enim diversæ essent, corpora viribus conjunctis duplò celerius in terram caderent quàm ex vi solâ gravitatis. Constat igitur vim illam centripetam, quâ luna perpetuò de tangente vel trahitur vel impellitur et in orbita retinetur, ipsam esse vim gravitatis terrestris ad lunam usque pertingentem. Et rationi quidem consentaneum est ut ad ingentes distantias illa sese virtus extendat, cum nullam ejus sensibilem imminutionem, vel in altissimis montium cacuminibus, observare licet. Gravitat itaque luna in terram : quin et actione mutua, terra vicissim in lunam æqualiter gravitat; id quod abundè quidem confirmatur in hac philosophiâ, ubi agitur de maris aestu et æquinociorum præcessionem, ab actione tum lunæ tum solis in terram oriundus. Hinc et illud

tandem edocemur, quâ nimirum lege vis gravitatis decrescat in majoribus a tellure distantis. Nam cum gravitas non diversa sit a vi centripeta lunari, hæc verò sit reciproce proportionalis quadrato distantie; diminuetur et gravitas in eadem ratione.

Progrediamur jam ad planetas reliquos. Quoniam revolutiones primariorum circa solem et secundariorum circa jovem et saturnum sunt phaenomena generis ejusdem ac revolutio lunæ circa terram, quoniam porro demonstratum est vires centripetas primariorum dirigi versus centrum solis, secundariorum versus centra jovis et saturni, quemadmodum lunæ vis centripeta versus terræ centrum dirigitur; adhæc, quoniam omnes illæ vires sunt reciproce ut quadrata distantiarum a centrīs, quemadmodum vis lunæ est ut quadratum distantie a terra: concludendum erit eandem esse naturam universis. Itaque ut luna gravitat in terram, et terra vicissim in lunam; sic etiam gravitabunt omnes secundarii in primarios suos, et primarii vicissim in secundarios; sic et omnes primarii in solem, et sol vicissim in primarios.

Igitur sol in planetas universos gravitat et universi in solem. Nam secundarii dum primarios suos comitantur, revolvuntur interea circum solem unâ cum primariis. Eodem itaque argumento, utriusque generis planetæ gravitant in solem, et sol in ipsos. Secundarios verò planetas in solem gravitare abundè insuper constat ex inæqualitatibus lunaribus; quarum accuratissimam theoriam, admiranda sagacitate patefactam, in tertio hujus operis libro expositam habemus.

Solis virtutem attractivam quoquoersum propagari ad ingentes usque distantias, et sese diffundere ad singulas circumjecti spatii partes, aperitissimè colligi potest ex motu cometarum; qui ab immensis intervallis profecti feruntur in viciniam solis, et nonnunquam adeò ad ipsum proximè accedunt ut globum ejus, in periheliis suis versantes, tantum non contingere videantur. Horum theoriam ab astronomis antehac frustrà quæsitam, nostro tandem sæculo faciliter inventam et per observationes certissimè demonstratam, præstantissimo nostro auctori debemus. Patet igitur cometas in sectionibus conicis umbilicos in centro solis habentibus moveri, et radiis ad solem ductis areas temporibus proportionales describere. Ex hisce verò phaenomenis manifestum est et mathematicè comprobatur, vires illas, quibus cometæ retinentur in orbitis suis, respicere solem et esse reciproce ut quadrata distantiarum ab ipsius centro. Gravitant itaque cometæ in solem: atque adeò solis vis attractiva non tantum ad corpora planetarum in datis distantis et in eodem ferè plano collocata,

sed etiam ad cometas in diversissimis cœlorum regionibus et in diversissimis distantis positos pertingit. Hæc igitur est natura corporum gravitantium, ut vires suas edant ad omnes distantias in omnia corpora gravitantia. Inde verò sequitur, planetas et cometas universos se mutuò trahere, et in se mutuò graves esse: quod etiam confirmatur ex perturbatione jovis et saturni, astronomis non incognita, et ab actionibus horum planetarum in se invicem oriunda; quin et ex motu illo lentissimo apsidum, qui suprâ memoratus est, quique a causâ consimili proficiscitur.

Eo demùm pervenimus ut dicendum sit, et terram et solem et corpora omnia cœlestia, quæ solem comitantur, se mutuò attrahere. Singulorum ergo particulæ, quæque minimæ, vires suas attractivas habebunt, pro quantitate materiæ pollentes; quemadmodum suprâ de terrestribus ostensum est. In diversis autem distantis, erunt et harum vires in duplicata ratione distantiarum reciprocè: nam ex particulis hac lege trahentibus componi debere globos eadem lege trahentes, mathematicè demonstratur.

Conclusiones præcedentes huic innituntur axiomati, quod a nullis non recipitur philosophis; effectuum scilicet ejusdem generis, quorum nempe quæ cognoscuntur proprietates eadem sunt, easdem esse causas et easdem esse proprietates quæ nondùm cognoscuntur. Quis enim dubitat, si gravitas sit causa descensûs lapidis in Europa, quin eadem sit causa descensus in America? Si gravitas mutua fuerit inter lapidem et terram in Europa; quis negabit mutuam esse in America? Si vis attractiva lapidis et terræ componatur, in Europa, ex viribus attractivis partium; quis negabit similem esse compositionem in America? Si attractio terræ ad omnia corporum genera et ad omnes distantias propagetur in Europa; quidni pariter propagari dicamus in America? In hac regula fundatur omnis philosophia: quippe quâ sublatâ nihil affirmare possimus de universis. Constitutio rerum singularum innotescit per observationes et experimenta: inde verò non nisi per hanc regulam de rerum universarum naturâ judicamus.

Jam cùm gravia sint omnia corpora, quæ apud terram vel in cœlis reperiuntur, de quibus experimenta vel observationes instituere licet; omnino dicendum erit, gravitatem corporibus universis competere. Et quemadmodum nulla concipi debent corpora, quæ non sint extensa, mobilia et impenetrabilia; ita nulla concipi debere, quæ non sint gravia. Corporum extensio, mobilitas, et impenetrabilitas non nisi per experimenta, innotescunt; eodem planè modo gravitas innotescit. Corpora omnia de quibus observationes habemus, extensa sunt et mobilia et impenetrabilia:

et inde concludimus corpora universa, etiam illa de quibus observationes non habemus, extensa esse et mobilia et impenetrabilia. Ita corpora omnia sunt gravia, de quibus observationes habemus: et inde concludimus corpora universa, etiam illa de quibus observationes non habemus, gravia esse. Si quis dicat corpora stellarum inerrantium non esse gravia, quandoquidem eorum gravitas nondum est observata; eodem argumento dicere licebit neque extensa esse, nec mobilia, nec impenetrabilia, cum hæ fixarum affectiones nondum sint observatæ. Quid opus est verbis? inter primarias qualitates corporum universorum vel gravitas habebit locum; vel extensio, mobilitas, et impenetrabilitas non habebunt. Et natura rerum vel rectè explicabitur per corporum gravitatem, vel non rectè explicabitur per corporum extensionem, mobilitatem, et impenetrabilitatem.

Audio nonnullos hanc improbare conclusionem, et de occultis qualitatibus nescio quid mussitare. Gravitatem scilicet occultum esse quid, perpetuò arguari solent; occultas verò causas procul esse ablegandas a philosophiâ. His autem facilè respondetur; occultas esse causas, non illas quidem quarum existentia per observationes clarissimè demonstratur, sed has solùm quarum occulta est et ficta existentia nondum verò comprobata. Gravitatis ergo non erit occulta causa motuum cœlestium; siquidem ex phænomenis ostensum est, hanc virtutem reverà existere. Hi potius ad occultas confugiunt causas, qui nescio quos vortices, materiæ cujusdam prorsus fictitiæ et sensibus omninò ignotæ, motibus iisdem regendis præficiunt.

Ideone autem gravitas occulta causa dicetur, eoque nomine rejicietur e philosophiâ, quod causa ipsius gravitatis occulta est et nondum inventa? Qui sic statuunt, videant nequid statuunt absurdi, unde totius tandem philosophiæ fundamenta convellantur. Etenim causæ continuo nexu procedere solent a compositis ad simpliciora: ubi ad causam simplicissimam perveneris, jam non licebit ulteriùs progredi. Causæ igitur simplicissimæ nulla dari potest mechanica explicatio: si daretur enim, causa nondum esset simplicissima. Has tu proinde causas simplicissimas appellabis occultas, et exulare jubebis? Simul verò exulabunt et ab his proximè pendentes et quæ ab illis porrò pendent, usque dum a causis omnibus vacua fuerit et probè purgata philosophia.

Sunt qui gravitatem præter naturam esse dicunt, et miraculum perpetuum vocant. Itaque rejiciendam esse volunt, cum in physicâ præternaturales causæ locum non habeant. Huic ineptæ prorsus objectioni

diluendæ, quæ et ipsa philosophiam subruit universam, vix operæ pretium est immorari. Vel enim gravitatem corporibus omnibus inditam esse negabunt: quod tamen dici non potest: vel eo nomine præter naturam esse affirmabunt, quod ex aliis corporum affectionibus atque ideò ex causis mechanicis originem non habeat. Dantur certè primariæ corporum affectiones; quæ quoniam sunt primariæ, non pendent ab aliis. Viderint igitur annon et hæ omnes sint pariter præter naturam, eoque pariter rejiciendæ: viderint verò qualis sit deinde futura philosophia.

Nonnulli sunt quibus hæc tota physica cœlestis vel ideò minùs placet, quòd cum Cartesii dogmatibus pugnare et vix conciliari posse videatur. His suâ licebit opinione frui; ex æquo autem agant oportet: non ergo denegabunt aliis eandem libertatem quam sibi concedi postulant. Newtonianam itaque philosophiam, quæ nobis verior habetur, retinere et amplecti licebit, et causas sequi per phænomena comprobatas, potiùs quam fictas et nondum comprobatas. Ad veram philosophiam pertinet, rerum naturas ex causis verè existentibus derivare: eas verò leges quærere, quibus voluit summus opifex hunc mundi pulcherrimum ordinem stabilire; non eas quibus potuit, si ita visum fuisset. Rationi enim consonum est, ut a pluribus causis, ab invicem nonnihil diversis, idem possit effectus proficisci: hæc autem vera erit causa, ex qua verè atque actu proficiscitur; reliquæ locum non habent in philosophiâ verâ. In horologiis automatis idem indicis horarii motus vel ab appenso pondere vel ab intus concluso elatere oriri potest. Quod si oblatum horologium reverà sit instructum pondere; ridebitur qui finget elaterem, et ex hypothesi sic præproperè confictâ motum indicis explicare suscipiet: oportuit enim internam machinæ fabricam penitiùs perscrutari, ut ita motûs propositi principium verum exploratum habere posset. Idem vel non absimile feretur iudicium de philosophis illis, qui materiâ quâdam subtilissimâ cœlos esse repletos, hanc autem in vortices indesinenter agi voluerunt. Nam a phænomenis vel accuratissimè satisfacere possent ex hypothsibus suis; veram tamen philosophiam tradidisse, et veras causas motuum cœlestium invenisse nondum dicendi sunt; nisi vel has reverà existere, vel saltem alias non existere demonstraverint. Igitur si ostensum fuerit, universorum corporum attractionem habere verum locum in rerum naturâ; quinetiam ostensum fuerit, quâ ratione motus omnes cœlestes abinde solutionem recipiant; vana fuerit et meritò deridenda objectio, si quis dixerit eosdem motus per vortices explicari debere, etiamsi id fieri posse

vel maximè concesserimus. Non autem concedimus: nequeunt enim illo pacto phænomena per vortices explicari; quod ab auctore nostro abundè quidem et clarissimis rationibus evincitur; ut somnis plùs æquò indulgeant oporteat, qui ineptissimo figmento resarciendo, novisque porrò commentis ornando infelicem operam addicunt.

Si corpora planetarum et cometarum circa solem deferantur a vorticibus; oportet corpora delata et vorticum partes proximè ambientes eadem velocitate eademque cursûs determinatione moveri, et eandem habere densitatem vel eandem vim inertiae pro mole materiae. Constat verò planetas et cometas, dùm versantur in iisdem regionibus cœlorum, velocitatibus variis variâque cursûs determinatione moveri. Necessariò itaque sequitur, ut fluidi cœlestis partes illæ, quæ sunt ad easdem distantias a sole, revolvantur eodem tempore in plagas diversas cum diversis velocitatibus: etenim aliâ opus erit directione et velocitate, ut transire possint planetæ; aliâ, ut transire possint cometæ. Quod cùm explicari nequeat; vel fatendum erit, universa corpora cœlestia non deferri a materia vorticis; vel dicendum erit, eorundem motus repetendos esse non ab uno eodemque vortice, sed a pluribus qui ab invicem diversi sint, idemque spatium soli circumjectum pervadant.

Si plures vortices in eodem spatio contineri, et sese mutuò penetrare motibusque diversis revolvi ponantur; quoniam hi motus debent esse conformes delatorum corporum motibus, qui sunt summè regulares, et peraguntur in sectionibus conicis nunc valdè eccentricis, nunc ad circulo-rum proximè formam accedentibus; jure quærendum erit, qui fieri possit, ut iidem integri conserventur nec ab actionibus materiae occurrentis per tot sæcula quicquam perturbentur. Sanè si motus hi fictitii sunt magis compositi et difficiliùs explicantur, quàm veri illi motus planetarum et cometarum; frustrà mihi videntur in philosophiam recipi: omnis enim causa debet esse effectui suo simplicior. Concessa fabularum licentia, affirmaverit aliquis planetas omnes et cometas circumcingi atmosphæris, ad instar telluris nostræ; quæ quidem hypothesis rationi magis consentanea videbitur quam hypothesis vorticum. Affirmaverit deinde has atmosphæras, ex naturâ suâ, circa solem moveri et sectiones conicas describere; qui sanè motus multò faciliùs concipi potest, quàm consimilis motus vorticum se invicem permeantium. Denique planetas ipsos et cometas circa solem deferri ab atmosphæris suis credendum esse statuatur, et ob repertas motuum cœlestium causas triumphum agat. Quisquis au-

tem hanc fabulam rejiciendam esse putet, idem et alteram fabulam rejiciet : nam ovum non est ovo similius, quàm hypothesis atmosphærarum hypothesis vorticum.

Docuit Galilæus, lapidis projecti et in parabola moti deflectionem a cursu rectilineo oriri a gravitate lapidis in terram, ab occulta scilicet qualitate. Fieri tamen potest ut alius aliquis, nasi acutioris philosophus, causam aliam comminiscatur. Finget igitur ille materiam quandam subtilem, quæ nec visu, nec tactu, neque ullo sensu percipitur, versari in regionibus quæ proximè contingunt telluris superficiem. Hanc autem materiam, in diversas plagas, variis et plerumque contrariis motibus ferri, et lineas parabolicas describere contendet. Deinde vero lapidis deflectionem pulchrè sic expediet, et vulgi plausum merebitur. Lapis, inquit, in fluido illo subtili natat, et cursui ejus obsequendo, non potest non eandem unà semitam describere. Fluidum verò movetur in lineis parabolicis; ergo lapidem in parabola moveri necesse est. Quis nunc non mirabitur acutissimum hujusce philosophi ingenium, ex causis mechanicis, materiâ scilicet et motu, phænomena naturæ ad vulgi etiam captum præclarè deducens? Quis verò non subsannabit bonum illum Galilæum, qui magno molimine mathematico qualitates occultas, e philosophia feliciter exclusas, denuò revocare sustinuerit? Sed pudet nugis diutiùs immorari.

Summa rei huc tandem redit : cometarum ingens est numerus; motus eorum sunt summè regulares, et easdem leges cum planetarum motibus observant. Moventur in orbibus conicis, hi orbes sunt valdè admodum eccentrici. Feruntur undique in omnes cælorum partes, et planetarum regiones liberrimè pertranseunt, et sæpè contrà signorum ordinem incidunt. Hæc phænomena certissimè confirmantur ex observationibus astronomicis : et per vortices nequeunt explicari. Imò, ne quidem cum vorticibus planetarum consistere possunt. Cometarum motibus omninò locus non erit; nisi materia illa fictitia penitus e cælis amoveatur.

Si enim planetæ circum solem a vorticibus devehuntur; vorticum partes, quæ proximè ambiunt unumquemque planetam, ejusdem densitatis erunt ac planeta; uti suprâ dictum est. Itaque materia illa omnis quæ contigua est orbis magni perimetro, parem habebit ac tellus densitatem : quæ verò jacet intrâ orbem magnum atque orbem Saturni, vel parem vel majorem habebit. Nam ut constitutio vorticis permanere possit, debent partes minùs densæ centrum occupare, magis densæ longiùs a centro abire. Cum enim planetarum tempora periodica sint in ratione

sesquuplicata distantiarum a sole, oportet partium vorticis periodos eandem rationem servare. Inde verò sequitur, vires centrifugas harum partium fore reciproce ut quadrata distantiarum. Quæ igitur majore intervallo distant a centro, nituntur ab eodem recedere minore vi: unde si minùs densæ fuerint, necesse est ut cedent vi majori, quâ partes centro propiores ascendere conantur. Ascendent ergo densiores, descendunt minus densæ, et locorum fiet invicem permutatio; donec ita fuerit disposita atque ordinata materia fluida totius vorticis, ut conquiescere jam possit in æquilibrio constituta. Si bina fluida, quorum diversa est densitas, in eodem vase continentur; utique futurum est ut fluidum, cujus major est densitas, majore vi gravitatis infimum petat locum: et ratione non absimili omninò dicendum est, densiores vorticis partes majore vi centrifugâ petere supremum locum. Tota igitur illa et multò maxima pars vorticis, quæ jacet extrâ telluris orbem, densitatem habebit atque adeò vim inertiae pro mole materiae, quæ non minor erit quàm densitas et vis inertiae telluris: inde verò cometis trajectis orietur ingens resistentia, et valde admodum sensibilis; ne dicam, quæ motum eorundem penitus sistere atque absorbere posse meritò videatur. Constat autem ex motu cometarum prorsùs regulari, nullam ipsos resistentiam pati quæ vel minimùm sentiri potest; atque adeò neutiquam in materiam ullam incur-sare, cujus aliqua sit vis resistendi, vel proinde cujus aliqua sit densitas seu vis inertiae. Nam resistentia mediorum oritur vel ab inertia materiae fluidæ, vel a defectu lubricitatis. Quæ oritur a defectu lubricitatis, admodum exigua est; et sanè vix observari potest in fluidis vulgò notis, nisi valdè tenacia fuerint ad instar olei et mellis. Resistentia quæ sentitur in aëre, aqua, hydrargyro, et hujusmodi fluidis non tenacibus ferè tota est prioris generis; et minui non potest per ulteriorem quemcunque gradum subtilitatis, manente fluidi densitate vel vi inertiae, cui semper proportionalis est hæc resistentia; quemadmodum clarissimè demonstratum est ab auctore nostro in peregrina resistentiarum theoriâ, quæ paulò nunc accuratiùs exponitur, hac secundâ vice, et per experimenta corporum cadentium plenius confirmatur.

Corpora progrediendo motum suum fluido ambienti paulatim communicant, et communicando amittunt, amittendo autem retardantur. Est itaque retardatio motui communicato proportionalis; motus vero communicatus, ubi datur corporis progredientis velocitas, est ut fluidi densitas; ergo retardatio seu resistentia erit ut eadem fluidi densitas; neque ullo pacto tolli potest, nisi a fluido ad partes corporis posticas recurrente re-

stituatur motus amissus. Hoc autem dici non poterit, nisi impressio fluidi in corpus ad partes posticas æqualis fuerit impressioni corporis in fluidum ad partes anticæ, hoc est, nisi velocitas relativa quâ fluidum irruit in corpus a tergo, æqualis fuerit velocitati quâ corpus irruit in fluidum, id est, nisi velocitas absoluta fluidi recurrentis duplo major fuerit quam velocitas absoluta fluidi propulsi; quod fieri nequit. Nullo igitur modo tolli potest fluidorum resistantia, quæ oritur ab eorundem densitate et vi inertię. Itaque concludendum erit; fluidi cœlestis nullam esse vim inertię, cùm nulla sit vis resistendi: nullam esse vim quâ motus communicetur, cùm nulla sit vis inertię: nullam esse vim quâ mutatio quælibet vel corporibus singulis vel pluribus inducatur, cùm nulla sit vis quâ motus communicetur; nullam esse omninò efficaciam, cum nulla sit facultas mutationem quamlibet inducendi. Quidni ergo hanc hypothesin, quæ fundamento planè destituitur, quæque naturæ rerum explicandæ ne minimùm quidem inservit, ineptissimam vocare liceat et philosopho prorsùs indignam. Qui cœlos materiâ fluidâ repletos esse volunt, hanc verò non inertem esse statuunt; hi verbis tollunt vacuum, re ponunt. Nam cum huiusmodi materia fluida ratione nullâ secerni possit ab inani spatium; disputatio tota fit de rerum nominibus, non de naturis. Quod si aliqui sint adeò usque dediti materiæ, ut spatium a corporibus vacuum nullo pacto admittendum credere velint; videamus quo tandem oporteat illo pervenire.

Vel enim dicent hanc, quam confingunt, mundi per omnia pleni constitutionem ex voluntate Dei profectam esse, propter eum finem, ut operationibus naturæ subsidium præsens haberi posset ab æthere subtilissimo cuncta permeante et implente; quod tamen dici non potest, siquidem jam ostensum est ex cometarum phænomenis, nullam esse hujus ætheris efficaciam: vel dicent ex voluntate Dei profectam esse, propter finem aliquem ignotum; quod neque dici debet, siquidem diversa mundi constitutio eodem argumento pariter stabiliri posset: vel denique non dicent ex voluntate Dei profectam esse, sed ex necessitate quâdam naturæ. Tandem igitur delabi oportet in fæces sordidas gregis impurissimi. Hi sunt qui somniant fato universa regi, non providentia; materiam ex necessitate suâ semper et ubique extitisse, infinitam esse et æternam. Quibus positis; erit etiam undiquaque uniformis: nam varietas formarum cum necessitate omninò pugnat. Erit etiam immota: nam si necessariò moveatur in plagam aliquam determinatam; cum determinata aliqua velocitate; pari necessitate movebitur in plagam diversam cum diversa velocitate, in plagas autem diversas, cum diversis velocitatibus, moveri non potest; oportet

igitur immotam esse. Neutiquam profectò potuit oriri mundus, pulcherrima formarum et motuum varietate distinctus, nisi ex liberrimâ voluntate cuncta providentis et gubernantis Dei.

Ex hoc igitur fonte promanarunt illæ omnes quæ dicuntur naturæ leges: in quibus multa sanè sapientissimi consilii, nulla necessitatis apparent vestigia. Has proinde non ab incertis conjecturis petere, sed observando atque experiendo addiscere debemus. Qui veræ physicæ principia legesque rerum, sola mentis vi et interno rationis lumine fretum, invenire se posse confidit; hunc oportet vel statuere mundum ex necessitate fuisse, legesque propositas ex eadem necessitate sequi; vel si per voluntatem Dei constitutus sit ordo naturæ, se tamen, homuncionem misellum, quid optimum factu sit perspectum habere. Sana omnis et vera philosophia fundatur in phænomenis rerum: quæ si nos vel invitos et reluctantes ad huiusmodi principia deducunt, in quibus clarissimè cernuntur consilium optimum et dominium summum sapientissimi et potentissimi entis; non erunt hæc ideò non admittenda principia, quod quibusdam forsân hominibus minus grata sunt futura. His vel miracula vel qualitates occultæ dicantur, quæ displicent: verum nomina malitiosè indita non sunt ipsis rebus vitio vertenda; nisi illud fateri tandem velint, utique debere philosophiam in atheismo fundari. Horum hominum gratiâ non erit labefactanda philosophia, siquidem rerum ordo non vult immutari.

Obtinebit igitur apud probos et æquos iudices præstantissima philosophandi ratio, quæ fundatur in experimentis et observationibus. Huic verò, dici vix poterit, quanta lux accedat, quanta dignitas, ab hoc opere præclaro illustrissimi nostri auctoris; cujus eximiam ingenii felicitatem, difficillima quæque problemata enodantis, et ad ea porrò pertinentis ad quæ nec spes erat humanam mentem assurgere potuisse, meritò admirantur et suspiciunt quicumque paulò profundius in hisce rebus versati sunt. Claustris ergò reseratis, aditum nobis aperuit ad pulcherrima rerum mysteria. Systematis mundani compagem elegantissimam ita tandem patefecit et penitiùs perspectandam dedit; ut nec ipse, si nunc revivisceret, rex Alphonsus vel simplicitatem vel harmoniæ gratiam in ea desideraret. Itaque naturæ majestatem propiùs jam licet intueri, et dulcissima contemplatione frui, conditorem verò ac dominum universorum impensiùs colere et venerari, qui fructus est philosophiæ multò uberrimus. Cæcum esse oportet, qui ex optimis et sapientissimis rerum structuris non statim videat Fabricatoris omnipotentis infinitam sapientiam et bonitatem: insanum, qui profiteri nolit.

Extabit igitur eximium Newtoni Opus adversus atheorum impetus mun-
 titissimum præsidium: neque enim alicundè felicius, quàm ex hac pharetra,
 contra impiam catervam tela deprompseris. Hoc sensit pridem, et in pere-
 ruditis concionibus Anglicè Latinèque editis, primus egregiè demonstra-
 vit vir in omni literarum genere præclarus idemque bonarum artium fau-
 tor eximius Richardus Bentleius, seculi sui et Academiae nostræ magnum
 ornamentum, Collegii nostri S. Trinitatis magister dignissimus et integer-
 rimus. Huic ego me pluribus nominibus obstrictum fateri debeo: huic et
 tuas quæ debentur gratias, lector benevole, non denegabis. Is enim, cum
 a longo tempore celeberrimi auctoris amicitia intimâ frueretur, (qua etiam
 apud posteros censi non minoris aestimat, quàm propriis scriptis quæ li-
 terato orbi in deliciis sunt inclarescere) amici simul famæ et scientiarum
 incremento consuluit. Itaque cum exemplaria prioris editionis rarissima
 admodum et immani pretio cœmenda superessent; suasit ille crebris ef-
 flagitationibus, et tantum non objurgando perpulit denique virum præ-
 stantissimum, nec modestiâ minùs quàm eruditione summâ insignem, ut
 novam hanc operis editionem, per omnia elimatam denuò et egregiis insu-
 per accessionibus ditatam, suis sumptibus et auspiciis prodire pateretur:
 mihi verò, pro jure suo, pensum non ingratum demandavit, ut quam pos-
 set emendatè id fieri curarem.

Cantabrigiæ, Maii 12. 1713.

ROGERUS COTES,

*Collegii S. Trinitatis Socius, Astronomiæ et Philosophiæ
 Experimentalis Professor Plumianus.*

AUCTORIS PRÆFATIO

IN

EDITIONEM TERTIAM.

IN editione hacce tertiâ, quam Henricus Pemberton, M. D. vir harum rerum peritissimus curavit, nonnulla in Libro secundo de resistentia mediorum paulò fusiùs explicantur quàm antea, et adduntur experimenta nova de resistentia gravium quæ cadunt in aëre. In Libro tertio argumentum quo Lunam in orbe suo per gravitatem retineri probatur, paulò fusiùs exponitur: et novæ adduntur observationes de proportionem diametrorum Jovis ad invicem a D. Poundio factæ. Adduntur etiam observationes aliquot cometæ illius qui anno 1680. apparuit, a D. Kirk mense Novembri in Germania habitæ, quæ nuper ad manus nostras venerunt, et quarum ope constet quàm propè orbes parabolici motibus cometarum respondent. Et orbita cometæ illius, computante Halleio, paulò accuratiùs determinatur quàm antea, idque in ellipsi. Et ostenditur cometam in hac orbita elliptica, per novem cœlorum signa, non minùs accuratè cursum peregissee, quàm solent planetæ in orbitis ellipticis per astronomiam definitis moveri. Orbis etiam cometæ qui anno 1723. apparuit, a D. Bradleio Astronomiæ apud Oxonienses Professore computatus adjicitur.

Dabam Londini, Jan. 12. 1725-6.

IS. NEWTON.

IN
VIRI PRÆSTANTISSIMI
ISAACI NEWTONI
OPUS HOCCE MATHEMATICO-PHYSICUM,
SECVLI GENTISQVE NOSTRÆ
DECUS EGREGIUM.

EN tibi norma poli, et divæ libramina molis,
Computus en Jovis; et quas, dum primordia rerum
Pangeret, omniparens leges violare Creator
Noluit, atque operum quæ fundamenta locârît.
Intima panduntur victi penetralia cœli,
Nec latet extremos quæ vis circumrotat orbes.
Sol solio residens ad se jubet omnia pronò
Tendere descensu, nec recto tramite currus
Sidereos patitur vastum per inane moveri;
Sed rapit immotis, se centro, singula gyris.
Jam patet horrificis quæ sit via flexa cometis,
Jam non miramur barbati phænomena astri.
Discimus hinc tandem quâ causâ argentea Phœbe
Passibus haud æquis graditur; cur subdita nulli
Hactenus astronomo numerorum fræna recuset:
Cur remeant nodi, curque auges progrediuntur.
Discimus et quantis refluum vaga Cynthia pontum
Viribus impellit, fessis dum fluctibus ulvam
Deserit, ac nautis suspectas nudat arenas;
Alternis vicibus suprema ad littora pulsans.

Quæ toties animos veterum torsere sophorum,
 Quæque scholas frustra rauco certamine vexant,
 Obvia conspicimus, nubem pellente mathesi.
 Jam dubios nullâ caligine prægravat error,
 Queis superûm penetrare domos atque ardua cœli
 Scandere sublimis genii concessit acumen.

Surgite, mortales, terrenas mittite curas;
 Atque hinc cœligenæ vires dignoscite mentis,
 A pecudum vitâ longè latèque remotæ.
 Qui scriptis jussit tabulis compescere cædes,
 Furta et adulteria, et perjuræ crimina fraudis;
 Quive vagis populis circundare mœnibus urbes
 Auctor erat; Cererisve beavit munere gentes;
 Vel qui curarum lenimen pressit ab uvâ;
 Vel qui Niliacâ monstravit arundine pictos
 Consociare sonos, oculisque exponere voces;
 Humanam sortem minus extulit: utpote pauca
 Respiciens miseræ tantum solamina vitæ.
 Jam vero superis convivæ admittimur, alti
 Jura poli tractare licet, jamque abdita cæcæ
 Clastra patent Terræ, rerumque immobilis ordo,
 Et quæ præteriti latuerunt secula mundi.

Talia monstrantem mecum celebrate camœnis,
 Vos O cœlicolum gaudentes nectare vesci,
 Newtonum clausi reserantem scrinia veri,
 Newtonum Musis charum, cui pectore puro
 Phœbus adest, totoque incessit numine mentem:
 Nec fas est propius mortali attingere divos.

EDM. HALLEY.

INDEX CAPITUM

VOLUMINIS PRIMI.

<i>Definitiones</i>	Pag. 1
<i>Axiomata, sive Leges Motus</i>	15
DE MOTU CORPORUM LIBER PRIMUS.	
SECT. I. <i>De methodo rationum primarum et ultimarum</i>	45
SECT. II. <i>De inventione virium centripetarum</i>	65
SECT. III. <i>De motu corporum in conicis sectionibus excentricis</i>	118
SECT. IV. <i>De inventione orbium ellipticorum, parabolicorum et hyperbolicorum ex umbilico dato</i>	135
SECT. V. <i>De inventione orbium ubi umbilicus neuter datur</i>	146
SECT. VI. <i>De inventione motuum in orbibus datis</i>	201
SECT. VII. <i>De corporum ascensu et descensu rectilineo</i>	226
SECT. VIII. <i>De inventione orbium in quibus corpora viribus quibuscunque centripetis agitata revolvuntur</i>	241
SECT. IX. <i>De motu corporum in orbibus mobilibus, deque motu apsidum</i>	258
SECT. X. <i>De motu corporum in superficiebus datis, deque suspensionum motu reciproco</i>	278
SECT. XI. <i>De motu corporum viribus centripetis se mutuo petentium</i>	311
SECT. XII. <i>De corporum sphaericorum viribus attractivis</i>	357
SECT. XIII. <i>De corporum non sphaericorum viribus attractivis</i>	388
SECT. XIV. <i>De motu corporum minimorum, quæ viribus centripetis ad singulas magni alicujus corporis partes tendentibus agitantur</i>	412

INDEX SECTIONUM

DE MOTU CORPORUM.

SECT. I.	<i>De motu corporum quibus resistitur in ratione velocitatis...</i>	425
SECT. II.	<i>De motu corporum quibus resistitur in duplicatâ ratione velocitatis.....</i>	461
SECT. III.	<i>De motu corporum quibus resistitur partim in ratione velocitatis, partim in ejusdem ratione duplicatâ.....</i>	518
SECT. IV.	<i>De corporum circulari motu in mediis resistantibus.....</i>	534
SECT. V.	<i>De densitate et compressione fluidorum, deque hydrostaticâ.....</i>	552
SECT. VI.	<i>De motu et resistantiâ corporum funependulorum.....</i>	571
SECT. VII.	<i>De motu fluidorum et resistantiâ projectilium.....</i>	615
SECT. VIII.	<i>De motu per fluida propagato.....</i>	680
SECT. IX.	<i>De motu circulari fluidorum.....</i>	722

ADMONITIO.

IN initio singularum notarum quibus numerus præfixus non fuit, ejus loco asteriscus * depictus est: a pagina verò 525 alter asteriscus subinde reperietur, cujus alius non est usus quàm ut distinguat ea quæ inserta sunt ab Editore (eo jure sibi ab Autoribus Commentarii concessio); idem etiam designat signum (+) quibusdam notis præfixum, ne scilicet turbaretur ordo litterarum ab Autoribus ipsis adhibitus.

PHILOSOPHIÆ

NATURALIS

PRINCIPIA MATHEMATICA.

DEFINITIONES.

DEFINITIO I. (a)

Quantitas Materiæ est mensura ejusdem orta ex illius Densitate et Magnitudine conjunctim.

AER, densitate duplicatâ, in spatio etiam duplicato fit quadruplus; in triplicato sextuplus. Idem intellige de Nive et Pulveribus per compressionem vel liquefactionem condensatis. Et par est ratio corporum omni-

Licet primæ definitiones NEWTONIANÆ vix aliquam postulare videantur explicationem; in ipso tamen operis nostri limine, nonnulla levioris momenti præmittenda judicamus, quæ ad majora viam sternunt. Prima quæ in posterum sæpius recurrent Mechanicæ principia interserere non abs re erit, tum ut Lectorum labori parcamus, tum ut magis continua servetur nostrarum demonstrationum series.

(a) 1. Materia est substantia trinâ dimensione prædita, solida seu impenetrabilis, mobilis, divisibilis. Spatium purum est illa immensa, penetrabilis, sui ubique similis, immobilis extensio, in quâ corpora omnia liberrimè moveri intelligimus. In corpore dato materiæ quantitatem seu massam, a corporis magnitudine, aut volumine seu mole distingui oportet. Materiæ quantitas est aggregatum, seu summa omnium materiæ particularum quibus compositum est corpus. Volumen, seu Magnitudo, est tota trina dimensio sub exteriori corporis superficie contenta. Porro inter solidas seu impenetrabiles corporis particulas sive elementa, plura esse possunt disseminata foramina seu pori, vel omni materiâ vacui, vel quos aliena materia liberè pervadat; sic aër subtilior spongiæ poros permeat, et ad spongiæ materiam non pertinet. Si nulla sint inter solidas corporis partes admixta

foramina, Massa et volumen non differunt; at si poris pertusum sit corpus, Massam volumen superat.

2. Densitas est ratio massæ corporis ad illius volumen; adeò ut sub æqualibus voluminibus, densitates sint in ratione directâ massarum; et eâdem seu æquali manente in diversis corporibus massâ, densitates sint in ratione voluminum reciproca. Itaque si densitas dicatur D ; massa M , volumen V ; erit $D = M : V$; seu densitas exponi potest per massam ad volumen applicatam, sive, quod idem est, densitas erit ut massa per volumen divisa. Si itaque D et $M : V$, per V multiplicentur, erit $DV = M$, seu massa aut quantitas materiæ est ut densitas in volumen ducta; Massa igitur exponi potest per factum ex densitate in volumen. Quare si DV et M , per D dividantur, erit $V = M : D$, seu volumen est ut massa ad densitatem applicata,

um, quæ per causas quascunque diversimodè condensantur. Medii interea, si quod fuerit, interstitia partium liberè pervadentis, hîc nullam rationem habeo. Hanc autem Quantitatem sub nomine Corporis vel Massæ in sequentibus passim intelligo. Innotescit ea per corporis cujusque Pondus. Nam ^(b) Ponderi proportionalem esse reperi per experimenta Pendulorum accuratissimè instituta, uti posthac docebitur.

DEFINITIO II. ^(c)

Quantitas Motus est mensura ejusdem orta ex Velocitate et Quantitate Materie conjunctim.

Motus totius est summa motuum in partibus singulis; ideoque in corpore duplo majore æquali cum velocitate duplex est, et duplâ cum velocitate quadruplus.

sive volumen est in ratione compositâ ex directâ ratione massæ et inversâ densitatis. Si densitates fuerint æquales, seu si $m : v = M : V$, patet massas esse inter se ut volumina directè. His positis facillè intelligitur massam aëris, densitate duplicatâ, in spatio etiam duplicato fieri quadruplam, nam ob duplicatam densitatem in eodem spatio dupla est massa; ergò duplicato etiam spatio massa rursus duplicatur et fit quadrupla.

(b) 3. Massam esse ponderi proportionalem, ob frequentissimum hujusce veritatis usum, hîc breviter ostendimus. Gravia omnia, ut notissimis constat experimentis, per lineas ad terræ superficiem perpendiculares ac proinde ad sensum parallelas descendunt, et in tubis aëre vacuis plumbum levissimæque pluma eâdem celeritate cadunt, seu æqualia spatia, æqualibus temporibus cadendo percurrunt. Nec successu caret experimentum, etiamsi coarctatis ac diductis poris vel superficiebus, corporis figura mutetur; dummodò eadem remaneat massa, idem semper servatur pondus; ex quo sequitur gravitatem non solum exterioribus corporis partibus, sed et interioribus æque inesse; alioquin ejusdem corporis sub diversis superficiebus, idem non remaneret pondus, nec eadem foret sub diversis figuris celeritas; mutatâ enim superficie, partes quæ antè interiores erant, exteriores fiunt et vice versâ; æqualia igitur massæ elementa æquali urgentur vi gravitatis, seu æqualis sunt ponderis; crescit ergò totius massæ pondus ut elementorum æqualium numerus, seu crescit pondus ut massa, sive massa est ponderi proportionalis.

(c) 4. Locus corporis est pars spatii, quam corpus occupat. Motus est continua loci mutatio. Tria in motu considerata sunt, corpus quod movetur seu mobile, spatium quod percurritur, et tempus quo percurritur. Spatium percursum est linea quam mobile instar puncti consideratum describere intelligitur. Directio motus est linea recta quam mobile describit aut

describere nititur. Motus conspirantes sunt quorum directiones congruunt, aut saltem sunt parallelæ et ad easdem partes tendunt. Motus contrarii seu directè oppositi dicuntur quorum directiones congruunt quidem, aut saltem sunt parallelæ, sed in oppositas partes vergunt. Motus æqualis seu uniformis est, quo mobile æqualia spatia æqualibus temporibus percurrit. Motus acceleratus, quo mobile majora continuò spatia æqualibus temporibus describit. Motus retardatus quo mobile per minora continuò spatia æqualibus temporibus fertur.

5. Celeritas seu velocitas, est ea corporis moti affectio quâ aptum redditur, datum spatium dato tempore æqualiter percurrendi. Est igitur celeritatis mensura in motu æquali quærenda, seu, ut habeatur quantitas velocitati proportionalis, quærendum est spatium quod corpus dato tempore percurreret, si illius motus constans atque æqualis permaneret. Porro manifestum est celeritatem esse duplam, triplam, si temporibus æqualibus duplum, vel triplum percurratur spatium; et contrâ, celeritatem esse subduplam, subtriplam, si æqualia spatia, duplo, triplo tempore percurrantur; ergò manentibus temporibus, celeritates sunt ut spatia; et manentibus spatiis, celeritates sunt inversè ut tempora, quare variantibus temporibus atque spatiis, celeritates semper erunt in ratione compositâ ex directâ spatiarum et reciproca temporum; seu si celeritas dicatur C, spatium S, tempus T; erit C ut $S : T$, sive $C = S : T$, seu celeritas exponi potest per spatium ad tempus applicatum, et multiplicando utrinque per T, erit $C T = S$, seu spatium est ut celeritas in tempus ducta, et dividendo utrinque per C, erit $T = S : C$, seu tempus est ut spatium ad celeritatem applicatum. Si duorum mobilium celeritates C, c, seu S : T; s : τ , fuerint æquales, id est $S : T = s : \tau$, erit $S : s = T : \tau$, seu spatia sunt ut tempora.

6. Jam verò cum in motu nihil nisi corpus,

DEFINITIO III. (^d)

Materiæ vis insita est potentia resistendi, quâ corpus unumquodque, quantum in se est, perseverat in statu suo vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum.

Hæc semper proportionalis est suo corpori, neque differt quicquam ab inertia massæ, nisi in modo concipiendi. Per inertiam materiæ fit, ut corpus omne de statu suo vel quiescendi vel movendi difficulter deturbe-
tur. Unde etiam vis insita nomine significantissimo vis Inertiæ dici possit. Exercet verò corpus hanc vim solummodo in mutatione status sui per vim aliam in se impressam factâ; estque exercitium illud sub diverso respectu et Resistentiâ et Impetus: resistentia, quatenus corpus ad conservandum statum suum reluctatur vi impressæ; impetus, quatenus corpus idem, vi resistentis obstaculi difficulter cedendo, conatur statum obstaculi illius mutare. Vulgus resistentiam quiescentibus et impetum moventibus tribu-

spatium percursum et tempus considerentur, et ratio spatii ad tempus celeritatem exponat (5), satis evidens est ad totum corporis motum seu quantitatem motûs inveniendam, solius massæ et celeritatis habendam esse rationem. Cum autem motus totius corporis sit æqualis summæ motuum singularum Massæ partium, seu elementorum, patet manente celeritate, motum totius massæ crescere prout crescit numerus elementorum massæ æqualium, seu quantitatem motûs esse proportionalem massæ; manente verò massâ, quantitas motûs est ut velocitas; nam si corpus idem duplum spatium eodem tempore percurrit, duplus est illius motus, si triplum, triplus, &c. Siquidem manentibus tempore et massâ, nulla est alia quam spatiorum varietas, et motus sunt ut spatia; sed spatia temporibus æqualibus percurta sunt ut celeritates (5), ergo quantitates motûs sunt etiam ut celeritates. Quare variantibus massis atque celeritatibus, motûs quantitas est semper ut massa in celeritatem ducta, seu in ratione compositâ massæ et celeritatis; si itaque motûs quantitas dicatur Q ; Massa M , celeritas C ; erit Q ut $M C$, quod ita exponimus $Q = M C$, dividendo utrinque per M , et deinde per C , erit $C = Q : M$; et $M = Q : C$; Seu celeritas est ut quantitas motûs ad massam applicata, et massa vicissim, ut quantitas motûs per celeritatem divisa. Si quantitates motûs Q , q , seu $M C$, $m c$, fuerint æquales, erit $M C = m c$, et $M : m = c : C$, seu massæ sunt reciprocè ut celeritates; et viceversâ si $M : m = c : C$, erit $M C = m c$, seu si massæ sunt in ratione velocitatum reciprocâ, quantitates motûs sunt æquales. Præterea cum, (5), sit $C = S : T$, erit etiam $Q = M S : T$, seu quantitates motûs sunt in ratione compositâ ex directis rationibus massæ et spatii et inversâ temporis; inveniatur etiam $Q T = M S$, $M = Q T : S$; $S = Q T : M$, $T = M S : Q$.

Parâ facilitate demonstrari possunt cætera the-

oremata quæ de motuum comparatione, apud scriptores mechanicos fusè reperiuntur.

(a) 7. Vis duplex est, activa et passiva; Activa est potentia motum efficiendi; Passiva est potentia motum recipiendi vel amittendi; vis activa subdividi solet in vim vivam quæ cum motu actuali conjuncta est, et in vim mortuam quæ est tantum conatus seu sollicitatio ad motum, et ex quâ motus actualis non producit, nisi vis mortuæ actio aliquandiu in corpore continuata fuerit. Sic vis gravitatis in globo qui ex filo pendet vel plano horizontali incumbit, est vis mortua, quâ quidem actu non movetur globus, sed conatur moveri filumque tendit, aut planum premit. Si filum abrumpatur, vel planum sustentans auferatur, tum continuâ gravitatis actione globus motu accelerato cadit. Vis quâ corpus in circuli peripheriâ motum, filum centro alligatum tendit, et quâ proinde conatur a centro recedere est quoque vis mortua.

8. Inest omni materiæ vis insita passiva, seu inertia, ex quâ nullus motus, nullaue tendentia ad motum resultat, sed quæ consistit in renixu quo corpus quodlibet, cuilibet vi externæ mutationem status, id est, motûs vel quietis inducere conanti resistit. Etenim nulla potest esse actio corporis in corpus, quin luctatio quædam, ut loquitur Clar. *Hermannus* in *Phoronomiâ*, fiat inter corpus agens et patiens, dum alterum alteri resistit; aliqui corpus motum posset sine motûs proprii detrimento, aliud quodcumque movere. Vis illa inertie eadem est in corporibus motis et quiescentibus; tam enim resistent corpora actioni quâ a quiete ad motum conitantur, quàm actioni quâ a motu ad quietem reducuntur. Eadem quippè vis requiritur ad motum datum producendum et ad eundem extinguendum. Quia autem vis illa inertie eadem in omnibus æqualibus materiæ partibus reperitur, consequens est ut sit materiæ proportionalis; dupla in massâ duplicatâ, tripla in tri-

it: sed motus et quies, uti vulgo concipiuntur, respectu solo distinguuntur ab invicem; neque semper verè quiescunt quæ vulgo tanquam quiescentia spectantur.

DEFINITIO IV. (e)

Vis impressa est actio in corpus exercita, ad mutandum ejus statum vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum.

Consistit hæc vis in actione solâ, neque post actionem permanet in corpore. Perseverat enim corpus in statu omni novo per solam vim inertie. Est autem vis impressa diversarum originum, ut ex ictu, ex pressione, ex vi centripetâ.

DEFINITIO V.

Vis Centripeta est, quâ corpora versus punctum aliquod tanquam ad Centrum undique trahuntur, impelluntur, vel utcumque tendunt.

Hujus generis est Gravititas, quâ corpora tendunt ad centrum terræ; Vis Magnetica, quâ ferrum petit magnetem; et Vis illa, quæcunque sit, quâ Planetæ perpetuo retrahuntur a motibus rectilineis, et in lineis curvis revolvî coguntur. Lapis, in fundâ circumactus, a circumagente manu abire conatur; et conatu suo fundam distendit, eoque fortius quo celerius revolvitur; et quamprimum dimittitur, avolat. Vim conatui illi contrariam, quâ funda lapidem in manum perpetuò retrahit et in orbe retinet, quoniam in manum ceu orbis centrum dirigitur, Centripetam appello. Et par est ratio (f) corporum omnium, quæ in gyrum aguntur. Conantur ea omnia a centris orbium recedere; et nisi adsit vis aliqua conatui isti contraria, quâ cohibeantur et in orbibus retineantur, quamque ideo Centripetam appello, abibunt in rectis lineis uniformi cum motu. Projectile, si vi Gravitatis destitueretur, non deflecteretur in terram, sed in lineâ rectâ abiret in cœlos; idque uniformi cum motu, si modo aëris resistantia tolleretur. Per gravitatem suam retrahitur a cursu rectilineo et in terram perpetuò flectitur, idque magis vel minus pro gravitate suâ et velocitate motus. Quo minor fuerit ejus gravitas pro quantitate materiæ, vel major velocitas quâcum projicitur, eo minus deviat a cursu rectili-

plicatâ. Majoribus etiam mutationibus corpora magis resistunt quam minoribus, estque resistantia actualis magnitudini mutationis proportionalis.

(e) 9. Nihil fit sine causâ; undè omne corpus ut potè iners et passivum (8) in suo quocumque statu perseverat, nisi causâ aliquâ, seu vi externâ, statum suum mutare cogatur; cùm igitur vis aliqua in corpus actu agit; vis impressa seu actio mutat quidem corporis statum, sed cessante illius vis actione, corpus in novo statu per

illam actionem recepto perseverat solâ vi inertie passivâ, quâ fit ut sine novâ vi externâ statum suum mutare nullâ ratione possit; adeoque si semel movetur, sibi relictum, perpetuò atque æquabiliter per lineam rectam movebitur, seu secundum directionem quâ impulsus fuerit et quâ movebatur, dum actio vis externæ cessavit.

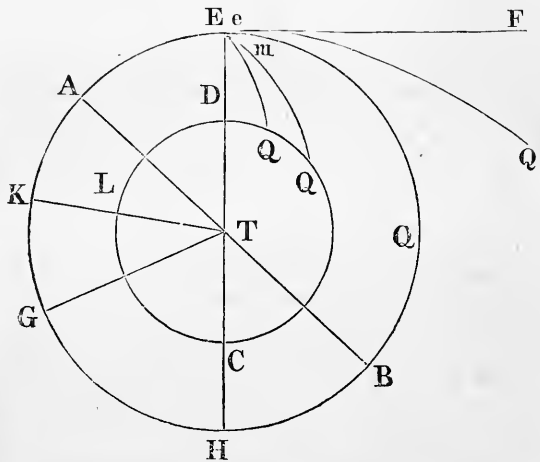
(f) 10. Cùm linea quævis curva considerari possit tanquam polygonum, ex infinitis numeris,

neo et longius perget. Si Globus plumbeus, data cum velocitate secundum lineam horizontalem a montis alicujus vertice vi pulveris tormentarii projectus, pergeret in lineâ curvâ ad distantiam duorum milliarium, priusquam in terram decideret: hic duplâ cum velocitate quasi duplo longius pergeret, et decuplâ cum velocitate quasi decuplo longius: si modò aëris resistentia tolleretur. Et augendo velocitatem augeri posset pro lubitu distantia in quam projiceretur, et minui curvatura lineæ quam describeret, ita ut tandem caderet ad distantiam graduum decem vel triginta vel nonaginta; vel etiam ut terram totam circuiret, vel denique ut in cœlos abiret et motu abeundi pergeret in infinitum. Et eâdem ratione, quâ Projectile vi gravitatis in orbem flecti posset et terram totam circuire, potest et Luna vel vi gravitatis, si modò gravis sit, vel aliâ quâcunque vi, quâ in terram urgeatur, retrahi semper a cursu rectilineo terram versus, et in orbem suum flecti: et sine tali vi Luna in orbe suo retineri non potest. Hæc vis, si justo minor esset, non satis flecteret Lunam de cursu rectilineo: si justo major, plus satis flecteret, ac de orbe suo terram versus deduceret. Requiritur quippe ut sit justæ magnitudinis: et Mathematicorum est invenire

atque infinitè parvis seu evanescentibus lateribus rectis compositum. Si corpus in curvâ E B H K, moveatur, in singulis curvæ punctis E fertur juxta directionem lateris evanescentis E e, adeoque si sibi relinqueretur, nec altera vis in extremitate hujus rectæ E e, illud retraheret, et in lineam, e m, inflecteret, perpetuò atque æquabiliter moveretur per rectam, E e, productam (9) ac proinde cum lineâ E e producta, sit ipsa curvæ tangens E F, uniformiter moveretur per tangentem in puncto E, nisi nova vis perpetuò in illud agens, cujus directio est versùs curvam, ipsum a motu rectilineo retraheret et in orbitâ suâ retineret, quo major est vis aut celeritas secundum directionem tangentis vel evanescentis lateris, E e, et minor vis illa quâ mobile a tangente in curvam retrahitur,

eò minus a tangente deviat corpus, adeoque curva quam motu suo describit, ad tangentem seu rectam lineam propius accedit. Econtrâ decrescente vi aut celeritate secundum directionem tangentis, aut crescente vi alterâ quæ a tangente deflectit, corpus a motu rectilineo magis retrahitur, et major fit lineæ curvatura. Nam effectus sunt causis suis proportionales; est autem motus per tangentem rectilineus, effectus vis secundum directionem tangentis, et deviatio a tangente, effectus vis illius quæ a tangente retrahit.

11. Sit terræ circumferentia D Q C, illiusque centrum T, ex quo vim ad centrum trahentem per totum circumquaque spatium propagari fin-



gamus, aut, si magis placuerit, supponamus esse vim per totum spatium diffusam, quâ corpora omnia secundum directionem radiorum, E T, A T, ad centrum T urgeantur, et ex vertice E montis E D projiciatur corpus juxta directionem rectæ E F ad E T normalis; corpus illud hæc solâ vi impressâ æquabiliter per rectam E F moveretur (9); at vi centripetâ seu vi tendente ad centrum T ab illâ rectâ perpetuò retrahitur et cogitur incedere in curvâ aliquâ E Q quam tangit in E recta E F (10); augendo vim impressam secundum directionem tangentis, E F, curva E Q, ad tangentem E F, propius accedit, adeò ut corpus variis et successivè crescentibus celeritatibus projectum, terram tardiùs semper

vin, quâ corpus in dato quovis orbe datâ cum velocitate accuratè retineri possit; et vicissim invenire viam curvilineam, in quam corpus e dato quovis loco datâ cum velocitate egressum a datâ vi flectatur. Est autem vis hujus centripetæ quantitas trium generum, absoluta, acceleratrix, et motrix.

DEFINITIO VI. ^(g)

Vis centripetæ quantitas absoluta est mensura ejusdem major vel minor pro efficacia causæ eam propagantis a centro per regiones in circuitu.

Ut vis magnetica pro mole magnetis vel intensione virtutis major in uno magnete, minor in alio.

DEFINITIO VII. ^(h)

Vis centripetæ quantitas acceleratrix est ipsius mensura velocitati proportionalis, quam dato tempore generat.

Uti virtus magnetis ejusdem major in minori distantia, minor in majori: vel vis gravitans major in vallibus, minor in cacuminibus altorum montium, atque adhuc minor (ut posthac patebit) in majoribus distantis a globo terræ; in æqualibus autem distantis eadem undique, propterea

attingat; deindè circà eam revolvatur, tandemque in infinitum abeat. Ut igitur corpus per rectam E F, datâ velocitate projectum, curvam datam E Q describat, certa ac determinata vis centripetâ requiritur; et viceversâ, datâ velocitate secundùm rectam E e seu E F, et vi centripetâ etiam datâ, corpus nonnisi certam ac determinatam curvam E Q potest describere; et mathematicorum est ex datis velocitate per tangentem E F et curvâ E Q quam corpus describit, invenire vim centripetam, quâ a tangente retrahitur et in orbitâ suâ retinetur, et reciprocè ex datâ velocitate per tangentem et vi centripetâ, curvam invenire; quæ duo Newtonus mirâ sagacitate et elegantia perfectit.

^(g) 12. In centro T existere supponatur corpus, ex quo per omne spatium diffundatur vis, quæ juxta directionem radiorum A T, E T, H T, versùs centrum, aut a centro versùs spatia circumposita, juxta directionem radiorum, T A, T E, T H, agat; in 1^o. casu vis illa centripetâ, in 2^o. vis centrifuga, in utroque vis centralis dicitur.

Hæc vis in centro considerata duplici præsertim ratione variare potest; Si enim corpus quod centrum occupat, et cui vis inest, in sua æqualia elementa divisum intelligatur, et vis sit singulis elementis æqualis ejusdemque constanter intensiois; vis totius corporis centralis, seu vis centralis quantitas absoluta, erit massæ seu summæ elementorum proportionalis. At si manente eadem corporis centralis massâ, vis semper manens æqualis in singulis elementis æqualibus intensivè crescat vel decrescat, vis tota corporis

centralis seu vis centralis quantitas absoluta, erit proportionalis intensioni vis in singulis elementis existentis; quare variantibus massâ et vi singulorum elementorum, vis centralis quantitas absoluta erit in ratione compositâ massæ et intensiois vis in singulis elementis æqualibus.

^(h) 13. Si vis centralis non ampliùs in centro, sed in quâcunque a centro distantia consideretur, possumus in variis illis a centro distantis superficies sphaericas fingere quarum commune centrum sit T, et vis centralis in illis distantis vis superficiebus sphaericis considerata, dicitur vis acceleratrix. Illius autem quantitas erit proportionalis celeritati quam dato seu constante tempore in singulis materiæ elementis a centro æquidistantibus producet; nam si supponamus vim illam constantem in elementa materiæ continuò agere, eo major erit quo major erit velocitas dato tempore genita, ita ut si tempore æquali dupla generetur velocitas, dupla quoque sit vis, cum velocitas illa sit illius vis effectus plenus. Si constans maneat celeritas a vi acceleratrice genita, erit vis in ratione inversâ temporis quo celeritas illa producit, nam si eadem celeritas tempore subduplo producat, vis duplicatur. Quare si manente vi constante, celeritas et tempus variant, erit vis acceleratrix in ratione compositâ ex directâ celeritatis genitæ et reciproca temporis. Si igitur vis acceleratrix dicatur, G; celeritas producta C; tempus quo producit, T, erit $G = C \cdot T$, et $G \cdot T = C$, et $T = C : G$. Licet autem variet vis acceleratrix, eadem tamen est illius mensura, modò celeritas nascens seu

quod corpora omnia cadentia (gravia an levia, magna an parva) sublata aeris resistentia, æqualiter accelerat.

DEFINITIO VIII. ⁽¹⁾

Vis centripetæ quantitas motrix est ipsius mensura proportionalis motui, quem dato tempore generat.

Uti pondus majus in majore corpore, minus in minore; et in corpore eodem majus prope terram, minus in cælis. Hæc quantitas est corporis totius centripetentia seu propensio in centrum, et (ut ita dicam) pondus; et innotescit semper per vim ipsi contrariam et æqualem, quâ descensus corporis impediri potest.

Hasce virium quantitates brevitatis gratia nominare licet vires motrices, acceleratrices, et absolutas; et distinctionis gratia referre ad corpora, centrum petentia, ad corporum loca, et ad centrum virium: nimirum vim motricem ad corpus, tanquam conatum totius in centrum ex conatibus omnium partium compositum; et vim acceleratricem ad locum corporis, tanquam efficaciam quandam, de centro per loca singula in circuitu diffusam, ad movenda corpora quæ in ipsis sunt; vim autem absolutam ad centrum, tanquam causa aliqua præditum, sine quâ vires motrices non propagantur per regiones in circuitu; sive causa illa sit corpus aliquod cen-

nitio motus tempore quàm minimo producta consideretur, tunc enim vis agit uniformiter.

14. Si vis aliqua per radios divergentes in medio non resistente diffundatur, vis acceleratrix decrescit in ratione duplicatâ distantiarum a centro; nam quia vis illa, ex hyp., in medio non resistente propagatur, nullus intercipitur radius, nec vis singulorum minuitur, adeoque radii qui in distantia T L, per hemisphærium a semicirculo D L C descriptum diffundebantur, in distantia T K, per hemisphærium E K H propagantur; est autem vis acceleratrix ut radorum densitas, et radorum densitas est reciprocè ut superficies hemisphæriorum a semicirculis descriptorum; nam radorum densitas est ut summa seu numerus radorum per superficiem quam occupant divisus; hic enim summa radorum est ut massa, superficies verò cui insunt ut volumen. Verùm cum per hyp., idem numerus radorum superficies singulorum hemisphæriorum occupet, erit densitas radorum in ratione inversâ illarum superficialium in quâvis a centro distantia descriptarum; illæ autem superficies sunt in ratione duplicatâ distantiarum a centro; ergo et vis acceleratrix est in ratione duplicatâ distantiarum a centro reciprocè. Egregium illud theorema, ut ex demonstratione patet, omnem excludit medii resistentiam; quare ut in physicis valeat, medii resistentia in computum venire debet. Hæc autem virium seu qualitatum e centro emanantium theoria ad majorem universalitatem reduci potest, si vis in singulis ra-

diis variè propagari supponatur, aut etiam si per lineas curvas diffundi fingatur. Sed hæc fusiùs prosequi præsentis non est instituti.

⁽¹⁾ 15. Si vis centripeta in corpore ad centrum propulso consideretur; ut totus illius corporis in centrum conatus seu vis centripetæ quantitas motrix habeatur, ducenda est massa in vim acceleratricem; nam vis motrix totius corporis componitur ex omnibus viribus, quibus singula æqualia elementa urgentur, adeoque ex vi acceleratrice toties sumptâ quot sunt in corpore æqualia materiæ elementa, sive ex vi acceleratrice in massam ductâ. Supponimus enim singula elementa æqualia, æquali vi acceleratrice urgeri. Sed vis acceleratrix est ut celeritas dato tempore genita (13), ergò vis centripetæ quantitas motrix est ut massa in illam celeritatem ducta, seu ut quantitas motus, dato tempore producta. Si igitur vis acceleratrix dicatur, G; massa, M, vis motrix, p, erit p, ut, M G, et M, ut p : G, et G, ut p : M, seu massa est ut vis motrix per vim acceleratricem divisa, et vis acceleratrix, ut vis motrix per massam divisa. Si duæ fuerint vires motrices P et p, seu M G, et m g, æquales, erit M : m = G : g, seu massæ sunt ut vires acceleratrices reciprocè; et viceversâ, si M : m = g : G, erit m g = M G, seu si massæ sunt reciprocè ut vires acceleratrices, vires motrices sunt æquales. Porro cum vires acceleratrices sint ut celeritates dato tempore genitæ (13), in superioribus proportionibus loco virium acceleratricum celeritates illæ substitui possunt.

trale (quale est Magnes in centro vis magneticæ, vel Terra in centro vis gravitantis) sive alia aliqua quæ non apparet. Mathematicus duntaxat est hic conceptus. Nam virium causas et sedes Physicas jam non expendo.

Est igitur vis acceleratrix ad vim motricem ut celeritas ad motum. Oritur enim quantitas motus ex celeritate et ex quantitate materiæ, et vis motrix ex vi acceleratrice et ex quantitate ejusdem materiæ conjunctim. Nam summa actionum vis acceleratricis in singulas corporis particulas est vis motrix totius. Unde juxta superficiem Terræ, ubi gravitas acceleratrix seu vis gravitans in corporibus universis eadem est, gravitas motrix seu pondus est ut corpus: at si in regiones ascendatur ubi gravitas acceleratrix fit minor, pondus pariter minuetur, eritque semper ut corpus & gravitas acceleratrix conjunctim. Sic in regionibus ubi gravitas acceleratrix duplo minor est, pondus corporis duplo vel triplo minoris erit quadruplo vel sextuplo minus.

Porro attractiones et impulsus eodem sensu acceleratrices et motrices nomino. Voces autem Attractionis, Impulsus, vel Propensionis cujuscunque in centrum, indifferenter et pro se mutuò promiscuè usurpo; has vires non Physicè, sed Mathematicè tantùm considerando. Unde caveat lector, ne per hujusmodi voces cogitet me speciem vel modum actionis causamve aut rationem Physicam alicubi definire, vel centris (quæ sunt puncta Mathematica) vires verè & Physicè tribuere; si forte aut centra trahere, aut vires centrorum esse dixero.

Scholium.

Hactenus voces minus notas, quo sensu in sequentibus accipiendæ sint, explicare visum est. Tempus, Spatium, Locum et Motum, ut omnibus notissima, non definio. Notandum tamen, quod vulgus quantitates hasce non aliter quam ex relatione ad sensibilia concipiat. Et inde oriuntur præjudicia quædam, quibus tollendis convenit easdem in absolutas et relativas, veras et apparentes, mathematicas et vulgares distinguere.

(^k) I. Tempus Absolutum, verum, et mathematicum, in se et naturâ suâ sine relatione ad externum quodvis, æquabiliter fluit, alioque nomine dicitur Duratio: Relativum, apparens, et vulgare est sensibilis et externa quævis Durationis per motum mensura (seu accurata seu inæquabilis) quâ vulgus vice veri temporis utitur; ut Hora, Dies, Mensis, Annus.

II. Spatium Absolutum, naturâ suâ sine relatione ad externum quodvis, semper manet simile & immobile: Relativum est spatii hujus mensura seu dimensio quælibet mobilis, quæ a sensibus nostris per situm suum ad cor-

(^k) 16. Quemadmodum Geometræ lineam tum mathematicè considerare possumus, tanquam fluxu puncti generari fingunt, ita tempus absolu- æquabilem unius instantis seu puncti temporis

pora definitur, et à vulgo pro spatio immobili usurpatur: uti dimensio spatii subterranei, aërei vel cœlestis definita per situm suum ad Terram. Idem sunt spatium absolutum et relativum, specie et magnitudine; sed non permanent idem semper numero. Nam si Terra, verbi gratia, moveatur; spatium Aëris nostri, quod relativè et respectu Terræ semper manet idem, nunc erit una pars spatii absoluti in quam Aër transit, nunc alia pars ejus; et sic absolutè mutabitur perpetuò.

III. Locus est pars spatii quam corpus occupat, estque pro ratione spatii vel Absolutus vel Relativus. Pars, inquam, spatii; non Situs corporis, vel Superficies ambiens. Nam solidorum æqualium æquales semper sunt loci; Superficies autem ob dissimilitudinem figurarum ut plurimum inæquales sunt; Situs vero propriè loquendo quantitatem non habent, neque tam sunt loca quam affectiones locorum. Motus totius idem est cum summa motuum partium, hoc est, translatio totius de suo loco eadem est cum summa translationum partium de locis suis; ideoque locus totius idem est cum summa locorum partium, et propterea internus et in corpore toto.

IV. Motus Absolutus est translatio corporis de loco absoluto in locum absolutum, Relativus de relativo in relativum. Sic in navi, quæ velis passis fertur, relativus corporis Locus est navigii regio illa in quâ corpus versatur, seu cavitatis totius pars illa quam corpus implet, quæque adeo movetur unâ cum navi: et Quies relativa est permansio corporis in eâdem illâ navis regione vel parte cavitatis. At quies vera est permansio corporis in eâdem parte spatii illius immoti in quâ navis ipsa unâ cum cavitare suâ et contentis universis movetur. Unde si Terra verè quiescat, corpus quod relativè quiescit in navi, movebitur verè et absolutè eâ cum velocitate quâ navis movetur in Terrâ. Sin Terra etiam moveatur, orietur verus et absolutus corporis motus, partim ex Terræ motu vero in spatio immoto, partim ex navis motu relativo in Terrâ: et si corpus etiam moveatur relativè in navi, orietur verus ejus motus, partim ex vero motu Terræ in spatio immoto, partim ex relativis motibus tum navis in Terrâ, tum corporis in navi; et ex his motibus relativis orietur corporis motus relativus in Terrâ. Ut si Terræ pars illa, ubi navis versatur, moveatur verè in orientem cum velocitate partium 10010; et velis ventoque feratur navis in occidentem cum velocitate partium decem; Nauta autem ambulet in navi orientem versus cum velocitatis parte unâ: movebitur Nauta verè et absolutè in spatio immoto cum velocitatis partibus 10001 in orientem, et relativè in terrâ occidentem versus cum velocitatis partibus novem.

fluxum. Quapropter si corpus aliquod æquabili celeritate moveretur, illud eodem modo ac tem-

poris punctum fluere, spatiaque ab eo descripta forent temporibus proportionalia (5); eo igitur

(^l) Tempus Absolutum a relativo distinguitur in Astronomiâ per Æquationem temporis vulgi. Inæquales enim sunt dies naturales, qui vulgo tanquam æquales pro mensura temporis habentur. Hanc inæqualitatem corrigunt Astronomi, ut ex veriore tempore mensurent motus cœlestes. Possibile est, ut nullus sit motus æquabilis quo Tempus accuratè mensuretur. Accelerari et retardari possunt motus omnes, sed fluxus temporis absoluti mutari nequit. Eadem est duratio seu perseverantia existentiae rerum; sive motus sint celeres, sive tardi, sive nulli: proinde hæc a mensuris suis sensibilibus meritò distinguitur, et ex iisdem colligitur per Æquationem Astronomicam. Hujus autem æquationis in determinandis Phænomenis necessitas, tum per experimentum Horologii Oscillatorii, tum etiam per eclipses Satellitum Jovis evincitur.

Ut ordo partium Temporis est immutabilis, sic etiam ordo partium Spatii. Moveantur hæc de locis suis, et movebuntur (ut ita dicam) de seipsis. Nam tempora et spatia sunt sui ipsorum et rerum omnium quasi Loca. In Tempore quoad ordinem successionis; in Spatio quoad ordinem situs locantur universa. De illorum essentia est ut sint Loca: et loca primaria moveri absurdum est. Hæc sunt igitur absoluta Loca; et solæ translationes de his locis sunt absoluti Motus.

Verum quoniam hæc Spatii partes videri nequeunt, et ab invicem per sensus nostros distingui; earum vice adhibemus mensuras sensibiles. Ex positionibus enim et distantiiis rerum à corpore aliquo, quod spectamus ut immobile, definimus loca universa: deinde etiam et omnes motus æstimamus cum respectu ad prædicta loca, quatenus corpora ab iisdem transferri concipimus. Sic vice locorum et motuum absolutorum relativis utimur, nec incommodè in rebus humanis: in Philosophicis autem abstrahendum est a sensibus. Fieri etenim potest, ut nullum revera quiescat corpus, ad quod loca motusque referantur.

Distinguuntur autem Quies et Motus absoluti et relativi ab invicem per Proprietates suas et Causas et Effectus. Quietis proprietas est, quod corpora verè quiescentia quiescunt inter se. Ideoque cum possibile sit, ut corpus aliquod in regionibus Fixarum, aut longè ultra, quiescat absolutè; sciri autem non possit ex situ corporum ad invicem in regionibus nostris, horumne aliquod ad longinquum illum datam positionem servet necne, quies vera ex horum situ inter se definiri nequit.

motu tanquam accuratâ durationis mensurâ uti possemus. Verùm corporum cœlestium et horologiorum motus, quos ad temporis mensuram adhibemus, licet vulgò supponantur æquabiles, variis tamen ex causis accelerantur vel retardantur, sicque mensuræ illæ vulgares non sunt temporis absoluto proportionales.

(ⁱ) 17. Æquatio temporis dicitur differentia quæ inter tempus absolutum et tempus relativum, (h.

e. tempus per solis revolutionem mensuratum) intercedit; quæ proinde temporis relativo juncta, vel ab eo subducta conficit tempus absolutum et vice versâ.

(^m) 18. Gyranitium corporum partes singulæ in orbitis curvilineis moventur, adeoque (¹⁰) per tangentes orbitarum progredi, atque ita ab axe motus recedere nituntur; ut si trochus vel sphaera circa axem rotatur, singulæ illorum corporum

Motus proprietas est, quod partes, quæ datas servant positiones ad tota, participant motus eorundem totorum. Nam gyantium partes ^(m) omnes conantur recedere ab axe motus, et progredientium impetus oritur ex conjuncto impetu partium singularum. Motis igitur corporibus ambientibus, moventur quæ in ambientibus relativè quiescunt. Et propterea motus verus et absolutus definiri nequit per translationem e viciniâ corporum, quæ tanquam quiescentia spectantur. Debent enim corpora externa non solum tanquam quiescentia spectari, sed etiam verè quiescere. Alioquin inclusa omnia; præter translationem e viciniâ ambientium, participabunt etiam ambientium motus veros; et sublatâ illâ translatione non verè quiescent, sed tanquam quiescentia solummodo spectabuntur. Sunt enim ambientia ad inclusa, ut totius pars exterior ad partem interiorem, vel ut cortex ad nucleum. Moto autem cortice, nucleus etiam, sine translatione de viciniâ corticis, ceu pars totius movetur.

Præcedenti proprietati affinis est, quod moto loco movetur unâ locatum: ideoque corpus, quod de loco moto movetur, participat etiam loci sui motum. ⁽ⁿ⁾ Motus igitur omnes, qui de locis motis fiunt, sunt partes solummodo motuum integrorum et absolutorum: et motus omnis integer componitur ex motu corporis de loco suo primo, et motu loci hujus de loco suo, et sic deinceps; usque dum perveniatur ad locum immotum, ut in exemplo nautæ supra memorato. Unde motus integri et absoluti non nisi per loca immota definiri possunt: et propterea hos ad loca immota, relativos ad mobilia supra retuli. Loca autem immota non sunt, nisi quæ omnia ab infinito in infinitum datas servant positiones ad invicem; atque adeo semper manent immota, spatiumque constituunt quod immobile appello.

Causæ, quibus motus veri et relativi distinguuntur ab invicem, sunt vires in corpora impressæ ad motum generandum. Motus verus nec generatur nec mutatur, nisi per vires in ipsum corpus motum impressas: at motus relativus generari et mutari potest sine viribus impressis in hoc corpus. Sufficit enim ut imprimatur in alia solum corpora ad quæ fit relatio, ut iis cedentibus mutetur relatio illa in quâ hujus quies vel motus relativus consistit. Rursum motus verus a viribus in corpus motum impressis semper mutatur; at motus relativus ab his viribus non mutatur necessario. Nam si eadem vires in alia etiam corpora, ad quæ fit relatio, sic imprimantur

partes circulos describunt, et ab illorum centris per tangentes effugere conantur, cumque omnia illa centra sint in axe motûs posita, singulæ partes ab axe recedere nituntur.

⁽ⁿ⁾ 19. Si nauta in navi deambulare supponatur, motusque navis et nautæ conspirent, integra et absoluta nautæ celeritas componitur ex celeritate nautæ respectu loci sui primi in navi, ex celeritate loci illius, id est, navis respectu ma-

ris, seu respectu loci secundi, et ex celeritate maris respectu spatii immoti. Si autem motus nautæ, motui navis foret directè oppositus, absoluta nautæ velocitas æqualis foret differentiæ celeritatum navis respectu spatii immoti et nautæ respectu navis. Tandem si motus nautæ respectu navis foret obliquus, illius directio et velocitas in duas alias directiones et velocitates ita resolverent, ut una directio cum aliorum motuum com-

ut situs relativus conservetur, conservabitur relatio in quâ motus relativus consistit. Mutari igitur potest motus omnis relativus ubi verus conservatur, et conservari ubi verus mutatur; et propterea motus verus in ejusmodi relationibus minime consistit.

Effectus, quibus motus absoluti et relativi distinguuntur ab invicem, sunt vires recedendi ab axe motus circularis. (°) Nam in motu circulari nudè relativo hæ vires nullæ sunt, in vero autem et absoluto majores vel minores pro quantitate motus. Si pendeat situla a filo prælongo, agaturque perpetuò in orbem, donec filum a contorsione admodum rigescat, dein impleatur aquâ, et unâ cum aquâ quiescat; tum vi aliquâ subitanè agatur motu contrario in orbem, et filo se relaxante, diutius perseveret in hoc motu; (P) superficies aquæ sub initio plana erit, quemadmodum ante motum vasis: at postquam vas, vi in aquam paulatim impressâ, effecit ut hæc quoque sensibilibiter revolvi incipiat; recedet ipsa paulatim a medio, ascendetque ad latera vasis, figuram concavam induens, (ut ipse expertus sum) et incitatore semper motu ascendet magis et magis, donec revolutiones in æqualibus cum vase temporibus peragendo, quiescat in eodem relativè. Indicat hic ascensus conatum recedendi ab axe motus, et per talem conatum innotescit et mensuratur motus aquæ circularis verus et absolutus, motuique relativo hic omnino contrarius. Initio, ubi maximus erat aquæ motus relativus in vase, motus ille nullum excitabat conatum recedendi ab axe: aqua non petebat circumferentiam ascendendo ad latera vasis, sed plana manebat, et propterea illius verus motus circularis nondum inceperat. Postea vero, ubi aquæ motus relativus decrevit, ascensus ejus ad latera vasis indicabat conatum recedendi ab axe; atque hic conatus monstrabat motum illius circularem verum perpetuo crescentem, ac tandem maximum factum ubi aqua quiescebat in vase relativè. Quare conatus iste non pendet a translatione aquæ respectu corporum ambientium, et propterea motus circularis verus per tales translationes definiri nequit. Unicus est corporis cujusque revolventis motus verè circularis, conatui unico tanquam proprio et adæquato effectui respondens: motus autem relativi pro variis relationibus ad externa innumeri sunt; et relationum instar, effectibus veris omnino destituuntur, nisi quatenus verum illum et unicum motum participant. Unde et in Systemate eorum qui Cœlos nostros infra Cœlos Fixarum in orbem revolvi vo-

muni directione conspiret, alia verò sit ipsi perpendicularis, tuncque, ex regulis infrà demonstrandis, facillimè invenietur tum absoluta nautæ celeritas, tum illius vera directio.

(°) 20. In motu circulari nudè relativo, id est, in quiete absolutâ corporis inertis, quod motu duntaxat relativo movetur, vires activæ nullæ sunt.

(P) 21. Cum aqua vi inertię (8) in eodem

quiescendi statu perseverare nitatur, in eam nonnisi gradatim et per repetitam laterum situlæ frictionem motus circularis transire potest; adeoque sub initio motus situlæ, tota aquæ massa quiescit absolutè, sive quod idem est, maximâ velocitate nudè relativâ in vase revolvitur; undè destituta omni vi activâ (20) sicut antè motum situlæ, plana et quæta manet. Sed cum iterato laterum vasis impulsu, motus circularis ad aquam

lunt, et Planetas secum deferre; singulæ Cœlorum partes, et Planetæ qui relativè quidem in Cœlis suis proximis quiescunt, moventur verè. Mutant enim positiones suas ad invicem (secus quàm fit in verè quiescentibus) unàque cum cœlis delati participant eorum motus, et ut partes revolvantium totorum, ab eorum axibus recedere conantur.

Quantitates relativæ non sunt igitur eæ ipsæ quantitates, quarum nomina præ se ferunt, sed sunt earum mensuræ illæ sensibiles (veræ an errantes) quibus vulgus loco quantitatuum mensurarum utitur. At si ex usu definiendæ sunt verborum significationes, per nomina illa Temporis, Spatii, Loci et Motus propriè intelligendæ erunt hæ mensuræ sensibiles; et sermo erit insolens et purè Mathematicus, si quantitates mensuratæ hîc intelligantur. Proinde vim inferunt Sacris Literis, qui voces hasce de quantitativis mensuratis ibi interpretantur. Neque minus contaminant Mathesin et Philosophiam, qui quantitates veras cum ipsarum relationibus et vulgaribus mensuris confundunt.

Motus quidem veros corporum singulorum cognoscere, et ab apparentibus actu discriminare, difficillimum est: propterea quod partes spatii illius immobilis, in quo corpora verè moventur, non incurrunt in sensus. Causa tamen non est prorsus desperata. Nam argumenta desumi possunt, partim ex motibus apparentibus qui sunt motuum verorum differentiæ, partim ex viribus quæ sunt motuum verorum causæ et effectus. Ut si globi duo, ad datam ab invicem distantiam filo intercedente connexi, revolverentur circa commune gravitatis centrum, innotesceret ex tensione fili conatus globorum recedendi ab axe motus, et inde quantitas motus circularis computari posset. (9) Deinde si vires quælibet æquales in alternas globorum facies ad motum circularem augendum vel minuendum simul imprimerentur, innotesceret ex auctâ vel diminutâ fili tensione augmentum vel decrementum motus, et inde tandem inveniri possent facies globorum in quas vires imprimi deberent, ut motus maxime augeretur; id est, facies posticæ, sive quæ in motu circulari sequuntur. Cognitis autem faciebus quæ sequuntur, et faciebus oppositis quæ præcedunt, cognosceretur determinatio motus. In hunc modum inveniri posset et quantitas et determinatio motus hujus circularis in vacuo quovis immenso, ubi nihil extaret externum et sensibile quocum globi conferri possent. Si jam constituerentur in spatio illo cor-

transierit, singulæ partes aquæ (18) ab axe motus, seu a medio vasis conantur recedere, cumque minore sursùm in aëre resistentiam inveniant, ad latera situlæ accumulantur et ascendant, et quò celerius aguntur in orbem, eo majori conatu ab axe motus per tangentes recedere nituntur. (10. 11.) Porro cum inter vim centrifugam et celeritatem corporis in dato circulo revolvantis certa debet esse ac determinata pro-

portio, ex vi centrifugâ seu conatu recedendi ab axe cognosci ac mensurari potest velocitas motus circularis absoluta, ut deinceps demonstrabitur.

(9) 22. Si in alternas, seu è diametro sibi oppositas globorum facies, ad motum circularem augendum vel minuendum, imprimerentur vires quælibet æquales, quæ proinde non perturbarent æquilibrium globorum circa commune gravitatis

pora aliqua longinqua datam inter se positionem servantia, qualia sunt Stellæ Fixæ in regionibus Cœlorum (^r), sciri quidem non posset ex relativa globorum translatione inter corpora, utrum his an illis tribuendus esset motus. At si attenderetur ad filum, et deprehenderetur tensionem ejus illam ipsam esse quam motus globorum requireret, concludere liceret motum esse globorum, et corpora quiescere; et tum demum ex translatione globorum inter corpora, determinationem hujus motus colligere. Motus autem veros ex eorum causis, effectibus, et apparentibus differentiis colligere, et contra ex motibus seu veris seu apparentibus eorum causas et effectus, docebitur fusius in sequentibus. Hunc enim in finem Tractatum sequentem composui.

centrum, id est, circa punctum æquilibrii revolvuntur, innotesceret ex auctâ vel diminutâ filii tensione augmentum vel decrementum motûs, &c.

(^r) 23. Spectator in globo moto, vel etiam in stellâ fixâ positus, solo oculorum auxilio, seu ex motibus apparentibus discernere non posset, an globus, an stella verè moveretur; quemadmodum telluris incolæ ex apparenti stellarum motu determinare non possunt, an stellæ verè moveantur; sive enim cum terrâ moveamur, et stellæ quiescant absolutè, sive e contrâ moveantur stellæ et terra quiescat, eadem omnino sunt apparentiæ, iidem motus relativi; quod quidem no-

tissimo illustratur exemplo navis æquabiliter motæ, cujus motus, ab iis qui navi vehuntur, oculis non percipitur, dum littora urbesque fugere videntur. Ex optices principiis horum phænomenôn petenda est ratio; ea enim corpora quiescere videntur quæ, dum nos ipsi nullam actualem voluntatem nosmet movendi exercemus, eandem respectu oculi positionem constanter servant, ita ut eorum imago quæ in fundo oculi pingitur, eandem semper retinæ partem occupet: ea verò objecta moveri videntur quæ respectu oculi situm suum continuò mutant, seu quorum imagines diversas retinæ partes successivè occupant.

AXIOMATA,

SIVE

LEGES MOTUS.

LEX I.

(^s) *Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quâtenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare.*

PROJECTILIA perseverant in motibus suis, nisi quâtenus a resistentiâ aëris retardantur, et vi gravitatis impelluntur deorsum. Trochus, cujus partes cohærendo perpetuò retrahunt sese a motibus rectilineis, non cessat rotari, nisi quâtenus ab aëre retardatur. Majora autem Planetarum et Cometarum corpora motus suos et progressivos et circulares in spatiis minus resistentibus factos conservant diutius.

LEX II.

(^t) *Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressæ, et fieri secundum lineam rectam quâ vis illa imprimitur.*

Si vis aliqua motum quemvis generet; dupla duplum, tripla triplum generabit, sive simul et semel, sive gradatim et successivè impressa fuerit. Et hic motus (quoniam in eandem semper plagam cum vi gener-

(^s) 24. Ex hac primâ lege quam (9) demonstravimus, sequitur omnem motum esse naturâ suâ æquabilem et rectilineum, adeoque nec illius velocitatem retardari, nec directionem mutari, nisi aliquod obstaculum mobili offeratur; Unde cum projectilia motum suum sensim amittant, quaerenda est aliqua hujusce retardationis causa. Cum autem corpora projecta vel per medium resistens deferantur, vel etiam super aliorum corporum superficies scabras incedant, et vi gravitatis deorsum semper urgeantur, necesse est ut eam amittant motus sui partem quam in hisce obstaculis superandis continuò absumunt, ac proinde quo major vel minor erit medii resistentia, eò majus vel minus decrementum accipiet corporis projecti velocitas. Ex his igitur patet

majora planetarum et cometarum corpora nullam sensibilem in spatiis cœlestibus experiri resistentiam, cum motus suos diutissime conservent.

(^t) 25. Si corpus vi activâ, qualis est vis gravitatis, secundum eandem aut parallelam directionem continuò urgeatur, motus illius continuò acceleratur; nam per leg. 1., manet celeritas acquisita, et per leg. 2. nova conspiranti continuò additur. Si verò aliqua vis in corpus jam motum contrariâ directione perpetuò agat, motus illius continuò retardatur, per leg. 2. Si vis conspirans continuò ac uniformiter agat, id est, si constans sit, corpus eâ vi impulsus, æqualibus temporibus æqualia accipit celeritatis incrementa, seu motu uniformiter accelerato fertur, et celeritates vi illâ acquisitæ, sunt ut tempora quibus

atrice determinatur) si corpus antea movebatur, motui ejus vel conspicianti additur, vel contrario subducitur, vel obliquo obliquè adjicitur, et cum eo secundum utriusque determinationem componitur.

(^a) LEX III.

Actioni contrariam semper et æqualem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse æquales et in partes contrarias dirigi.

Quicquid premit vel trahit alterum, tantundem ab eo premitur vel trahitur. Si quis lapidem digito premit, premitur et hujus digitus a lapide. Si equus lapidem funi alligatum trahit, retrahetur etiam et equus (ut ita dicam) æqualiter in lapidem: nam funis utrinque distentus eodem relaxandi se conatu urgebit equum versus lapidem, ac lapidem versus equum; tantumque impiediet progressum unius quantum promovet progressum alterius. Si corpus aliquod in corpus aliud impingens, motum ejus vi suâ quomodocunque mutaverit, idem quoque vicissim in motu proprio eandem

generantur. At si vis constans contrariâ directione in corpus motum continuè agat; æqualibus temporibus æqualia fient celeritatis decrementa, et corpus motu uniformiter retardato movebitur. Generaliter tandem, si corpus quiescens quâlibet vi sive constanti sive variabili continuè urgeatur, et deinde eâ celeritate quam vis illius actione continuè acquisivit, contrâ directionem vis illius reagentis projiciatur, ut vestigia sua relegat, corpus illud in itu et reditu suo eandem habebit celeritatem, ubi ad eadem viâ suâ puncta, eundo et redeundo pervenerit; adeoque motum redeundo non amittet, nisi cùm pervenerit ad punctum ex quo cœpit eundo moveri; nam eadem vis in itu et reditu corporis, æqualibus temporibus æquales celeritatis gradus generat et extinguit (8).

26. Corpora gravia in terræ viciniis, sublata mediis resistentiâ, motu uniformiter accelerato descendunt, et motu uniformiter retardato ascendant. Demonstratio Sublatâ mediis resistentiâ idem est ejusdem corporis pondus, sive eadem illius in subjectum planum pressio, tum in vertice, tum in radice montis; est autem pondus, seu vis motrix (15) ut massa in vim gravitatis acceleratricem ducta: ergo cum ejusdem corporis massa eadem in vertice et in radice montis permaneat, manebit etiam eadem vis acceleratrix gravitatis. Insuper corpora gravia in radice et vertice montis æqualia spatia æqualibus temporibus percurrunt, sublata aëris resistentiâ, ut accuratissimis notum est experimentis (15): constans est igitur vis acceleratrix, et per lineas ad horizontem perpendiculares (5) uniformiter agit; gravia ergo motu uniformiter accelerato descendunt, et uniformiter retardato ascendant (25). Q. e. d.

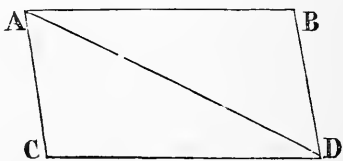
27. Sublatâ mediis resistentiâ in terræ viciniis, spatia quæ corpus è quiete cadendo percurrit, sunt ut quadrata temporum quibus percurrunt Dem. . . . Recta S K, repræsentet spatium quod grave cadendo percurrit; T C, T c, T B, exponant tempora quibus describuntur spatia S P, S p, S K; et C L, c l, B D, ad T B, normales, exhibeant celeritates temporibus T C, T c, T B, per spatia S P, S p, S K, acquisitas; quia in motu uniformiter accelerato, celeritates sunt ut tempora, (25), erit T C : T c = C L : c l; et T C : T B = C L : B D, adeoque recta, T D, transit per puncta L, et l, et triangu-
T C L, T c l, T B D, similia sunt. Jam fingamus lineam, c l, motu sibi semper parallelo ita accedere ad lineam C L, ut tandem cum ipsâ coincidat; evanescente tempusculo C c, celeritas, c l, non differet a celeritate C L, adeoque per tempusculum infinitè parvum seu evanescens C c, celeritas, C L, uniformis censeri potest. Porro spatia motu æquabili descripta sunt ut celeritas in tempus ducta (5), ergo spatium P p, quod tempusculo, C c, percurri supponimus, est ut rectangulum, $C L \times C c = C d$; quare si totum tempus, T C, in tempuscula innumera ut C c, divisum concipiatur; et similiter spatium S P, tempore T C, percursum in totidem spatiola evanescentia, singulis tempusculis correspondentibus percurra dividatur, erit summa rectangulorum C d, hoc est area trianguli T C L, ut summa spatiolorum P p, id est ut S p; et eodem modo demonstratur aream trianguli T B D, esse ut spatium S K, tempore T B, percursum. Est igitur triangulum T C L : T B D = S P : S K. Sed triangulorum similium areæ T C L, T B D, sunt ut quadrata laterum homologorum,

mutationem in partem contrariam vi alterius (ob æqualitatem pressionis mutuae) subibit. His actionibus æquales fiunt mutationes, non velocitatum, sed motuum; scilicet in corporibus non aliunde impeditis. Mutationes enim velocitatum, in contrarias itidem partes factæ, quia motus æqualiter mutantur, sunt corporibus reciproce proportionales. Obtinet etiam hæc Lex in Attractionibus, ut in Scholio proximo probabitur.

COROLLARIUM I.

Corpus viribus conjunctis diagonalem parallelogrammi eodem tempore describere, quo latera separatim.

Si corpus dato tempore, vi solâ M in loco A impressâ, ferretur uniformi cum motu ab A ad B; et vi solâ N in eodem loco impressâ, ferretur ab A ad C: compleatur parallelogrammum A B D C, et vi



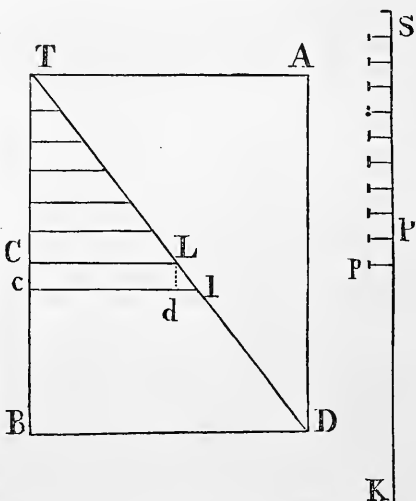
ergò S P, ad S K, ut quadratum temporis T C, ad quadratum temporis T B. Q. e. d.

28. Coroll. 1. . . . Cum velocitates acquisitæ, sint ut tempora (25) erunt etiam spatia percurra ut quadrata velocitatum, et tam velocitates quam tempora erunt inter se in ratione subduplicatâ spatiorum.

29. Coroll. 2. . . . Si grave e quiete cadens, dato tempore percurrat spatium, 1, duplo tempore percurrat spatium, 4, triplo spatium, 9, &c. hoc est, si tempora ab initio motûs computata sumantur in progressionem numerorum naturalium, 1, 2, 3, 4, 5. spatia his temporibus descripta, erunt ut termini progressionis numerorum quadratorum, 1, 4, 9, 16, 25, &c. spatia verò singulis temporibus seorsim sumptis percurra, erunt ut termini progressionis numerorum imparium, 1, 3, 5, 7, 9, &c. nam cum spatium 1^o. tempore percursum sit, 1, duplo tempore sit, 4; spatium secundo tempore seorsim sumpto descriptum, erit 4—1 seu 3, et ita de cæteris. Undè spatia motu uniformiter retardato descripta temporibus æqualibus secundum numeros impares retrogrado ordine decrescunt (25).

30. Coroll. 3. . . . Spatium S K, quod grave e quiete cadendo, tempore T B, percurrit, est subduplum spatii quod eodem tempore uniformiter percurri potest, cum velocitate B D, tempore T B, per spatium S K, acquisitâ. Nam compleatur rectangulum T B D A, et spatium quod uniformi celeritate B D, tempore T B, describitur, erit ut rectangulum T B D A (25). Cum ergò (27) spatium S K, sit ut triangulum T B D, subduplum rectanguli T B D A, erit spatium S K, dimidium spatii quod uniformi celeritate B D, tempore T B, percurritur.

31. Coroll. 4. . . . Celeritas B D, motu uniformiter accelerato acquisita, est semper (5) ut



duplum spatium percursum 2 S K, applicatum ad tempus T B, quo percurritur; seu ut 2 S K : T B. Quare si vis acceleratrix constans dicatur G; spatium percursum S; tempus quo percurritur T; erit $G T = 2 S : T$ (15) adeoque $G T^2 = 2 S$, seu vis acceleratrix constans in quadratum temporis ducta, est ut duplum spatium eodem tempore vis illius actione descriptum.

(a) 32. Hæc notissima naturæ Lex innumeris confirmata experimentis, ex ipsâ materiæ inertia clarè sequitur. Ut autem omnis tollatur

utraque feretur corpus illud eodem tempore in diagonali ab A ad D. Nam ^(b) quoniam vis N agit secundum lineam A C ipsi B D parallelam, hæc vis per Legem 11. nihil mutabit velocitatem accedendi ad lineam illam B D a vi alterâ genitam. Accedet igitur corpus eodem tempore ad lineam B D, sive vis N imprimatur, sive non; ^(c) atque ideo in fine illius temporis re-

ambiguitas, nihil aliud per hanc legem intellectum volumus, nisi æquales fieri in corpore agente et patiente status mutationes; cum enim nulla possit esse actio corporis in aliud corpus, quin mutua fiat horum corporum collisio (8), mutatio status æqualiter in utroque corpore recipi debet; unde licet actioni æqualis semper sit et contraria reactio, non idcirco tamen inter corpus agens et patiens fieri debet æquilibrium, idque Newtoniano exemplo manifestum est; si equi lapidem trahentis conatus seu vis activa major sit vi quâ lapis per gravitatem suam, plani scabritiem, medique resistentiam, equo trahenti reluctatur, equus lapidem trahet cum eâ totius suæ vis parte, quæ post superatam lapidis gravitatem, plani scabritiem, medique resistentiam, ipsi residua est; si autem totus trahentis equi conatus hisce tribus resistentiis minor sit, vel si ipsis sit æqualis, equus lapidem non movebit. Quare totus ac integer lapidis renixus qui componitur ex ipsius gravitate, plani scabritie, resistentiâ mediâ et inertia quæ lapidi etiam omnibus aliis viribus destituto inest, actioni equi lapidem trahentis est semper æqualis.

(b) 33. Quoniam vis N. agit secundum lineam A C, ipsi B D, parallelam, hæc vis, (per Leg. 2.) nihil nisi velocitatem secundum lineam ipsi B D, parallelam producet, ac proinde non mutabit velocitatem accedendi ad lineam illam B D, a vi alterâ genitam; cum corpus iners duabus hisce viribus ac directionibus simul obsequi possit, et (per leg. 1.), debeat, atque hic supponatur vires M, et N; in mobile eodem modo simul agere ac si singulæ seorsim in illud quiescens imprimerentur.

(c) 34. Idcirco cum in fine ejusdem temporis, corpus quod hic tanquam punctum consideratur, simul esse debeat in utraque lineâ C D, et B D, in utriusque lineæ concursu D reperitur, necesse est; quia autem initio et fine temporis dati corpus reperitur in rectâ A D, nempe primum in A, et deinde in D, toto tempore dato motum fuit per lineam A D, nam ex duobus punctis A, et D, datis, recta, A D, positione data est; et corpus quibuslibet viribus impulsus, cessante virium actione, movetur uniformiter in directum secundum ultimam directionem ex viribus impressis resultantem, (per Leg. 1. et 9.)

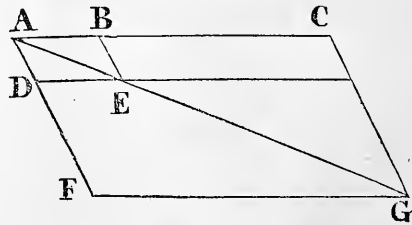
35. Motus compositus per diagonalem A D, motibus per latera A B, A C, disjunctis non est æqualis, sed tantum æquipollet. Nam cum eadem sit corporis massa, motus quantitates per diagonalem et per latera sunt ut velocitates uniformes (6) seu ut spatia A D, A B, A C, eodem tempore percurra (5); est autem summa laterum A B + A C, major diagonali A D; ergo summa quantitatum motus per latera, major est quanti-

tate motus per diagonalem. Verum quia idem est motus, sive mobile per diagonalem A D, celeritate æquabili ut A D, ex vi unicâ impressâ feratur, sive viribus conjunctis per latera A B, A C, impellatur, liquet motum per diagonalem, motibus per latera disjunctis æquivalere.

Si mobile a pluribus quàm duabus viribus in loco A, simul impressis impellatur, inveniri semper poterit unica directio et velocitas ex omnibus separatim composita ipsisque æquipollens, quæ *media directio* dicitur; duarum enim virium media directio reperitur (per coroll. 1. *Newt.*); deinde diagonalis illa tanquam spatium vi unicâ percursum consideretur, et cum spatio tertiâ vi descripto pari ratione componatur, sicque vires omnes ad unicam reducentur.

37. Motus omnis in quocumque alios laterales ipsi æquipollentes resolvi potest; nam motus per A D, æquabilis; facto triangulo quocumque A B D, resolvitur in motus per latera A B, A C. motui per diagonalem A D, æquipollentes (35). Eadem ratione motus per A B, in duos quoscumque alios, descripto circa latus A B triangulo resolvitur, idemque de motu per A C, et de aliis quibuscumque motibus dici debet.

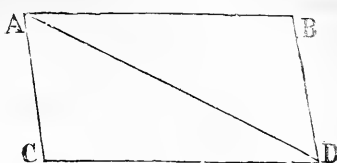
38. Si corpus aliquod A, duplici vi per A C, et per A F, ita urgeatur, ut motus in eadem ratione acceleretur vel retardetur, sive quod idem est, si spatia A B, et A D, A C, et A F, iisdem temporibus percurra, semper sint in constanti ratione, motu composito parallelogrammi diagonalem A G, describet . . .



Dem. . . . Ductis D E ad A B, et B E ad A D, parallelis, corpus conjunctis viribus motum, reperiri debet simul in utraq[ue] lineâ D E, et E B, (34) adeoque in earum intersectione E; similiter ductis F G, ad A C, et C G, ad A F, parallelis, patet corpus motu composito eodem tempore reperiri in G, quo motibus disjunctis attingeret puncta C, et F; cum igitur (ex hyp.) sit A D, ad A B, seu D E, ut A F, ad A C, seu F G, recta A E, producta transit per punctum G; ergo corpus per diagonalem rectam A G, incedet. Q. e. d.

39. Si spatia secundum unam directionem

perietur alicubi in lineâ illâ B D. Eodem argumento in fine temporis ejusdem reperietur alicubi in lineâ C D, et idcirco in utriusque lineæ concursu D reperiri necesse est. Perget autem motu rectilineo ab A ad D per Legem 1^{am}.



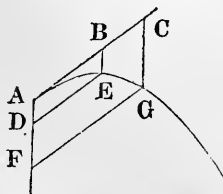
COROLLARIUM II.

Et hinc patet ^(d) compositio vis directæ A D ex viribus quibusvis obliquis A C et C D, et vicissim resolutio vis cujusvis directæ A D in obliquas quas-cunque A C et C D. Quæ quidem compositio et resolutio abundè confirmatur ex Mechanicâ.

Ut si de rotæ alicujus centro O exeuntes radii inæquales O M, O N filis M A, N P sustineant pondera A et P, et quærantur vires ponderum ad movendam rotam: Per centrum O agatur recta K O L filis perpendiculariter occurrens in K et L, centroque O et intervallorum O K, O L ma-

percursa non sint semper in eâdem ratione cum spatiis juxtâ alteram directionem iisdem temporibus descriptis, mobile per eandem diagonalem rectam progredi non potest; si autem ratio spatio- rum viribus separatis iisdem temporibus descriptorum continuò mutetur, mobile per curvam incedet, ut si motus uniformis cum motu continuò accelerato vel retardato componatur.

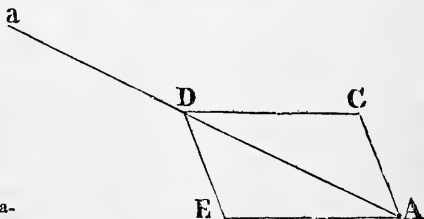
40. Corpus grave secundum quamlibet directionem A C, quæ non sit ad horizontem normalis projectum, in terræ viciniis, sublata medii resistentiâ, parabolam A E G, describit, cujus diametrum A F, est ad horizontem perpendicularis, et tangens A C, directio projectionis. . . .



Dem . . . Solâ vi projectionis impressâ, grave uniformiter movetur per rectam A C, (per leg. 1.), solâ vi gravitatis motu uniformiter accelerato per rectam A F, aut ipsi parallelam, descendit (26); quoniam verò motus per A C, æquabilis est, spatia A B, A C, sunt ut tempora quibus percurruntur (5). Spatia A D, A F, motu uniformiter accelerato iisdem temporibus descripta, sunt ut quadrata temporum quibus describuntur (27), seu ut quadrata rectorum A B, A C, aut ipsis parallelarum et æqualium D E, F G: cum igitur grave motu composito latum in fine temporum A B, A C, reperietur in punctis E, et G, (34) evidens est quadrata ordinarum

D E, F G, curvæ A E G, (39) esse inter se in ratione abscissarum A D, A F, adeoque curvam A E G, esse parabolam, (per 20^{am}, lib. 1 Conic. Apollon.) cujus diametrum A F, et tangens A C ordinatis D E, F G (32. prop. lib. 1 Conic. Apollon.) Q. e. D.

^(d) 41. Quæ de motuum compositione et resolutione dicta sunt, ad vires mortuas possunt transferri. Si corpus seu punctum D, viribus mortuis, seu, ut loquuntur Mechanici, potentiis D E, D C, juxta directiones D E, D C, agentibus trahatur vel impellatur, et completo parallelogrammo E C, ducatur diagonalis D A, vires D C, D E, vi mediæ, ut D A, juxta directionem D A, agentis æquivalent. . . .



Dem . . . vis separata D C considerari potest tanquam vis acceleratrix quæ in corpus D, juxta directionem D C, continuò et uniformiter agit, et vis illa est ut celeritas quam dato tempore generat aut generare potest (13), adeoque illa celeritas per rectam D C, exponetur, cum ea recta sit ut vis ipsa D C, (per hyp.) simili argumento liquet rectam E D, esse ut celeritatem vi agentem D E eodem tempore dato generandam. Cum igitur celeritates D E, D C, in mediam, D A, æquipollentem componantur (per Coroll. 2. Newt.) manifestum est vires quoque laterales

Libræ, vectis, et Axis in Peritrochio. Sin pondus alterutrum sit majus quàm in hac ratione, erit vis ejus ad movendam rotam tanto major.

Quòd si pondus p ponderi P æquale partim suspendatur filo Np , partim incumbat plano obliquo pG : agantur pH , NH , prior horizonti, posterior plano pG perpendicularis: et si vis ponderis p deorsum tendens, exponatur per lineam pH , resolvi potest hæc in vires pN , HN . Si filo pN perpendicularare esset planum aliquod pQ , secans planum alterum pG in linea ad horizontem parallela; et pondus p his planis pQ , pG solummodo incumberet; urgeret illud hæc plana viribus pN , HN perpendiculariter, nimirum planum pQ vi pN , et planum pG vi HN . Ideoque si tollatur planum pQ , ut pondus tendat filum; quoniam filum sustinendo pondus jam vicem præstat plani sublatis, tendetur illud eâdem vi pN , quâ planum antea urgebatur. Unde tensio fili hujus obliqui erit ad tensionem fili alterius perpendicularis PN , ut pN ad pH . ^(h) Ideoque si pondus p sit ad pondus A in ratione quæ componitur ex ratione reciproca minimarum distantiarum filorum suorum pN , AM a centro rotæ, et ratione directâ pH ad pN ; pondera idem valebunt ad rotam movendam, atque ideò se mutuò sustinebunt, ut quilibet experiri potest.

Pondus autem p , planis illis duobus obliquis incumbens, rationem habet cunei inter corporis fissi facies internas: et inde vires cunei et mallei inno-

hitur, vis tota D A , resolvi potest (41) in vires laterales et æquipollentes AC , et DC , ità ut punctum D , urgeatur simul vi ut DC , secundum directionem DC , et vi ut CA , secundum directionem rectæ OD , productæ; quia verò centrum O , rotæ fixum supponitur, vis ut A C , trahendo punctum O , juxta directionem radii OD , nullum motum creat, nihilque valet ad rotam circa centrum O , movendam; vis autem altera DC , trahendo radium DO perpendiculariter, idem valet ad rotam circa centrum O , volvendam, ac si perpendiculariter traheret alterum radium OL , ipsi OD , æqualem; vires enim æquales æqualibus radiis pariter applicatæ eodem modo rotam movere debent; si itaque pondus aliquod P , e puncto L , suspensum sit vi DC , æquale, seu, quod idem est, si pondus P , sit ad pondus A , ut recta DC , ad rectam DA , quæ exponit vim absolutam ponderis A , rota his duabus viribus A , et P , in partes contrarias æqualiter tracta non movebitur. Verùm in triangulis ADC , DOK , anguli DA C , et K DO , ob parallelas AC , DO , et præterea anguli ad K et C recti, æquales sunt, adeòque triangua illa sunt similia et DC : DA = OK : DO , seu OL ; pondera igitur A , et P , quæ sunt reciproce ut radii in directum positi OK , et OL , seu quæ sunt reciproce ut perpendiculares OK , et OL , ex centro O , in eorum directiones ductæ idem pollebunt, et sic consistent in æquilibrio.

(g) 47. Sit KL , recta inflexilis et gravitatis expers circa punctum fixum seu fulcrum O ,

volubilis, hæc vectem et libram exhibet atque etiam peritrochium circa axem volubile potest exponere, seu rotam cujus est radius longior OL , et centrum O , circa quod rota et cylindrus cujus est radius brevior OK , revolvipossunt; ex demonstratis autem (46) patet esse in his tribus machinis æquilibrio, cum potentia seu pondera A , et P , sunt inter se reciproce, ut rectæ a centro O , ad eorum directiones normaliter ductæ. Sin pondus alterutrum sit majus quàm in hac ratione, erit vis ejus ad movendam rotam tantò major; nam, manente distantia OL , vis ponderis P , ad movendam rotam, est ut pondus P absolutum, et manente pondere P , crescit vis illius ad movendam rotam in ratione distantia directionis ponderis a centro; duplicatâ enim vel triplicatâ illâ distantia, pondus idem P , est in æquilibrio cum duplo vel triplo pondere, cujus distantia directionis a centro est subdupla vel subtrippla (46). Ergò in his tribus machinis vis potentia seu ponderis ad movendam machinam circa centrum motus, est semper in ratione compositâ ponderis absoluti seu intensitatis potentia, et distantia directionis illius a centro motus. Vim autem illam ponderis aut potentia ad machinam movendam *momentum potentia* aut *ponderis* vocant Mechanici.

(h) 48. Vis quâ pondus p , tendit filum obliquum pN , dicatur π , et normalis ex centro O , in filum pN , ducta dicatur n , et erit ex demonstratis π : P , seu p = pN : pH . Præterea si vis π , in æquilibrio cum pondere A consistat, erit etiam (47) A : π = n : KO

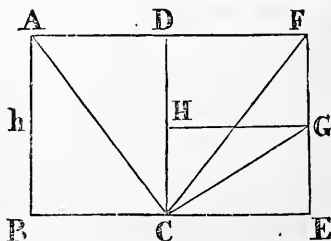
tescunt: utpote cùm vis quâ pondus p urget planum p Q , sit ad vim, quâ idem vel gravitate suâ vel ictu mallei impellitur secundum lineam p H in plana, ut p N ad p H ; atque ad vim, quâ urget planum alterum p G ; ut p N ad N H . Sed et vis Cochleæ per similem virium divisionem colligitur; quippe quæ cuneus est a vecte impulsus. (i) Usus igitur Corollarii hujus latissimè patet, et latè patendo veritatem ejus evincit; cùm pendeat ex jam dictis Mechanica tota ab Auctoribus diversimodè demonstrata. Ex hisce enim facilè derivantur vires Machinarum, quæ ex Rotis, Tympanis, Trochleis, Vectibus, nervis tensis et ponderibus directè vel obliquè ascendentibus, cæterisque potentiis Mechanicis componi solent, ut et vires Tendinum ad animalium ossa movenda.

undè per compositionem rationum erit $A \times \pi : p \times \pi = n \times p N : K O \times p H$, seu $A : p = n \times p N : K O \times p H$; et $p : A = K O \times p H : n \times p N$; ideòque si pondus p , sit ad pondus A , in ratione quæ componitur ex ratione reciproca minimarum distantiarum, n , et $K O$, filorum suorum $p N$, A M a centro rotæ, et ratione directâ $p H$, ad $p N$, erit æquilibrium.

(i) 49. Cunei et cochleæ vires totamque ferè mechanicam hisce theorematibus demonstravit Clariss. Varignonius. Quàm latè pateat eorum usus manifestum est ex præclaro opere Joannis Alphonsi Borelli de motibus animalium, et ex variis, inter quas Bernoullianæ eminent, de musculorum motu dissertationibus; sed hæc fusiùs prosequi præsentis non est instituti; in proximo scholio machinarum vires generali mechanica principio determinare satis erit; ut autem ea quæ nobis illustranda occurrent in meliori lumine collocentur, generales motuum leges, ne omissis quidem definitionibus, præmittendas esse judicavimus.

(k) 50. Corpus perfectè elasticum dicitur cujus partes ex ictu flectuntur, seu introcedunt, et deindè eadem vi quâ flexæ sunt, sese in priorem statum contrariâ directione restitunt. Corpus imperfectè elasticum est cujus partes ex ictu flexæ in priorem quidem statum redire nituntur, sed minori vi eâ quâ flexæ sunt. Corpus non elasticum vocatur cujus partes ictu percussæ nullâ vi sese restituere conantur. Corpus unum in alterum directè impingere dicitur, si secundum rectam ad contactum perpendicularem impingat; obliquè verò si secundum rectam ad contactum obliquam. Cùm corpora in se mutuò non agant, nisi per massam et velocitatem, tanquam axioma ex legibus 2â et 3â notissimum innumerisque confirmatum experimentis supponimus quantitates motûs æquales et contrarias in conflictu sibi mutuò æquipollere.

51. Si globus A , in planum immobile B E , incurrat, quæritur illius motus post impactum 1º. Globus ille in planum directè impingat per A B ; si globus et planum omni elasticitate destituantur, globi motus post impactum in B , omninò exstinguitur, cùm nulla vis globum repellat; si autem planum et globus perfectò ela-



terio donentur, globus per B A , post impactum resiliet eadem quâ advenit celeritate B A ; nam in corporibus perfectè elasticis (50) vis restitutiva æqualis est vi compressivæ, undè si imperfecta fuerit vis elastica, globus minori velocitate B h , resiliet 2º. Globus A , in planum B E , velocitate et directione A C , obliquè impingat, illius motus resolvatur in motus laterales quorum unus A D , sit plano B E , parallelus, alter autem A B , eidem plano perpendicularis (37), globus A , motu secundum A D , ad planum non accedit, sed tantum motu secundum perpendicularem A B , vel D C , velocitas globi respectu plani B E , est tantum ut perpendicularis A B ; at verò si A C , foret perpendicularis ad planum B E , velocitas quâ ad planum accederet, foret ut A C ; ergò cùm impetus ejusdem corporis in planum, sint ut velocitates quibus ad planum accedit, ictus obliquus est ad perpendicularem, ut A B , ad A C ; seu sumptâ A C , tanquam radio, ut sinus anguli incidentiæ A C B , ad sinum totum 3º. Si nulla sit in corporibus A , et B E , elasticitas, globus A , per A C , incurrens movebitur per C E , celeritate ut C E = A D ; nam motus perpendicularis A B , vel D C , ex demonstratis, exstinguitur, remanetque tantum motus C E , cui planum ut potè parallelum non opponitur; si verò perfectum fuerit elaterium, resiliet globus per C F , celeritate C F = A C , et angulus reflexionis F C E , æqualis erit angulo incidentiæ A C B ; nam per vim restitutivam elaterii resiliit per normalem C D , celeritate C D , seu B A , et præterea motu ad planum parallelo progreditur per C E , celeritate ut C E = A D , ergò motu composito (Coroll. 1.

COROLLARIUM III.

Quantitas motus quæ colligitur capiendo summam motuum factorum ad eandem partem, et differentiam factorum ad contrarias, non mutatur ab actione corporum inter se.

Etenim actio eique contraria reactio æquales sunt per Legem 111, adeoque per Legem 11 æquales in motibus efficiunt mutationes versùs contrarias partes. Ergo si motus fiunt ad eandem partem; quicquid additur motui corporis fugientis, subducetur motui corporis insequentis sic, ut summa maneat eadem quæ priùs. Sin corpora obviam eant; æqualis erit subductio de motu utriusque, ideoque differentia motuum factorum in contrarias partes manebit eadem. (k)

Newt.) percurrent diagonalem CF ; et cum in parallelogrammis DB , DE , omnia sint paria, erit $FC = AC$, et angulus FCE , $= ACB$. Tandem si corpora imperfectè fuerint elastica, manebit quidem post impactum velocitas AD , seu CE , plano parallela, sed velocitas perpendicularis CH , minor erit velocitate DC , seu AB , et completo parallelogrammo HE , globus per diagonalem CG , resiliet.

52. Si globi non elastici in se mutuò directè impingant, quæritur illorum motus post conflictum 10. Globi in eandem plagam ferantur, subsequens fugientem impellet, donec ambo simul tanquam unum corpus eadè directione ac velocitate incedant, eritque (coroll. 5. *Newt.*), summa quantitatum motùs eadem antè et post conflictum; communis ergò post conflictum velocitas invenitur, summà quantitatum motùs antè conflictum per summam massarum divisà (6) 20. Globi contrariis directionibus sibi mutuò occurrant, si æqualis in utroque fuerit motùs quantitas, post conflictum ambo quiescunt (50). Si verò inæquales sint motùs quantitates, per conflictum extinguitur in singulis quantitas motùs globi debiliùs moti (50), et ambo simul post impactum communi velocitate ac directione quasi unicum corpus progrediuntur, estque quantitas motùs in utroque simul residua, differentie quantitatum motùs antè conflictum æqualis (coroll. 5. *Newt.*) Hinc communis post conflictum velocitas habetur, si differentia illa quantitatum motùs antè conflictum ad summam massarum applicetur (6). In hoc utroque casu communis post conflictum velocitas in globi cuiusque massam ducta, est illius quantitas motùs post impactum (6), ex quà et quantitate motùs ejusdem globi ante conflictum, per subtractionem invenitur quantitas motùs in conflictu acquisita vel amissa; quia verò in omni globorum non elasticorum conflictu directo, vel motus omnis cessat, vel globi post impactum communi celeritate feruntur, manifestum est; respectivam globòrum velocitatem per conflictum extingui.

53. Globi elastici in se invicem directè incurrant, quæritur eorum motus post conflictum 10. Mutatio quæ ex mutuò corporum perfectè elasticorum conflictu in utriusque corporis motu nascitur, dupla est mutationis quam

ictus idem in iisdem corporibus omni elaterio destitutus produceret, (in corporibus imperfectè tantùm elasticis mutatio major est quàm in non elasticis, sed duplâ minor.) Nam partes in utroque corpore æquali vi ex ictu comprimuntur (Leg. 3.) Si corpora omni elaterio destituerentur post conflictum vel quiescerent, vel in eandem plagam velocitate communi progredierentur (52) nec partes flexæ restituerentur; si autem accedat vis elastica, partes flexæ sese restituent vi et directione (50) quæ semper contraria erit vi compressivæ, et in corporibus perfectè elasticis huic æqualis, in aliis minor; actio igitur corporum in se mutuò ex elaterii restitutione orta, actioni ex impactu nascenti æqualis est in corporibus perfectè elasticis, minor in aliis, ex quibus et *Lege* 2^a constat quod erat primò propositum 20. Corpora perfectè elastica eadè velocitate respectivà post conflictum recedunt, quà antè conflictum ad se invicem accedebant; in corporibus verò imperfectè tantùm elasticis, velocitas respectivà quà post ictum discedunt, est ad velocitatem quà antè ictum ad se mutuò accedebant, in ratione vis restitutivæ ad vim compressivam; nam cùm in conflictu corporum non elasticorum omnis velocitas respectivà, quà ad se mutuò accedebant, destruat ex ictu (52), sitque vis restitutiva elaterii perfecti vi compressivæ æqualis et contraria, manifestum est in corporum perfectè elasticorum conflictu, velocitatem respectivam ex solo impactu amissam, contrariâ directione restitui; in corporibus verò imperfectè elasticis eam tantùm restitui velocitatis respectivæ partem, quæ est vi restitutivæ proportionalis 30. Ut igitur corporum perfectè elasticorum motus post conflictum directum inveniat, considerentur corpora tanquam omni elaterio destituta, et in eà hypothesi quærat (52) quantitas motùs ex conflictu in unoquoque corpore acquisita vel amissa secundùm eam directionem quà corpus ante conflictum movebatur, eadem motùs quantitas duplicata, erit quantitas motùs in corpore perfectè elastico acquisita vel amissa, quæ proinde quantitati motùs corporis antè conflictum addita vel dempta, dat quantitatem motùs illius corporis post conflictum 40. Corporum imperfectè elasticorum motus post conflictum invenitur, si data sit ratio vis restitu-

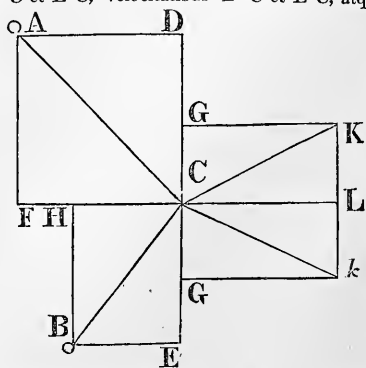
(^l) Ut si corpus sphæricum A sit triplo majus corpore sphærico B, habeatque duas velocitatis partes; et B sequatur in eâdem rectâ cum velocitatis partibus decem, ideoque motus ipsius A sit ad motum ipsius B, ut sex ad decem: ponantur motus illis esse partium sex et partium decem, et summa erit partium sexdecim. In corporum igitur concursu, si corpus A lucretur motus partes tres vel quatuor vel quinque, corpus B amittet partes totidem, adeoque perget corpus A post reflexionem cum partibus novem vel decem vel undecim, et B cum partibus septem vel sex vel quinque,

tivæ elaterii ad vim compressivam, sive, quod ex demonstratis idem est, ratio velocitatis respectivæ post impactum ad velocitatem respectivam antè impactum, quam rationem in iisdem corporibus constantem esse, experimentis probavit NEWTONUS, nisi tamen partes corporum ex congressu lædantur, vel extensionem aliqualem quasi sub malleo patiantur. Corpora omni elaterio destituta supponantur, et in eâ hypothesi quærat quantitas motus in unoquoque corpore ex ictu acquisita vel amissa, cui motus quantitati si addatur quantitas motus vi elasticæ proportionalis, summa erit vera quantitas motus ex conflictu corporum imperfectè elasticorum in unoquoque acquisita vel amissa, ex quâ datâ et ex quantitate motus corporis cujusque antè conflictum, reperitur, ut suprâ. omnis quantitas motus illius post conflictum. Exemplo lux affulgebit.

(^l) 54. Globus A, sit triplo major globo B, habeatque duos velocitatis gradus, illius motus quantitas (6) erit ut 3×2 , seu 6. B, sequatur in eâdem rectâ cum velocitatis partibus 10, eritque quantitas motus globi B, 1×10 , seu, 10, 10. Si globi elastici non sunt, velocitas communis post conflictum (52) erit 16 : 4, seu 4; quare quantitas motus ipsius A, post conflictum erit 3×4 , seu 12. B, verò quantitas motus erit 1×4 , seu 4. Itaque quantitas motus a corpore B, amissa est, 6, et corpori A, acquisita est etiam, 6 20. Si globi sunt perfectè elastici, quantitates illæ duplicari debent (55), erunt igitur 12 et 12. Si quantitati motus 6, globi A, antè conflictum jungas, 12, summa erit, 18, quantitas motus illius post conflictum; si verò ex quantitate motus, 10, ipsius B, antè conflictum subduxeris, 12, quantitatem motus per conflictum amissam, residuum est—2, quod signum—, ut notum est, contrariam positionem significat, seu corpus B, post ictum in contrariam plagam resilit cum hac motus quantitate 2 30. Si globi A et B, sint imperfectè elastici, sitque v. gr., eorum vis restitutiva subdupla vis compressivæ, erit vis compressiva ad vim restitutivam (seu 2, ad 1) ut quantitas motus, 6, ex ictu acquisita vel amissa ad quantitatem motus, 3, solâ vi restitutivâ acquisitam vel amissam; quare hæc quantitas, 3, addatur quantitati, 6, ex ictu acquisitæ in corpore A, et amissæ in corpore B, summa, 9, erit quantitas motus integra tam ex ictu quàm ex elaterio acquisita vel amissa; unde quantitas motus globi A, post conflictum est, $6 + 9$, seu, 15, globi B, $10 - 9$, seu 1, quarum summa est, 16.

(^m) 55. Cognitis quantitibus motuum quibuscumque corpora post conflictum pergent, invenietur cujusque velocitas dividendo quantitatem motus cujusque corporis per illius massam (6), aut etiam quia ejusdem corporis diversæ quantitates motus, sunt ut velocitates (6), dicendo, ut quantitas motus antè conflictum ad quantitatem motus post conflictum, ita velocitas corporis antè conflictum ad illius velocitatem post conflictum.

(ⁿ) 56. Si corpora quæcumque A et B, diversis in rectis A C, B C, moventia, incident in se mutuò obliquè in C, et requirantur eorum motus post impactum. Cognoscendus est situs plani F L, a quo corpora concurrentia tanguntur in puncto concursus C; deinde corporis utriusque motus A C, B C, (per Coroll. 2.) distinguendus est in duos A D, et A F, B E et B H, unum nempe A F seu D C, et B H seu E C, huic plano F L perpendicularem, alterum A D, B E, eidem parallelum. Quia verò corpora secundum parallelas A D, B E, ad se mutuò non accedunt, sed tantum secundum perpendiculares D C, E C, in se invicem agunt, motus paralleli A D, B E, per impactum non mutantur, adeoque retinendi sunt iidem post conflictum qui erant ante conflictum; et motibus perpendicularibus D C, E C, mutationes æquales in partes contrarias C D, C E, tribuendæ sunt sic ut summa conspirantium et differentia contrariorum maneat eadem ante et post conflictum (Coroll. 3. *Newt.*) Ut itaque corporum A et B, in se mutuò obliquè incidentium motus post ictum inveniatur, mota duntaxat supponantur per lineas D C et E C, velocitatibus D C et E C, atque



in eâ hypothesi quærantur (52, si fuerint elastici

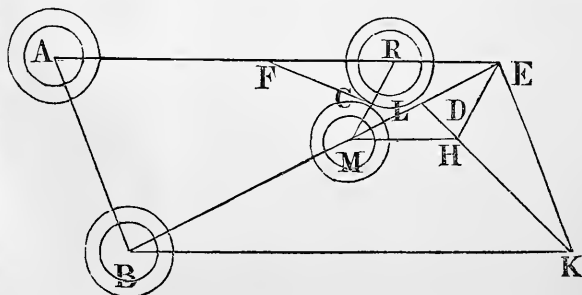
existente semper summâ partium sexdecim ut prius. Si corpus A lucretur partes novem vel decem vel undecim vel duodecim, ideoque progrediatur post concursum cum partibus quindecim vel sexdecim vel septemdecim vel octodecim, corpus B, amittendo tot partes quot A lucratur, vel cum unâ parte progrediatur amissis partibus novem, vel quiescet amisso motu suo progressivo partium decem, vel cum unâ parte regrediatur amisso motu suo et (ut ita dicam) unâ parte amplius, vel regrediatur cum partibus duabus ob detractum motum progressivum partium duodecim. Atque ita summæ motuum conspirantium $15 + 1$ vel $16 + 0$, et differentiæ contrariorum $17 - 1$ et $18 - 2$ semper erunt partium sexdecim, ut ante concursum et reflexionem. (m) Cognitis autem motibus quibuscum corpora post reflexionem pergent, invenietur cujusque velocitas, ponendo eam esse ad velocitatem ante reflexionem, ut motus post est ad motum ante. Ut in casu ultimo, ubi corporis A motus erat partium sex ante reflexionem et partium octodecim postea, et velocitas partium duarum ante reflexionem; invenietur ejus velocitas partium sex post reflexionem, dicendo, ut motus partes sex ante reflexionem ad motus partes octodecim postea, ita velocitatis partes duæ ante reflexionem ad velocitatis partes sex postea.

(n) Quod si corpora vel non Sphærica vel diversis in rectis moventia incidant in se mutuo obliquè, et requirantur eorum motus post reflexionem; cognoscendus est situs plani a quo corpora concurrentia tanguntur in punc-

ca, 53, si non fuerint elastica) eorum velocitas post conflictum in lineâ C D, vel C E, ex quâ datâ, et ex velocitate parallêlâ plano F L, etiam datâ, compositus corporis motus (per Coroll. 1. *Newt.*) facîlè reperietur. Sit exempli causâ C G, velocitas corporis A, post impactum per D E, in C; sumptâ C L, æquali et parallêlâ velocitati secundum A D, quæ eadem post conflictum remanet, compleatur parallelogrammum G L, et A movebitur per illius diagonalem C K, velocitate ut C K, (per Coroll. 1. *Newt.*) Si corpora angulosa sibi per angulos occurrant, orientur motus circulares, dum pars corporis ex vi insitâ in unam plagam movetur, altera verò ex conflictu fertur in alteram plagam circa corporis centrum.

B K E. Jungantur puncta D et K, et recta D K, ex centro E, intersecetur arcu qui describitur radio E H, summæ semidiametrorum globorum A et B, æquali. Ex puncto intersectionis H, ducatur recta H M, ipsi E A parallêla, erunt M et R, loca in quibus globorum centra constituentur, ubi secum invicem concurrent, et sumptâ lineâ R C, æquali radio globi A, recta F L, ad R C perpendicularis, in puncto C, situm plani designabit . . . Dem . . . Quoniam recta H M, est lineæ B K parallêla (per const.) erit D M : D B = M H : B K = R E : E A, ob R E = M H : et E A = B K; ergò dividendo B M : B D = A R : A E, et alternando B M : A R = B D : A E. Cum igitur sit B M

57. Datis duorum globorum A et B, directionibus, celeritatibus et diametris, unâ cum eorum situ antè conflictum, facile est determinare punctum concursus C, et situm plani F L, utrumque globum in puncto C, contingens. Globus A, feratur per lineam A E, et celeritate ut A E, globus B verò secundum directionem B E, celeritate ut B D, moveatur. Junctis A et B globorum centris per lineam A B, compleatur parallelogrammum A



to concursûs: dein corporis utriusque motus (per Corol. 11.) distinguendus est in duos, unum huic plano perpendicularem, alterum eidem parallelum: motus autem paralleli, propterea quod corpora agant in se invicem secundum lineam huic plano perpendicularem, retinendi sunt iidem post reflexionem atque antea; et motibus perpendicularibus mutationes æquales in partes contrarias tribuendæ sunt sic, ut summa conspirantium et differentia contrariorum maneat eadem quæ prius. Ex hujusmodi reflexionibus oriri etiam solent motus circulares corporum circa centra propria. Sed hos casus in sequentibus non considero, et nimis longum esset omnia huc spectantia demonstrare.

COROLLARIUM IV.

Commune gravitatis Centrum ($^{\circ}$), corporum duorum vel plurimum, ab actionibus corporum inter se non mutat statum suum vel motûs vel quietis; et propterea corporum omnium in se mutuo agentium (exclusis actionibus et impedimentis externis) commune Centrum gravitatis vel quiescit vel movetur uniformiter in directum.

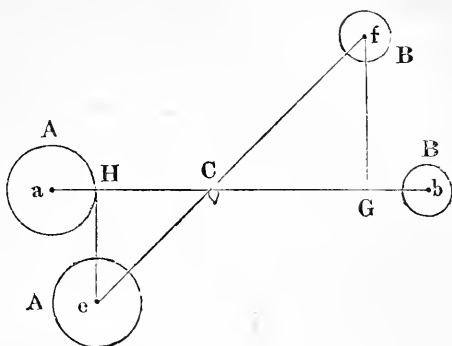
ad A R, ut celeritas globi B, ad celeritatem globi A; globus A in R, et B in M, eodem tempore pervenient (6). Cumque sit $MR = EH$, globi in puncto C, se mutuò contingent, et planum F L, ad radium R C, in puncto C, perpendiculariter ductum utrumque globum continget. Q. e. d.

($^{\circ}$) 58. Centrum gravitatis corporis cujusque, est punctum intrâ vel extrâ corpus positum, circa quod undique partes in æquilibrio consistunt, ita ut si per hoc punctum ducatur planum figuram utcumque secans, corporis segmenta quæ utrinque sunt circa planum illud librata æquiponderent; si igitur ex centro gravitatis corpus aliquod suspendatur, datum quemcumque situm retinebit, et semper quiescet, si centri gravitatis descensus impediatur; unde totam corporis gravitatem in centro gravitatis locatam fingunt Mechanici, et pro corpore gravi solum gravitatis centrum in suis demonstrationibus surrogare solent. Planum gravitatis est figura plana per centrum gravitatis transiens; Diameter verò gravitatis est recta per centrum gravitatis ducta. Quare planorum gravitatis, communis intersectio diametrum gravitatis efficit, et in diametrorum gravitatis concursu centrum gravitatis positum est. Centrum magnitudinis vocatur punctum illud, per quod divisa magnitudo relinquit duas partes utrinque æquales; ut in circulo et ellipsi, ductis utcumque per centrum lineis rectis, lineæ illæ totaque figura in partes æquales dividuntur; ac proinde si gravia homogenea, id est, quorum gravitates sunt voluminibus proportionales, secundum longitudinem in partes similes et æquales secari possint, centrum gravitatis a centro magnitudinis non differt.

59. Ex hisce definitionibus facilè colligitur, omnium circulorum, ellipsium, sphaerarum et figurarum quarumvis regularium, centrum gravitatis idem esse cum centro magnitudinis, modò tamen gravia supponantur homogenea. In figuris autem irregularibus, communi duorum gravitatis diametrorum intersectione determinari potest centrum gravitatis (58). Sic in quolibet parallelogrammo, centrum illud in duarum diagonalium concursu positum est; in triangulo reperitur in intersectione duarum rectarum quæ a duobus angulis ductæ, latera angulis illis opposita, totumque proinde triangulum bifariam, adeoque in partes æquiponderantes secant, in prismatibus et cylindris, centrum gravitatis est punctum medium rectæ basium oppositarum centra conjungentis; et generaliter in omnibus corporibus quantumvis difformibus centrum gravitatis mechanicè invenitur, si corpus ab aliquâ sui parte liberè suspendatur, et ab eadem parte a quâ pendet, demittatur perpendiculum ita ut in corpore lineam quam fecerit perpendiculi filum notetur; deinde ab aliâ parte corpus idem liberè suspendatur ut priùs, noteturque iterum lineam perpendiculi ab hac parte super corpus demissi; concursus enim duorum filorum perpendiculi (quæ sunt diametri gravitatis) erit centrum gravitatis corporis dati.

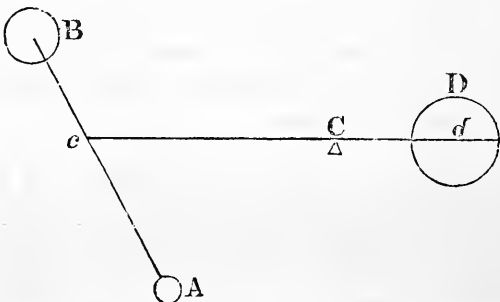
60. Centra gravitatis a et b, corporum A et B, rectâ seu vecte inflexibili et gravitatis experte, a b jungantur; et ita dividatur a b, in C, ut sit pondus A, ad pondus B, ut C b, ad C a, punctum C, erit centrum gravitatis commune duorum corporum A et B... Dem... punctum C, fixum maneat, sitque 1 $^{\circ}$. a b, horizonti parallela.

et quia $a b$ est vectis cuius fulcrum C , ponderis B momentum seu conatus ad vectem circa C movendum, erit ut $B \times C b$, et ponderis A momentum ut $A \times C a$ (47), verum (per hyp.) $A : B = C b : C a$, adeoque $A \times C a = B \times C b$; ergo momenta ponderum A et B , æqualia sunt, et proinde in æquilibrio circa punctum C , consistunt. . . . 2º. vectis, $a b$, circa punctum C fixum, rotetur, et situm $e f$, inclinatum ad horizontem $a b$, obtineat, ductis $f G$, $e H$, rectis horizonti $a b$, perpendicularibus, quæ sunt gravium directiones, ponderum A et B , momenta erunt ut $A \times C H$ et $B \times C G$, (47); sed ob triangula $H C e$, $G f C$, similia, $G C : H C = C f$, seu $C b : C e$, sive $C a = A : B$, adeoque $G C : H C = A : B$ et $A \times C H = B \times C G$; momenta igitur ponderum A et B , in situ quocumque dato æqualia sunt et semper

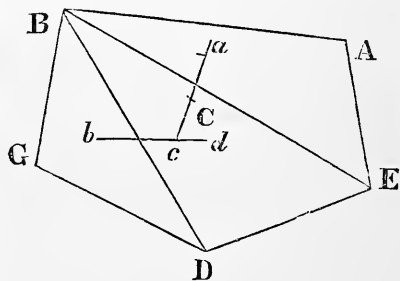


æquilibrantur. Quare (58) punctum C , est commune gravitatis centrum duorum corporum A et B . Q. e. d.

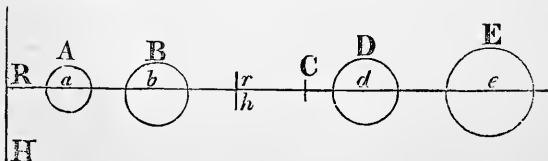
61. Coroll. 1. . . . Duorum corporum A et B , commune gravitatis centrum sit c , et tertii corporis D , centrum gravitatis proprium sit d ; jungatur recta $c d$, quæ ita dividatur in C , ut sit summa ponderum $A + B$ ad pondus D , sicut $C d$, ad $C c$, trium corporum A , B , D , centrum gravitatis commune erit in C ; nam duo corpora A et B , (58) considerari possunt tanquam in suo communi gravitatis centro c , coacta, adeoque si fuerit $A + B : D = C d : C c$, erit C , centrum gravitatis commune trium corporum A , B , D , (60). Eadem ratione quatuor, pluriumve, prout quisque voluerit, corporum commune gravitatis centrum reperietur.



62. Coroll. 2. . . Figuræ cujusvis planæ et rectilineæ centrum gravitatis hoc modo inveniri potest. Figura data, $A B G D E$ in sua triangula dividatur, duorumque triangulorum, $B G D$, $B D E$, centra gravitatis b et d , recta jungantur, et ita dividatur, $b d$, in c , ut area trianguli $B G D$, sit ad aream trianguli $B D E$, sicut $c d$, ad $b c$, eritque, c , centrum gravitatis commune duorum triangulorum $B G D$, $B D E$, (60). Centrum gravitatis, a , trianguli $B A E$, et centrum, c , figuræ $B G D E$, mox inventum jungantur recta $c a$, quæ ita dividatur in C , ut area trianguli $B A E$, sit ad aream figuræ $B G D E$, sicut $C c$, ad $C a$, et C erit centrum gravitatis totius figuræ datæ $A B G D E$, (61). Hæc omnia clarè intelliguntur, si figurarum area quævis, instar ponderis centro gravitatis appensi consideretur.



63. Sit recta $R H$, horizontalis quæ axis rotationis dicatur, et in eâ sumatur centrum rotationis R , seu punctum fixum circa quod vectis horizontalis $R e$, cum appensis ponderibus A , B , D , E , rotari possit, sintque corporum centra gravitatis propria a , b , d , e , et eorum commune gravitatis centrum C , in vecte $R e$, ad eandem axis $R H$



partem, posita; distantia $R C$, communis centri gravitatis C , a centro rotationis R , æqualis erit

cit vel progreditur uniformiter in lineâ rectâ. Hoc postea in Lemmate xxiii. ejusque Corollario demonstratur, si punctorum motus fiant in eodem plano; et ⁽⁹⁾ eâdem ratione demonstrari potest, si motus illi non fiant in eodem plano. Ergo si corpora quocunque moventur uniformiter in lineis rectis, commune centrum gravitatis duorum quorumvis vel quiescit vel progreditur uniformiter in lineâ rectâ; propterea quod linea, horum corporum centra in rectis uniformiter progredientia jungens, dividitur ab

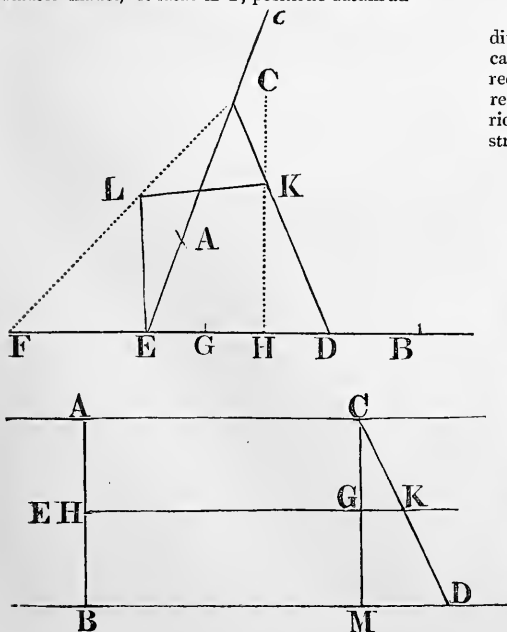
tâ velocitatum (5). In B E, capiatur B G, ad A E, in ratione datâ B D, ad A C, et cum data sit A E, dabitur quoque linea B G; sit F D, semper æqualis datæ E G, erit $E F = G D$, et quia $B G : A E = B D : A C$, (per const.) erit $B G + B D, \text{ seu } G D : A E + A C, \text{ seu } E C = B D : A C$, adeoque $A C : B D = E C : G D$, seu $E F$; est igitur E C ad E F; in ratione datâ, et propterea ex datis angulo C E F, et laterum E C, E F ratione, dabitur specie triangulum E F C, id est dantur tres anguli. Deinde secetur C F, in L, ut sit C L, ad C F, in ratione datâ C K, ad C D, id est in ratione corporis D, ad summam corporum C + D; et quia in triangulo E F C, specie dato, datur ratio laterum E F, F C, dataque est ratio C F, ad F L, dabitur quoque ratio ex his duabus composita E F, ad F L, adeoque ob angulum E F C, etiam datum dabitur specie triangulum E F L; Quare dum progrediuntur corpora C et D, punctum L, semper locabitur in rectâ E L, positione datâ, utpote quæ est basis trianguli E F L, in quo angulus F, idem constanter manet, et latus E F, positione datum ad

latus F L, datam habet rationem. Junge L K, et quia $C L : C F = C K : C D$ (per const.), similia erunt triangula C L K, C F D, et ob datam $F D = E G$, et datam rationem F D, ad L K, seu C D, ad C K; dabitur L K, magnitudine; lineæ L K, æqualis capiatur E H, et ductâ H K, erit semper E L K H, parallelogrammum, ob L K, æqualem et parallelam ipsi E H, locabitur ergo punctum K, in parallelogrammi illius latere H K, quod positione datum est; nam latus E L, positione, latus verò E H, positione et magnitudine datur. Quare punctum K, seu centrum gravitatis in lineâ rectâ positione datâ progreditur. Quoniam verò, ex demonstratis, triangula C E F, L E F, specie, et tria latera E C, E L, E F, positione data sunt, manifestum est rationem rectæ E L, seu lineæ æqualis H K, ad E C, datam esse. Verùm quia punctum C, uniformiter movetur (per hyp.) uniformiter crescit recta E C, ergo pariter recta H K, uniformiter augetur, adeoque punctum K, æquabiliter progreditur in lineâ rectâ H K, positione datâ. Q. e. 10. demonstrandum...

20. Corpora ex punctis fixis A et B, in diversas plagas progrediuntur, semperque capiatur B G, in partem oppositam directioni B D, F D, verò secundum directionem B D, cætera fiant ut in superiori constructione eadem manebit demonstratio pro 20. casu.

68. Si punctum concursus E, in infinitum abeat, parallele fient lineæ A C, B D, et ex superiori demonstratione patet centrum gravitatis K, vel quiescere vel uniformiter moveri, in lineâ H K, positione datâ, lineis A C, B D, parallelâ; si autem lineæ parallele A C et B D, ad se mutuò accedant tandemque coincident, eadem semper valet demonstratio, ac proinde si corpora in eâdem rectâ moveantur, in hac eâdem lineâ centrum gravitatis vel quiescet vel movebitur uniformiter.

(9) 69. Si rectæ A C et B D, non in uno, sed in diversis planis positæ fuerint, ex singulis eorum punctis A et B, C et D, in quibus eodem tempore reperiuntur, in planum quodvis a b d c, pro lubitu assumptum demittantur perpendiculara A a, B b, C c, D d; et ex centris gravitatis H et



experimento luculento. Motus omnes eodem modo se habent in Navi, sive ea quiescat, sive moveatur uniformiter in directum.

COROLLARIUM VI.

Si corpora moveantur quomodocunque inter se, et a viribus acceleratricibus æqualibus secundum lineas parallelas urgeantur; pergent omnia eodem modo moveri inter se, ac si viribus illis non essent incitata.

Nam vires illæ æqualiter (pro quantitativis movendorum corporum) et secundum lineas parallelas agendo, corpora omnia æqualiter (quoad velocitatem) movebunt per legem 11. ideoque nunquam mutabunt positiones et motus eorum inter se.

Scholium. (a)

Hactenus principia tradidi a Mathematicis recepta et experientiâ multiplici confirmata. Per leges duas primas et corollaria duo prima Galilæus invenit descensum gravium esse in duplicata ratione temporis, et motum

globi ad planum A C, ducatur recta D E, perpendiculari A B, parallela quæ exponat vim gravitatis acceleratricem quâ globus secundum directionem D E, horizonti perpendicularem urgetur; vis illa, D E, in duas vires resolvatur (41), quarum altera D F, sit ad planum A C, normalis quæ proindè tota plano sustinetur, altera verò D K; seu F E, plano parallela quâ solâ globus ad motum secundum directionem plani A C, sollicitatur, et erit vis acceleratrix juxtà plani inclinati directionem agens, ad vim acceleratricem perpendicularem sollicitantem, ut E F, ad D E; sed quoniam triangu-
la E F D, A B C, ob parallelas D E, A B, et angulos rectos F et B, æquales, similia sunt, est F E : D E = A B : A C. Vis igitur acceleratrix gravitatis secundum directionem plani inclinati A C, est ad vim gravitatis acceleratricem secundum directionem horizonti perpendicularem, ut plani inclinati altitudo A B, ad ipsius longitudinem A C. Q. e. d.

76. Coroll. 1. . . . Quoniam vis acceleratrix gravitatis juxtà directionem D E, horizonti perpendicularem constans est (26), et vis acceleratrix F E, secundum directionem plani inclinati A C, est ad vim D E, in ratione datâ A B, ad A C; vis acceleratrix F E, constans quoque erit; ea igitur omnia quæ de motibus vi acceleratrice constanti genitis demonstrata sunt, transferre licet ad motus vi gravitatis acceleratrice in plano inclinato productos; nempe. 10. Grave per planum inclinatam motu uniformiter accelerato descendit, et motu uniformiter retardato ascendit (25). 20. Velocitates sunt ut tempora quibus acquiruntur (25), spatia e quiete cadendo descripta sunt in ratione duplicatâ temporum quibus percurruntur, itemque velocitatum quæ his

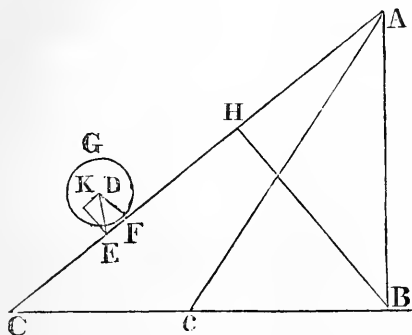
temporibus acquiruntur; tempora verò itemque velocitates sunt in ratione subduplicatâ spatiorum (27, 28). 30. Spatium a gravi in plano inclinato percursum ab initio motus computatum, dimidium est illius quod eodem tempore ab eodem mobili uniformiter percurri potest cum velocitate ultimò acquisitâ (29).

77. Coroll. 2. Quia vires acceleratrices constantes sunt inter se in ratione velocitatum, quas eodem tempore producant (13), velocitas lapsu perpendiculari per A B, acquisita erit ad velocitatem eodem tempore in plano inclinato acquisitam, ut longitudo plani, A C, ad ipsius altitudinem A B (75).

78. Coroll. 3. Si ex puncto B, perpendiculari A B, ad planum inclinatam agatur perpendicularis B H; spatium A H, in plano inclinato eodem tempore percurritur, quo lapsu perpendiculari describitur A B; nam ob similitudinem triangulorum A H B, A B C, A H : A B = A B : A C, adeoque A H, est ad A B, ut velocitas in plano inclinato acquisita ad velocitatem, eodem tempore in perpendiculo A B, acquisitam (77). Sed velocitates motu uniformiter accelerato acquisitæ, sunt ut dupla spatia, seu, quod idem est, ut spatia eodem tempore percurra (76); ergò A H, A B, sunt spatia eodem tempore percurra.

79. Coroll. 4. Tempus quo planum A C percurritur, est ad tempus quo percurritur ipsius altitudo A B, ut longitudo plani A C, ad ejus altitudinem A B; tempus enim per A C, est ad tempus per A H, in ratione subduplicatâ A C, ad A H (76). Sed ob continuam rectarum A C, A B, A H analogiam A C, est ad A B, in ratione subduplicatâ A C, ad A H; tempus igitur per A C, est ad tempus per A H,

projectilium fieri in parabola; conspirante experientia, nisi quatenus motus illi per aëris resistantiam aliquantulum retardantur. Corpore cadente gravitas uniformis, singulis temporis particulis æqualibus æqualiter agendo imprimit vires æquales in corpus illud, et velocitates æquales generat :

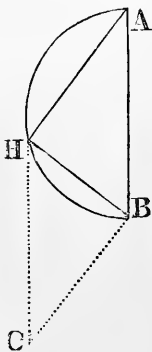


hoc est (78), ad tempus per A B, ut A C, ad A B.

80. *Coroll. 5.* Cum sit A C, ad A B, ut tempus per A C, ad tempus per A B; et A c, ad A B, ut tempus per A c, ad tempus per A B, (79), tempora quibus percurruntur diversa plana A C, A c, ejusdem altitudinis A B, sunt ut planorum longitudines.

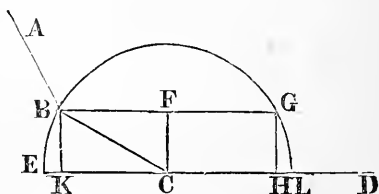
81. *Coroll. 6.* Celeritates gravium in plano quovis inclinato A C, et in perpendiculo A B, æquales sunt, ubi gravia ex eadem altitudine ad eandem rectam horizontalem C B, pervernerint, adeoque velocitates in planis inclinatibus A C, A c, ejusdem altitudinis in C et c, sunt æquales; est enim velocitas in B, ad velocitatem in H, ut A B ad A H (ea enim spatia eodem tempore descripta sunt) et ob similitudinem triangulorum A H B, A B C, sicut A C ad A B : velocitas autem in C, est ad velocitatem in H, in ratione subduplicata A C, ad A H, hoc est, ob continuam analogiam rectarum A C, A B, A H, in ratione A C, ad A B; quare velocitas in B, est ad velocitatem in H, ut velocitas in C, ad eandem velocitatem in H, adeoque velocitas in C, æqualis est velocitati in B.

82. *Coroll. 7.* Tempus descensus per chordas quaslibet A H, H B, circuli cujus diameter, A B, est ad horizontem perpendicularis, æquale est tempori descensus per totam diametrum A B; ac proinde tempora descensus per omnes chordas sunt æqualia; Cum enim angulus A H B, in semicirculo rectus sit, tempus descensus per A H, æquale est tempori descensus per A B, (78), et ducta H C, diametro A B, æquali et parallelâ junctâque C B, erit ob angulum H B C, C



rectum, tempus per H B, æquale tempori per H C, seu per A B.

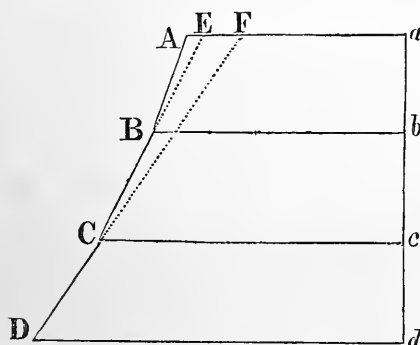
85. Si corpus in curvâ immotâ incedit, vis quâ singula curvæ puncta premit, cum vi finitâ quâ movetur corpus comparata, major non est quantitate infinitesimâ primi ordinis; vis seu celeritas quam in singulis curvæ punctis amittit, major non est quantitate infinitesimâ secundi ordinis; tandem vis seu celeritas per finitum curvæ arcum amissa major non est quantitate infinitesimâ primi ordinis, adeoque corpus in curvâ progreditur eadem celeritate finitâ ac si nihil omnino virium amitteret . . .



Dem.—Curva quælibet, ut notum est, considerari potest tanquam polygonum A B C D, ex innumeris atque infinitesimis lateribus rectis A B, B C, C D, compositum, quorum duo quævis B C, C D, angulum comprehendunt a duobus angulis rectis, nonnisi quantitate infinitesimâ deficientem, ita ut producto latere C D, in E, angulus externus B C E, sit infinitesimus. Centro C, et radio C B, describatur semicirculus E B G L, ex puncto B verò demittatur in rectam E D, perpendicularis B K, et completo rectangulo K F, motus corporis latere B C, expositus, in binos B K, B F, seu K C, resolvitur (*Coroll. 1. Newt.*) His positis manifestum est (51) vim seu celeritatem quâ corpus in latere C D, incurrit, illudque premit seu percuit, perpendiculari F C, sive B K, representari; celeritatem post ictum, (supponendo corpora esse elaterio destituta) rectâ K C, seu C H, exhiberi, et celeritatem ex impactu in C, amissam rectâ E K, exponi, cum E K, sit differentia rectarum B C, K C; hoc est, celeritatum ante et post impactum. Jam si angulus B C K, finitæ quantitatis esset, recta B K, finitam haberet ad rectas B C, K C, rationem, quæ decrecente angulo B C K, semper minuitur adeoque infinitesima evadit, dum angulus B C K est infinitesimus; est igitur B K, seu vis quâ corpus curvam premit in C, quantitas non major infinitesimâ primi ordinis; verum quia in circulo E K : B K = B K : K L, erit E K, quantitas infinitesima respectu B K, quemadmodum, ex demonstratis B K, infinitesima est respectu B C, aut K C, adeoque

et tempore toto vim totam imprimit, et velocitatem totam generat tempori proportionalem. Et spatia temporibus proportionalibus descripta, sunt ut velocitates et tempora conjunctim; id est in duplicata ratione temporum. Et corpore sursum projecto gravitas uniformis vires imprimit et velocitates

respectu K L; ergò celeritas seu vis in puncto C amissa non superat quantitatem infinitesimam secundi ordinis. Quare cum velocitas quam corpus per singula curvæ latera A B, B C, C D, amittit, non excedat quantitatem infinitesimam secundi ordinis, per latera curvæ numero infinita, hoc est, per arcum curvæ finitum, non potest celeritatem amittere majorem quantitate infinitesimâ primi ordinis quæ est summa quantitatum infinitesimarum secundi ordinis; eâ igitur quantitate neglectâ, corpus eodem modo motum suum in curvâ continuat ac si nihil virium amisisset. Q. e. d.

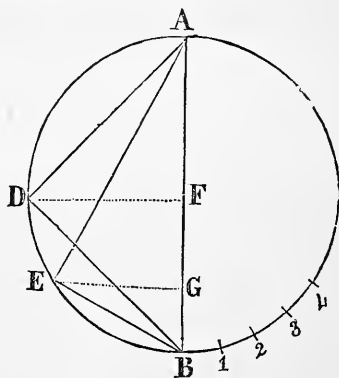
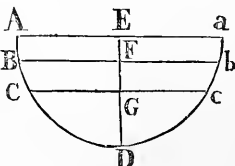


84. Si grave ex quiete in A, per plana contigua A B, B C, C D, descendat, et flexus seu anguli B, C, motui non officiant, velocitas gravis per plana inclinata descendentis, æqualis est velocitati quam lapsu perpendiculari haberet in pari ab horizonte distantia Dem.— Ductis rectis A a, B b, C c, D d, horizonti parallelis et perpendiculari, a d, demisso, producantur C B, D C, donec occurrant rectæ A a, in E et F; velocitas lapsu per A B, acquisita æqualis est velocitati quæ acquireretur lapsu per E B, aut etiam per a b, (81), adeoque cum flexus B, C, motui non officiant (per hyp.) grave motum suum per planum B C, eodem modo continuat, ac si ex puncto E, per planum unicum E C, descendisset; est igitur velocitas in C, æqualis velocitati lapsu perpendiculari per a c, acquisitæ. Similiter ostenditur velocitatem in D æqualem esse velocitati in d. Q. e. d.

85. Augeatur planorum numerus, et singulorum longitudo minuat in infinitum ut linea A B C D curva evadat, et quia anguli B, C, D, velocitati corporis non officiant (83), manifestum est, gravis per curvam descendentis velocitatem in singulis curvæ punctis B, C, D,

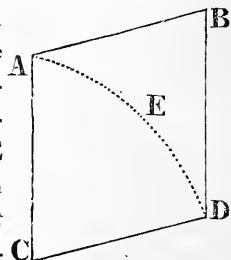
æqualem esse velocitati lapsu perpendiculari acquisitæ in punctis correspondentibus b, c, d.

86. Si grave descendat per curvam quamlibet A B C D, ductis lineis A a, B b, C c, horizonti parallelis, et ex puncto curvæ infimo D, recta DE, ad horizontem normali, patet (85) gravis per arcum A D, vel a D, descendentis eandem esse velocitatem in punctis æquè altis B et b, C et c. Quare cum ex A, pervenit ad punctum infimum D, ex impetu per lapsum acquisito ascendit per arcum D a, ad punctum a, æquè altum, in quo omnis velocitas extinguitur, et in punctis correspondentibus B et b, C et c, eandem tam in ascensu quam in descensu habet velocitatem (26). Si verò arcus D a, arcui D A, similis et æqualis fuerit, singuli arcus æquè alti C D et D c, B D et D b, A D et D a, æqualibus respectivè temporibus percurruntur (26).



87. Velocitas gravis per quemvis circuli arcum E B, descendentis in puncto infimo B, est ad velocitatem quam lapsu perpendiculari per totam diametrum A B acquireret, ut chorda E B, ad diametrum A B Dem.— Ductâ E G, horizonti parallelâ adeoque ad diametrum A B, perpendiculari, velocitas per arcum E B, acquisita, æqualis est velocitati acquisitæ per G B (85). Est ergò ad velocitatem per A B acquisitam in ratione subduplicatâ GB, ad A B (28.) Sed propter triangula rectangula similia A E B, B G E, G B : E B = E B : A B.

aufert temporibus proportionales; ac tempora ascendendi ad altitudines summas sunt ut velocitates auferendæ, et altitudines illæ sunt ut velocitates ac tempora conjunctim: seu in duplicata ratione velocitatum. Et corporis secundum rectam quamvis projecti motus a projectione oriundus cum motu a gravitate oriundo componitur. Ut si corpus A motu solo projectionis dato tempore describere posset rectam A B et motu solo cadendi eodem tempore describere posset altitudinem A C: compleatur parallelogrammum A B D C, et corpus illud motu composito reperietur in fine temporis in loco D; et curva linea A E D, quam corpus illud describet, erit parabola: quam recta A B tangit in A, et cujus ordinata B D est ut A B q. Ab iisdem legibus et corollariis pendent demonstratione de temporibus oscillantium pendulorum, suffragante horologiorum experientiâ quotidianâ: Ex his iisdem et lege tertiâ Christophorus Wrennus, Eques auratus, Johannes Wallisius, S. T. D. et Christianus Hugenius, ætatis superioris geometrarum facile principes, regulas congressuum et reflexionum durorum corporum seorsim invenerunt, et eodem fere tempore cum Societate Regiâ communicarunt, inter se (quoad has leges) omnino conspirantes: et primus quidem Wallisius, deinde Wrennus et Hugenius

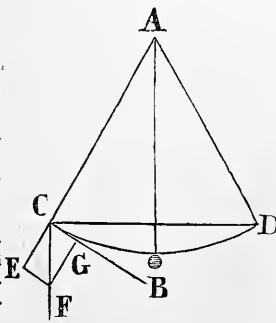


adeoque E B, ad A B, in ratione subduplicatâ G B ad A B; velocitas igitur per arcum E B, acquisita in B, est ad velocitatem per A B, acquisitam, ut chorda E B, ad diametrum A B. Q. e. d.

88. *Coroll.* Ductâ quâvis alterâ chordâ D B, erit etiam velocitas per arcum D B, acquisita in B, ad velocitatem per diametrum A B, ut D B, ad A B, ac proinde velocitates per arcus D B, E B acquisitæ in puncto infimo B, sunt inter se ut horum arcuum chordæ; undè si capiantur arcus B 1, B 2, B 3, B 4, quorum chordæ sint respectivè ut 1, 2, 3, 4, velocitas gravis per arcus illos descendentes in puncto B, erunt ut 1, 2, 3, 4.

89. Si pendulum B, circâ punctum fixum A, rotetur, et globus B, filo A B, appensus instar puncti consideretur, arcum circuli C B D, describet, idemque globus huic motus accidet ac si in superficie sphaericâ immotâ et perfectè lævigatâ sublato filo volveretur.

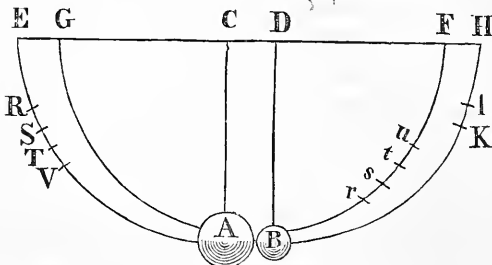
... *Dem.*—Ad punctum C, adducatur globus



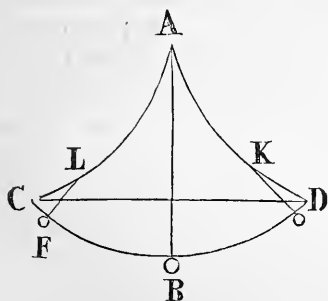
B, et exinde demittatur; et recta C E, horizontali perpendicularis vim gravitatis acceleratricem in perpendiculari exponat; ea vis resolvatur in duas vires, quarum una exhibeatur rectâ C E, ad arcum seu tangentem in C perpendiculari; altera verò tangente C G; vis C E, quâ filum A C directè trahitur, ad globi motum nihil confert et solâ vi ut C G, urgetur; arcus verò C B D, considerari potest ut polygonum cujus latus unum in C, positionem habet tangentis C G, et si globus per planum C G, vi gravitatis urgeatur, sublato filo vis C E, plano C G, tota sustinetur, et globus solâ vi C G, ad motum in plano C G, sollicitatur. Cum igitur idem in omnibus punctis arcus C B D, eodem modo demonstrari possit, patet filum A C, superficie C B D, vices subire, et in utroque casu motum globi per arcum C B D, eâdem ratione perfici. Q. e. d.

90. *Coroll.* 1. Pendulum A B, inter duas laminas curvas A L C, A K D, immotas et sese contingentes in A, ita oscilletur ut filum A B, in situ ad horizontem perpendiculari utramque laminam tangat in A; dum verò oscilletur pendulum, curvis laminis filum circumplectetur easque perpetuò tangat ut in L et K; per hanc fili ad laminas applicationem continuò impeditur motus penduli in circulo, aliamque curvam C B D, describere cogitur; et eodem quo usi fuimus ratiocinio (89), demonstratur pendulum in hac curvâ eodem modo moveri ac

nius, inventum prodiderunt. Sed et veritas comprobata est a Wrenno coram Regiâ Societate per experimentum pendulorum: quod etiam Clarissimus Mariottus libro integro exponere mox dignatus est. Verùm, ut hoc experimentum cum theoriis ad amussim congruat, habenda est ratio, cùm resistantiæ aëris tum etiam vis elasticæ concurrentium corporum. Pendeant corpora sphaerica A, B filis parallelis et æqualibus A C, B D, a centris C, D. His centris et intervallis describantur semicirculi E A F, G B H radiis



C A, D B bisecti. ^(b) Trahatur corpus A ad arcus E A F punctum quodvis R, et (subducto corpore B) demittatur inde, redeatque post unam oscillationem ad punctum V. Est R V retardatio ex resistantia aëris. Hujus R V fiat S T pars quarta sita in medio; ita scilicet ut R S et T V æquantur; sitque R S ad S T ut 3 ad 2. Et ista S T exhibebit retardationem in descensu ab S ad A quam proximè. Restituatur corpus B in locum suum. Cadat corpus A de puncto S, et velocitas ejus in loco reflexionis A sine errore sensibili tanta erit, ac si in vacuo cecidisset de loco T.



si grave B, libere et absque filo per curvam immotam et perfecte lavigatam C B D, incederet.

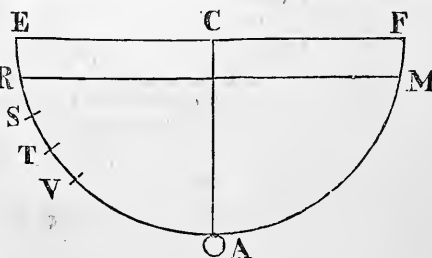
91. Coroll. 2. Quapropter omnia quæ de motu gravium in curvis superficiebus demonstrata fuere, motui penduli per easdem curvas oscillantis conveniunt. Nempe 1^o. Penduli velocitas semper æqualis est velocitati quam acquireret cadendo per altitudinem perpendicularem arcui percurso correspondentem (85). 2^o. Pendulum ex C demissum, vi gravitatis urgente ad punctum infimum B, descendet, et ex impetu concepto, per arcum B D, ascendet ad eandem altitudinem D, ibique omni velocitate amissâ, vi gravitatis impellente ad punctum infimum B, relabatur, amissamque recuperans velocitatem

redibit ad punctum C, atque ita continuas oscillationes itu et reditu in curvâ C B D, perficiet (86).

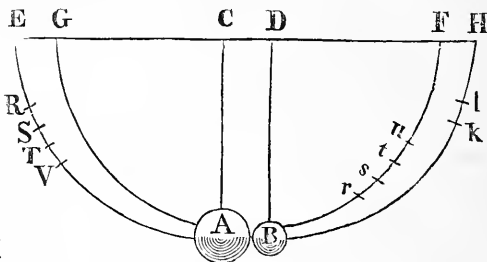
92. Coroll. 3. Si nulla foret mediæ resistantia, nullaque circâ laminas incurvatas aut centrum rotationis frictio, æquales et perpetuæ forent pendulorum oscillationes; verùm has ob causas singulis vibrationibus, licet insensibiliter, minuitur penduli velocitas, arcusque continuo breviores describit, ac tandem omnino quiescit.

93. Coroll. 4. Velocitates ejusdem penduli in circuli peripheriam excurrentis, sunt in puncto infimo ut arcuum descriptorum chordæ (88).

(b) 94. Trahatur corpus A, ad arcus E A F punctum quodvis R, et demittatur inde, sublata mediæ resistantiâ ad eandem altitudinem M, ascendere et rursus ad punctum R, redire debet (92). Cum autem post unam oscillationem ex itu et reditu compositam perveniat (ex hyp.) ad punctum V, arcus R V exponet mediæ retarda-



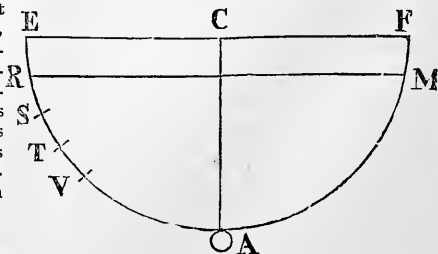
Exponatur igitur hæc velocitas per chordam arcûs T A. Nam velocitatem penduli in puncto infimo esse ut chordam arcûs, quem cadendo descripsit, propositio est geometricis notissima. Post reflexionem perveniat corpus A ad locum s, et corpus B ad locum k. Tollatur corpus B et inveniatur locus v; a quo si corpus A demittatur et post unam oscillationem redeat ad



locum r, fit s t pars quarta ipsius r v sita in medio, ita videlicet ut r s et t v æquantur; et per chordam arcûs t A exponatur velocitas, quam corpus A proxime post reflexionem habuit in loco A. (°) Nam t erit locus ille verus et correctus, ad quem corpus A, sublatâ aëris resistantiâ, ascendere debuisset. Simili methodo corrigendus erit locus k, ad quem corpus B ascendit, et inveniendus locus l, ad quem corpus illud ascendere debuisset in vacuo. Hoc pacto experiri licet omnia, perinde ac si in vacuo constituti essemus. Tandem ducendum erit corpus A (ut ita dicam) in chordam arcûs T A, quæ velocitatem ejus exhibet, ut habeatur motus ejus in loco A proximè ante reflexionem; deinde in chordam arcûs t A, ut habeatur motus ejus in loco A proxime post reflexionem. Et sic corpus B ducendum erit in chordam arcûs B l, ut habeatur motus ejus proximè post reflexionem. Et simili methodo, ubi corpora duo simul demittuntur de locis diversis, inveniendi sunt motus utriusque tam ante, quam post reflexionem; et tum demum conferendi sunt motus inter se et colligendi effectus reflexionis. Hoc modo in pendulis pedum decem rem tentando, idque in corporibus tam inæqualibus quam æqualibus, et faciendo ut corpora de intervallis amplissimis, putâ pedum octo vel duodecim vel sexdecim, concurrerent; reperi semper sine errore trium digitorum in mensuris, ubi cor-

tionem in duplici ascensu et descensu; quare ut habeatur mediæ retardatio in uno tantum descensu, sumenda est quarta pars totius retardationis, id est quarta pars arcus R V, dummodo ille descensus neque ex puncto supremo R, neque ex infimo V ordiatur: nam cum major sit mediæ retardatio in arcu majori quam in minori, semperque fiant minores arcus a pendulo oscillante descripti, inæquales quoque erunt retardationes in singulis arcibus, et retardatio descensus per R A, major erit quartâ parte totius retardationis R V ut retardatio ultimi ascensus A V, minor erit quartâ parte totius retardationis R V. Hoc autem aut simili calculo determinavit Newtonus punctum S tale ut retardatio in descensu per S A sit quarta pars totius retardationis R V. Dicatur arcus R A, l, arcus R V, 4 b, arcus quæsitus SA, x; sintque retardationes

arcibus descriptis proportionales, erit arcus S A (x) ad arcum R A (l) ut retardatio arcus S A quæ statuitur esse b, seu quarta pars totius R V, ad retardationem primæ arcus R A quæ erit



pōra sibi mutuo directè occurrebant, æquales esse mutationes motuum corporibus in partes contrarias illatæ, atque ideo actionem et reactionem semper esse æquales. Ut si corpus A incidebat in corpus B quiescens cum novem partibus motus, et amissis septem partibus pergebat post reflexionem cum duabus; corpus B resiliēbat cum partibus istis septem. Si corpora obviam ibant, A cum duodecim partibus et B cum sex, et redibat A cum duabus; redibat B cum octo, factâ detractōne partium quatuordecim utrinque. De motu ipsius A subducantur partes duodecim et restabit nihil: subducantur aliæ partes duæ, et fiet motus duarum partium in plagam contrariam: et sic de motu corporis B partium sex subducendo partes quatuordecim, fient partes octo in plagam contrariam. Quod si corpora ibant ad eandem plagam, A velocius cum partibus quatuordecim, et B tardius cum partibus quinque, et post reflexionem pergebat A cum quinque partibus; pergebat B cum quatuordecim, facta translatione partium novem de A in B. Et sic in reliquis. A congressu et collisione corporum nunquam mutabatur quantitas motus, quæ ex summâ motuum conspirantium et differentiâ contrariorum colligebatur. Nam errorem digiti unius et alterius in mensuris tribuerim difficultati peragendi singula satis accuratè. Difficile erat, tum pendula simul demittere sic, ut corpora in se mutuo impingerent in loco infimo A B; tum loca s, k notare, ad quæ corpora ascendebant post concursum. Sed et in ipsis corporibus pendulis inæqualis partium densitas, et textura aliis de causis irregularis, errores inducebant.

Porro ne quis objiciat regulam, ad quam probandam inventum est hoc experimentum, præsupponere corpora vel absolutè dura esse, vel saltem perfectè elastica, cujusmodi nulla reperiuntur in compositionibus naturalibus; (d) addo quod experimenta jam descripta succedunt in corporibus mollibus æque ac in duris, nimirum a conditione duritiei neutiquam pendencia. Nam si regula illa in corporibus non perfectè duris tentanda est,

b: x. Quærantur successivè retardationes secundi, tertii, quartæ arcus eâdem ratione; arcus autem secundus est æqualis primo R A, dempta ejus retardatione b: x. Tertius arcus æqualis secundo demptâ ejus retardatione, et sic deinceps, omnes verò illæ retardationes simul sumptæ æquabuntur toti retardationi R V seu 4 b; unde fit æquatio ex quâ valor arcus S A, seu x, obtinebitur; per approximationem autem inveniētur æqualis $1 \frac{5b}{2}$; sum-

matur itaque R S æqualis quartæ parti cum ejus semisse totius retardationis R V, retardatio per arcum S A erit æqualis S T quartæ parti totius retardationis R V, idèoque cadat corpus ex puncto S, ejus celeritas in A eadem est sine errore sensibili, ac si in vacuo decidisset ex T.

(c) 95. t, (fig. *Newt.*), erit locus verus et

correctus ad quem corpus A, sublatâ aëris resistentiâ ascendere debuisset; nam corpus A, ex t, in medio non resistente descendens, in puncto infimo A, eam haberet velocitatem quâ posset arcum A t, ascendendo describere (91), et quâ ob aëris resistentiam, nonnisi arcum A s, (94) percurreret, ergò cum post reflexionem ascendat ad s, eam habet in A velocitatem, quâ in medio non resistente ad punctum t ascenderet.

(a) 96. Experimenta jam descripta succedunt in corporibus mollibus et non elasticis æquè ac in duris et elasticis, ut potè a conditione duritiei et elasticitatis, sed tantum ab actionis et reactionis æqualitate et oppositione pendencia; nam si regula illa in corporibus non perfectè elasticis tentanda est, ut ex ipsorum motibus antè conflictum inveniātur motus post conflictum, debebit

debebit solummodo reflexio minui in certâ proportione pro quantitate vis elasticæ. In theoriâ Wrenni et Hugenii corpora absolutè dura redeunt ab invicem cum velocitate congressûs. ^(e) Certius id affirmabitur de perfectè elasticis. ^(f) In imperfectè elasticis velocitas reditûs minuenda est simul cum vi elasticâ; propterea quod vis illa, (nisi ubi partes corporum ex congressu læduntur, vel extensionem aliqualem quasi sub malleo patiuntur,) certa ac determinata sit (quantum sentio) faciatque ut corpora redeant ab invicem cum velocitate relativâ, quæ sit ad relativam velocitatem concursus in datâ ratione. Id in pilis ex lanâ arcuè conglomeratâ et fortiter constrictâ sic tentavi. Primum demittendo pendula et mensurando reflexionem, inveni quantitatem vis elasticæ; deinde per hanc vim determinavi reflexiones in aliis casibus concursuum, et respondebant experimenta. Redibant semper pilæ ab invicem cum velocitate relativâ, quæ esset ad velocitatem relativam concursus ut 5 ad 9 circiter. Eâdem fere cum velocitate redibant pilæ ex chalybe: aliæ ex subere cum paulo minore: in vitreis autem proportio erat 15 ad 16 circiter. Atque hoc pacto lex tertia quoad ictus et reflexiones per theoriam comprobata est, quæ cum experientiâ plane congruit.

In attractionibus rem sic breviter ostendo. Corporibus duobus quibusvis A, B, se mutuò trahentibus, concipe obstaculum quodvis interponi, quo congressus eorum impediatur. Si corpus alterutrum A magis trahitur versus corpus alterum B, quam illud alterum B in prius A, obstaculum magis urgebitur pressione corporis A quam pressione corporis B; proindeque non manebit in æquilibrio. Prævalebit pressio fortior, facietque ut systema corporum duorum et obstaculi moveatur in directum in partes versus B, motuque in spatiis liberis semper accelerato abeat in infinitum. Quod est absurdum et legi primæ contrarium. Nam per legem primam debebit systema perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformi-

solummodò reflexio minui in certâ proportione, pro quantitate vis elasticæ (52).

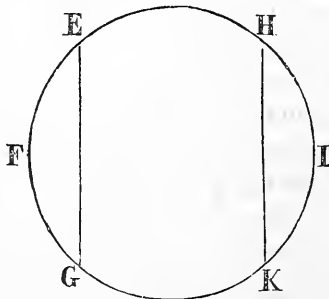
(^e) 97. Certius id affirmabitur de perfectè elasticis; corpora enim perfectè dura, seu quorum partes nullâ vi finitâ separari aut flecti possunt, nullâ quoque vi restitutivâ aut repulsivâ pollere videntur; adeoque cum nihil sine causâ fiat, corporum perfectè durorum concurrentium nulla videtur esse posse reflexio.

(^f) 98. In imperfectè elasticis, velocitas reditûs minuenda est cum vi elasticâ, propterea quod vis illa, licet imperfecta, certa tamen ac determinata est, in iisdem corporibus, nisi ubi partes corporum ex congressu læduntur, vel extensionem aliqualem quasi sub malleo patiuntur; dum enim corporis elastici fibræ ex ictu flectuntur, si aliqua abruptatur fibræ, ea non sese restituit, adeoque vis corporis restitutiva minuitur; si verò fibræ extendantur, ut ferri lamina repetitis mallei ictibus in longum diducitur, pars ictûs huic

fibrarum extensioni adhibita, vi restitutivæ detrahitur. His causis addi potest intestinus partium corporis percussi motus sono ipso satis indicatus, qui in reflexionem non impenditur. Hæc materia variis Rizzeti experimentis illustratur in Commentariis Instituti Bononiensis. Tria globulorum vitreorum paria sibi paravit Rizzetus; globuli primi parisi diametrum habebant trium unciarum, secundi duarum, tertii unius, ita ut essent diversorum parium diametri inter se, ut 3. 2. 1. Fecit ut globuli primi paris filo appensi simul congrederentur, notavitque velocitatem respectivam quam habuerunt vel ante vel post ictum, detractâ tamen, more Newtoniano, aëris resistantiâ; idemque tentavit tum in 20. tum in 30. pari. In 10. globulorum pari cum velocitas respectiva ante ictum fuisset 11, fuit post ictum 10; in 20. pari cum fuisset antè ictum 16, fuit post ictum 15; in 30. pari cum fuisset antè ictum 31, fuit post ictum 30. Unde

ter in directum, proindeque corpora æqualiter urgebunt obstaculum, et idcirco æqualiter trahentur in invicem. ^(g) Tentavi hoc in magnete et ferro. Si hæc in vasculis propriis sese contingentibus seorsim posita, in aquâ stagnante juxta fluitent; neutrum propellet alterum, sed æqualitate attractionis utrinque sustinebunt conatus in se mutuos, ac tandem in æquilibrio constituta quiescent.

Sic etiam gravitas inter terram et ejus partes mutua est. Secetur terra F I plano quovis E G in partes duas E G F et E G I: et æqualia erunt harum pondera in se mutuo. Nam si plano alio H K quod priori E G parallelum sit, pars major E G I secetur in partes duas E G K H et H K I, quarum H K I æqualis sit parti prius abscissæ E F G: manifestum est quod pars media E G K H pondere proprio in neutram partium extremarum propendebit, sed inter utramque in æquilibrio, ut ita dicam, suspendetur, et quiescet. Pars autem extrema H K I toto suo pondere incumbet in partem mediam, et urgebit illam in partem alteram extremam E G F; ideoque vis quâ partium H K I et E G K H summa E G I tendit versus partem tertiam E G F, æqualis est ponderi partis H K I, id est ponderi partis tertiæ E G F. Et propterea pondera partium duarum E G I, E G F in se mutuo sunt æqualia, uti volui ostendere. Et nisi pondera illa æqualia essent, terra tota in libero æthere fluitans ponderi majori cederet, et ab eo fugiendo abiret in infinitum.



Ut corpora in concursu et reflexione idem pollent, quorum velocita-

velocitatis respectivæ defectus erat in primo pari 1: 11. in 2^o. pari 1: 16. in 3^o. pari 1: 51; illi autem defectus sunt ferè diametris 3, 2, 1. proportionales. Aliud experimentum tentavit Rizzetus. Chordam calybeam duos pedes longam horizontaliter positam variis modis tendebat, donec tandem repererit tres chordæ tensiones, quæ efficient ut tempora quibus chorda pulsa sese restituebat, forent ut 3. 2. 1. Eas autem tensiones se assecutum esse ex graviore vel acutiori chordarum sono intelligebat; in singulis tensionibus globum eburneum cujus diameter erat duarum unciarum, filo decem pedes longo appensum et in medio tantisper complanatum in chordam demittebat, et detractâ aëris resistentiâ, velocitatem respectivam antè et post ictum notabat. Observavit autem velocitatem antè ictum esse ad velocitatem post ictum, ut 11, ad 10, in 1^a. tensione, cum chorda pulsa restitueretur tempore 3; ut 16 ad 15 in 2^a. tensione, cum chorda restitu-

eretur tempore 2; tandem ut 31, ad 30, in 3^a. tensione, cum chorda restitueretur tempore 1; undè concludit defectus singulos velocitatis post ictum, temporibus restitutionum esse proportionales. Manente igitur corporum homogeneorum magnitudine et figurâ, constans observatur ratio velocitatis respectivæ post ictum ad velocitatem respectivam antè ictum; sed mutatâ magnitudine, experimenta Rizzeti ostendunt defectus velocitatis respectivæ post ictum in globis homogeneis esse in ratione diametrorum, aut etiam in ratione temporum quibus globi compressi restituntur.

^(g) 99. Si magnes suberis frusto, similiterque ferrum alio suberis frusto imponantur, ut tam magnes quam ferrum in aquâ liberè stagnent, æquali motûs quantitate sibi mutuo obviam eunt, itâ ut eorum celeritates sint in ratione ponderum reciproca; dum verò ad contactum pervenerunt, in æquilibrio consistunt. Quare hoc experimen-

velocitates partium rotularum in quas imprimuntur, sustinebunt se mutuò.

(ⁱ) Vis cochleæ ad premendum corpus est ad vim manûs manubrium circumagentis, ut circularis velocitas manubrii eâ in parte ubi a manu urgetur, ad velocitatem progressivam cochleæ versus corpus pressum.

(^k) Vires quibus Cuneus urget partes duas ligni fissi sunt ad vim mallei in cuneum, ut progressus cunei secundum determinationem vis a malleo in ipsum impressæ, ad velocitatem quâ partes ligni cedunt cuneo, secundum lineas faciebus cunei perpendiculares. Et par est ratio machinarum omnium.

Harum efficacia et usus in eo solo consistit, ut diminuendo velocitatem augeamus vim, et contra: Unde solvitur in omni aptorum instrumentorum genere problema, *Datum pondus datâ vi movendi*, aliamve datam resistantiam vi datâ superandi. Nam si machinæ ita formentur, ut velocitates agentis et resistantis sint reciproce ut vires; agens resistantiam sustinebit: et majori cum velocitatum disparitate (¹) eandem vincet. Certè si tanta sit velocitatum disparitas, ut vincatur etiam resistantia omnis,

suam velocitatem, seu in spatium quod dato tempore secundum propriam directionem ex dispositione machinæ percurrere debet, omnium machinarum vires metiri licet.

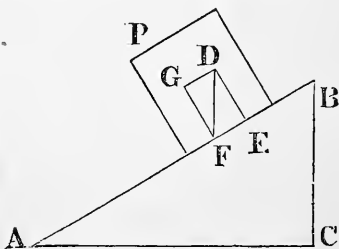
(1) 102. Vis cochleæ ad premendum corpus est ad vim manûs manubrium circumagentis, ut circularis velocitas manubrii eâ in parte ubi a manu urgetur, ad velocitatem progressivam cochleæ versus corpus pressum. Nam si resistantia corporis comprimendi ut pondus movendum consideretur, erit (101) momentum vis manubrium circumagentis, ut factum ex vi illâ in suam velocitatem, et momentum resistantiæ ut factum ex resistantiâ in suam quoque velocitatem; ut ergo sit æquilibrium, debet esse resistantia ad vim manûs, ut circularis velocitas manûs ad velocitatem resistantiæ, sive ad velocitatem progressivam cochleæ; aut quia manus describit circulum cujus radius est manubrii longitudo, e centro cochleæ usque ad manum sumpta, dum interea cochlea per altitudinem seu distantiam duarum helicum progreditur, vis cochleæ ad premendum corpus erit ad vim manûs manubrium circumagentis ut peripheria circuli prædicto radio descripti ad distantiam duarum helicum.

(^k) 103. Momentum cunei est ut factum (101), ex vi impressâ a malleo in cunei velocitatem, seu in spatium quod dato tempore percurrit cuneus secundum directionem vis a malleo impressæ; momentum verò resistantiæ ligni cuneo findendi est ut factum ex illâ resistantiâ in velocitatem, quâ partes ligni cedunt cuneo secundum lineas faciebus cunei perpendiculares, juxta quarum directionem partes ligni a cuneo moventur; est etiam momentum resistantiæ ut factum ex resistantiâ ligni in spatium quod partes ligni dato tempore describunt, secundum

lineas faciebus cunei perpendiculares. Quoniam igitur cuneus agens secundum lineam basi ipsius perpendicularem, totam suam altitudinem percurrit, dum partes ligni totâ basis cunei latitudine a se invicem remouentur, crit (in casu æquilibrii) vis cunei ad ligni resistantiam, ut cunei altitudo ad latitudinem ipsius basis.

(1) 104. Attritionem seu frictionem, aliasque resistantias ex crassitie, rigiditate et funium flexione ortas in machinis considerare necessum est, graves alioquin in praxi errores nascerentur.

Hanc difficilem materiam Sturmijus, Leibnitijs Amontonijs, Parentijs, La-Hirius et alij tractarunt. Bulfingerus Tom 2^o. Comment. Acad. Petropol. ad tentandam experimentis frictionum mensuram duo proponit theoremata quæ ob eorum facilitatem et usum hic exscribere non abs re erit.



Suprà horizontem AC, experimento sæpius instituto, elevetur planum AB, ad angulum BAC, ita ut si corpus plano AB, ad hunc angulum elevato imponatur, tantum non descendat; descendat autem si angulus nonnihil

quæ tam ex contiguorum et inter se labentium corporum attritione, quam ex continuorum et ab invicem separandorum cohæsione et elevandorum ponderibus oriri solet; superatâ omni eâ resistantiâ, vis redundans accelerationem motus sibi proportionalem, partim in partibus machinæ, partim in corpore resistente producet. Cæterum mechanicam tractare non est hujus instituti. Hisce volui tantum ostendere, quàm latè pateat quàmque certa sit lex tertia motûs. Nam si æstimetur agentis actio ex ejus vi et velocitate conjunctim; et similiter resistentis reactio æstimetur conjunctim ex ejus partium singularum velocitatibus et viribus resistendi ab earum attritione, cohæsione, pondere, et acceleratione oriundis; erunt actio et reactio, in omni instrumentorum usu, sibi invicem semper æquales. Et quatenus actio propagatur per instrumentum, et ultimò imprimitur in corpus omne resistens, ejus ultima determinatio determinationi reactionis semper erit contraria.

augeatur: et hæreat cum aliquâ adversus descensum renitentiâ, si angulus minuatur. Hic angulus dicitur angulus quietis, eoque invento sic inferatur.

Uti sinus totus ad sinum rectum anguli quietis, ita pondus absolutum P, ad frictionem ejus super plano ad prædictum angulum inclinato. Atque iterum.

Uti Radius ad tangentem anguli quietis, ita pondus absolutum P, ad frictionem ejus super plano horizontali, cum trahitur in directione ad horizontem parallelâ *Dem.*—Linea D F, horizonti perpendicularis, pondus absolutum P, seu vim totam quâ corpus in perpendiculo descendere nititur, exponat; et ductâ D E, ad planum A B, normali; vis D F, in binas vires nempè D E, plano perpendicularem, et E F, seu D G, plano parallelam resolvitur (41); vis D E, a plano A B, etiam perfectè lævigato tota sustinetur, et solâ vi D G, seu E F, pondus P, nititur juxta plani directionem descendere; Cum igitur ob frictionem in plano aspero A B, tantum non descendat, erit frictio æqualis vi E F; est itaque pondus absolutum P, ad frictionem ejus super plano inclinato A B, ut D F, ad F E, hoc est, ob angulum E rectum et angulum F D E æqualem angulo quietis B A C, ut sinus totus ad sinum anguli quietis. Q. erat 1^{um}.

Jam ut idem transferatur ad planum horizontale, debet vis D E, plano perpendicularis, considerari ut pondus absolutum, et ita planum A B, se habebit ut planum horizontale respectu ponderis D E; vis autem F E, seu frictio consideranda est tanquam vis in æquilibrio constituta cum vi æquali trahente pondus D E, secundum directionem plano A B, parallelam; et ob triangulorum F D E, B A C, similitudinem, manifestum est pondus D E, esse ad frictionem E F, seu pondus absolutum in plano horizontali horizontaliter tractum, esse ad frictionem ejus, ut Radius ad tangentem anguli quietis. Q. erat 2^{um}.

105. *Coroll.* In his duobus casibus, frictiones, cæteris omnibus paribus, sunt pressionibus proportionales; nam frictio in plano inclinato dicitur f; in plano horizontali F, et erit per 1^{um} theor. $P : f = A B : B C$; et per 2^{um} theorema $P : F = A C : B C$, seu $F : P = B C : A C$, adeoque per compositionem rationum $P : F : P : f = A B \times B C : B C \times A C$, ac proinde $F : f = A B : A C = F D : D E$; hoc est, frictio in plano horizontali est ad frictionem in plano ad angulum quietis inclinato, ut pressio in plano horizontali ad pressionem in plano inclinato.

DE

MOTU CORPORUM

LIBER PRIMUS.

SECTIO I.

De methodo rationum primarum et ultimarum, cujus ope sequentia demonstrantur.

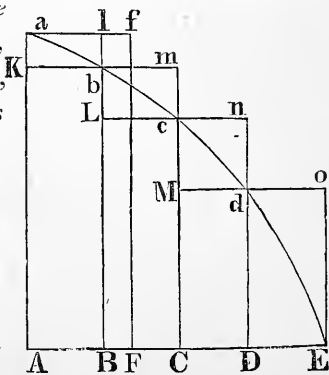
LEMMA I.

Quantitates, ut et quantitatum rationes, quæ ad æqualitatem tempore quorvis finito constanter tendunt, et ante finem temporis illius propius ad invicem accedunt quàm pro datâ quavis differentiâ, fiunt ultimò æquales.

SI negas; fiant ultimò inæquales, et sit earum ultima differentia D. Ergo nequeunt propius ad æqualitatem accedere quàm pro datâ differentiâ D: contra hypothesin.

LEMMA II.

Si in figurâ quâvis A a c E, rectis A a, A E et curvâ a c E comprehensâ, inscribantur parallelogramma quotcunque A b, B c, C d, &c. sub basibus A B, B C, C D, &c. æqualibus, et lateribus B b, C c, D d, &c. figuræ lateri A a parallelis contenta; et compleantur parallelogramma a K b l, b L c m, c M d n, &c. Dein horum parallelogrammorum latitudo minuatur et numerus augeatur in infinitum: dico quod ultimæ rationes quas habent ad se invicem figura inscripta A K b L c M d D, circumscripta A a l b m c n d o E, et curvilinea A a b c d E, sunt rationes æqualitatis.



Nam figuræ inscriptæ et circumscriptæ differentia est summa parallelogrammorum $K l$, $L m$, $M n$, $D o$, hoc est (ob æquales omnium bases) rectangulum sub unius basi $K b$ et altitudinum (m) summa $A a$, id est, rectangulum $A B l a$. Sed hoc rectangulum, eo quod latitudo ejus $A B$ in infinitum minuitur, fit minus quovis dato. Ergo (per Lemma I.) figura inscripta et circumscripta, et multo magis figura curvilinea intermedia, fiunt ultimò æquales. Q. e. d.

LEMMA III.

Æadem rationes ultimæ sunt etiam rationes æqualitatis, ubi parallelogrammorum latitudines $A B$, $B C$, $C D$, &c. sunt inæquales, et omnes minuantur in infinitum.

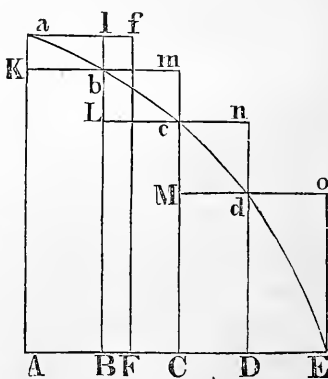
Sit enim $A F$ æqualis latitudini maximæ, et compleatur parallelogrammum $F A a f$. (n) Hoc erit majus quàm differentia figuræ inscriptæ et figuræ circumscriptæ; at latitudine suâ $A F$ in infinitum diminutâ, minus fiet dato quovis rectangulo. Q. e. d.

Corol. 1. Hinc summa ultima parallelogrammorum evanescentium coincidit omni ex parte cum figurâ curvilineâ.

Corol. 2. Et multo magis figura rectilinea, quæ chordis evanescentium arcuum $a b$, $b c$, $c d$, &c. comprehenditur, coincidit ultimo cum figurâ curvilineâ.

Corol. 3. Ut et figura rectilinea circumscripta quæ tangentibus eorundem arcuum comprehenditur.

Corol. 4. (o) Et propterea hæ figuræ ultimæ (quoad perimetros $a c E$,) non sunt rectilineæ sed rectilinearum limites curvilinei.



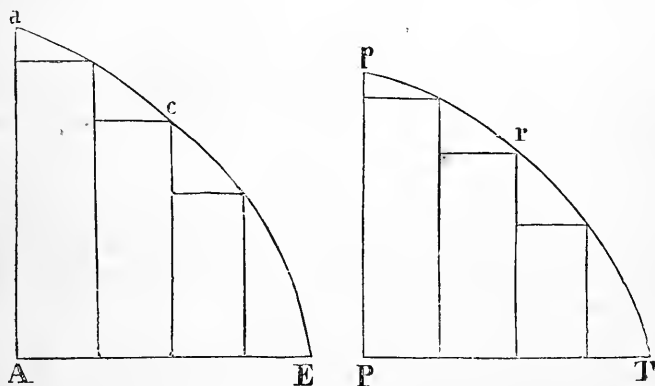
(m) 106. Si fuerint quocumque et cujusvis generis quantitates decrescentes, $A a$, $B b$, $C c$, $D d$, erunt omnium differentiæ simul sumptæ æquales excessui maximæ suprâ minimam. Nam perspicuum est $A a - B b + B b - C c + C c - D d = A a - D d$: unde si ultima seriei quantitas sit o . ut in serie $A a$, $B b$, $C c$, $D d$, o , summa differentiarum $K a + L b + M c + D d$, æqualis erit quantitati maximæ $A a$.

107. Linea $B b$, motu sibi semper parallelo accedat ad lineam $A a$, et interim punctum b , ita moveatur in linea $B b$, ut semper reperitur in arcu $b a$; decrescente linearum $A a$, $B b$, distantia $A B$, decrescit quoque earum differentia $K a$, ac tandem evanescente $A B$, evanescit $K a$, et $B b$, seu $A K$, fit ultimò æqualis lineæ

$A a$; evanescent autem $A B$ et $K a$, cum lineæ $A a$, $B b$, neque distantes, neque prorsus congruentes dici possunt, sed simul, ut ita dicam, conjungi incipiunt. In illo statu evanescentiæ, linearum $A a$, $B b$, differentia $K a$, minor est quâvis lineâ datâ, seu infinitè parva est, aut inassignabilis respectu $A K$ et $B b$; quantitas autem evanescens, seu infinitè parva, est ad quantitatem finitam ut finitum ad infinitum; quare cum notum sit infinitum ex finiti additione vel subtractione non mutari, aut tanquam immutatum haberi posse, liquet lineas $B b$ seu $A K$ et $A a$, seu $A K + K a$, pro æqualibus posse usurpari. Similiter, quia evanescente $K a$, trianguli $K a b$, et parallelogrammi $K l$, areæ infinitesimæ sunt respectu parallelogrammi evanescentis $A b$, parallelogrammum istud $A b$.

LEMMA IV.

Si in duabus figuris A a c E, P p r T, inscribantur (ut infra) duæ parallelogrammorum series, sitque idem amborum numerus, et ubi latitudines in infinitum diminuuntur, rationes ultimæ parallelogrammorum in unâ figurâ ad parallelogramma in alterâ, singulorum ad singula, sint eædem; dico quod figuræ duæ A a c E, P p r T, sunt ad invicem in eâdem illâ ratione.



Etenim ut sunt parallelogramma singula ad singula, ita (componendo) fit summa omnium ad summam omnium, et ita figura ad figuram; existente nimirum figurâ priore (per Lemma III.) ad summam priorem, et figurâ posteriore ad summam posteriorem in ratione æqualitatis. Q. e. d.

Corol. Hinc si duæ cujuscunque generis quantitates in eundem partium numerum utcunque dividantur; et partes illæ, ubi numerus earum augetur et magnitudo diminuitur in infinitum, datam obtineant rationem ad invicem, prima ad primam, secunda ad secundam, cæteræque suo ordine ad cæteras: erunt tota ad invicem in eâdem illâ datâ ratione. Nam si in Lemmatis hujus figuris sumantur parallelogramma inter se ut

usurpari potest pro parallelogrammo A l, aut etiam pro figurâ A B b a, hoc est, pro differentia arearum curvilinearum A E c a, B E c b.

108. Ex his sequitur diversos esse infinitesimorum ordines; nam ostensum est (107) parallelogrammum K l, infinitesimum esse respectu parallelogrammi A b, hoc verò parallelogrammum infinitesimum esse respectu areæ curvilinæ A E c a.

109. Figura A E c a, circa axem suum A E, revolvatur, et quælibet ordinata A a, B b, describet circum, cujus est, ordinata ipsa radius, quodlibet rectangulum evanescens ut K B, a B, describet cylindrum evanescentem, et rectangula, K l, L m, M n, D o, singula descriptent annulos solidos, quorum summa æqualis erit cylindro ex rotatione rectanguli A l descripto. Quare cum

hic cylindrus sit infinitesimus, patet (per Lemma I.) ultimam rationem solidi ex cylindris omnibus compositi ad solidum ex rotatione figuræ curvilinæ A E c a, genitum esse rationem æqualitatis.

(^o) 110. Nam si singulorum parallelogrammorum latitudo æqualis esset lineæ A F, figuræ inscriptæ et figuræ circumscriptæ differentia foret parallelogrammum A f, (Lem. 11.); cùm igitur singulorum parallelogrammorum latitudo minor sit latitudine A F, (ex hyp.) prædicta figurarum differentia minor quoque est parallelogrammo A f.

(^o) 111. Propterea hæ figuræ ultimæ (quoad perimetros a c E) non sunt rectilinæ, seu non sunt ex lateribus rectis quocumque numero finito compositæ, sed sunt figurarum rectilinearum

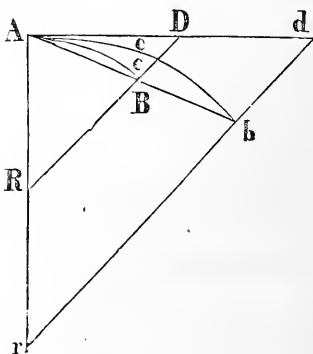
partes, summæ partium semper erunt ut summæ parallelogrammorum; atque ideo, ubi partium et parallelogrammorum numerus augetur et magnitudo diminuitur in infinitum, in ultimâ ratione parallelogrammi ad parallelogrammum, id est (per hypothesin) in ultimâ ratione partis ad partem.

LEMMA V.

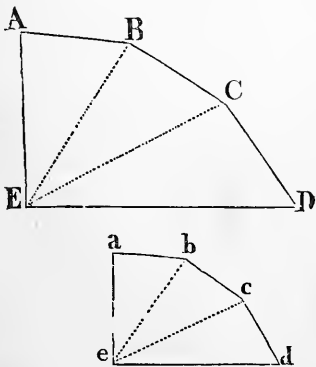
Similium figurarum latera omnia, quæ sibi mutuo respondent, sunt proportionalia, tam curvilinea quam rectilinea; et areæ sunt in duplicata ratione laterum. (P)

LEMMA VI.

Si arcus quilibet positione datus $A C B$ subtendatur chordâ $A B$, et in puncto aliquo A , in medio curvaturæ $(^q)$ continuæ, tangatur a rectâ utrinque productû $A D$; dein puncta A, B ad invicem accedant et coëant; dico quod angulus $B A D$, sub chordâ et tangente contentus, minuetur in infinitum et ultimò evanescet.



quarum latera numero augentur et longitudine minuuntur in infinitum, limites curvilinei. Dum enim ordinatarum $A a, B b, ac$ proinde chordarum $a b, b c$, numerus in infinitum augetur, et distantie $A B, B C$, in infinitum minuuntur, puncta a, b, K, l , et b, c, L, m , &c. coëunt et curvam $a c E$ formant.



mutuò respondentia, ut $A B, a b, B C, b c$, proportionalia sunt, et angulos æquales, ut $A B C, a b c$, continent; undè jam patet summam laterum utriusque figuræ esse inter se ut duo quævis latera correspondentia $A B, a b$. Ductis ex $E, et e$, ad omnes angulos lineis $E B, E C, e b, e c$, figuræ in sua triangula dividantur; et quoniam anguli $D et d$, æquales sunt, lateraque $E D, e d, D c, d c$, proportionalia, (*per definit.*), duo triangula $E C D, e c d$, erunt similia, adeoque anguli $E C D, e c d$, æquales, et latera $E C, e c$, lateribus $C D, c d$ proportionalia; quare cum anguli $B C D, b c d$ sint etiam æquales (*per definit.*) æquantur quoque anguli, $E C B, e c b$, et quia $B C : b c = C D : c d = E C : e c$, triangula duo $E B C, e b c$ similia erunt. Idem eadem ratione de aliis triangulis $E B A, e b a$ demonstratur. Verùm areæ singulorum triangulorum similium, quæ in duabus figuris sibi mutuò respondent, sunt inter se in duplicatâ ratione laterum homologorum, ac proinde in datâ ratione; ergò summæ triangulorum, in utrâque figurâ, hoc est, figurarum areæ rationem habent laterum homologorum duplicatam. Jam numerus laterum $A B, B C$, &c. $a b, b c$, &c. augeatur, et eorum longitudo minuatur in infinitum, et (*per Cor. 4. Lem. III.*) figuræ $A B C D, a b c d$ fiunt curvilineæ; similium igitur figurarum latera omnia, quæ sibi mutuò respondent, sunt proportionalia tam curvilinea

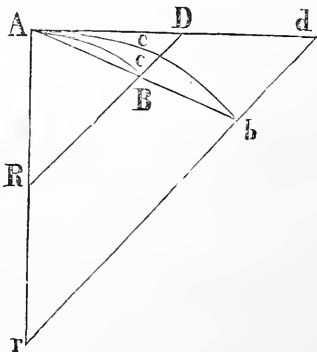
(P) 112. *Demonstr.*—Dux figuræ, $A D E, d e$, similes dicuntur, quarum latera omnia sibi

Nam si angulus ille non evanescit, continebit arcus $A C B$ cum tangente $A D$ angulum rectilineo æqualem, et propterea curvatura ad punctum A non erit continua, contra hypothesin.

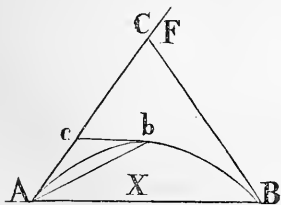
LEMMA VII.

Isdem positis; dico quod ultima ratio arcûs, chordæ, et tangentis ad invicem est ratio æqualitatis.

Nam dum punctum B ad punctum A accedit, intelligantur semper $A B$ et $A D$ ad puncta longinqua b ac d produci, et $(^r)$ secanti $B D$ parallela agatur $b d$. Sitque arcus $A c b$ semper similis arcui $A C B$. Et punctis A, B cœuntibus, angulus $d A b$, per Lemma superius, evanescet; ideoque rectæ semper finitæ $A b, A d$, et arcus intermedius $A c b$ coincident, et propterea æquales erunt. Unde et hisce semper proportionales rectæ $A B, A D$, et arcus intermedius $A C B$ evanescunt, et rationem ultimam habebunt æqualitatis. Q. e. d.



quam rectilinea, et areæ sunt in duplicatâ laterum. Q. e. d.

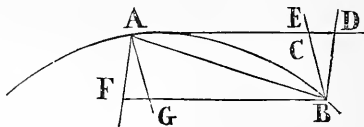


(9) 115. Curva continua $B A$, considerari potest tanquam descripta motu puncti B continuò mutantis directionem suam quâ per rectam tangentem $B C$, progredi nititur. Unde si arcus $A B$, fit ubique versus eandem partem X , cavus, semperque ducantur tangentæ $A F, B C$, sese intersecantes in C , accedente puncto B , ad A , anguli $B C F, B A C, C B A$, quos tangentæ et chordæ complectuntur, continuò, non verò per saltum, decrescunt, et evanescente chordâ $A b$, evanescunt, atque nulli fiunt, dum punctum b , idem omnino est cum puncto A . Necesse igitur est ob continuitatem decrementorum, ut angulus $C A b$, per omnes magnitudi-

nis gradus inter angulum $C A B$, et o , seu nihilum medius transeat priusquam nullus omnino sit; quod generatim statuendum est de omnibus quantitatibus, quæ nascuntur et continuò crescunt, vel quæ continuò decrescunt et tandem evanescunt; non possunt enim continuò crescere vel decrescere, nec ab uno extremo ad alterum pervenire, quin per omnes gradus magnitudinis inter duo extrema medios transeant. Itaque inter tangentem $A F$, et chordam infinitesimam $A b$, nulla duci potest linea recta, quæ angulum finitum cum chordâ vel tangente efficiat; ideoque inter arcum $A B$, et tangentem $A F$, nulla duci potest linea recta quæ arcum non secet.

(^r) 114. Secans $R D$, supponitur semper efficere cum tangente $A D$ et chordâ $A B$, angulos finitos, aut angulos ad quos angulus evanescens $B A D$, rationem habet infinitesimam; nam si anguli $A B D, B A D$, essent ejusdem ordinis infinitesimi, trianguli $A B D$ latera finitam haberent inter se rationem. Angulus enim externus $B D d$, æqualis duobus internis oppositis $D A B, D B A$, esset ejusdem ordinis cum illis angulis; et quoniam in omni triangulo latera sunt ut sinus angulorum oppositorum, latera $A B, B D, A D$, finitam rationem haberent sinuum angulorum ejusdem ordinis $B D d, D A B, A B D$; cum autem anguli A et B , supponuntur infinitesimi, angulus $A D B$, est obtusus, adeoque chorda

Corol. 1. Undè si per B ducatur tangenti parallela B F, rectam quamvis A F per A transeuntem perpetuo secans in F, hæc B F ultimo ad arcum evanescentem A C B rationem habebit æqualitatis, eo quod completo parallelogrammo A F B D rationem semper habet æqualitatis ad A D.



Corol. 2. Et si per B et A ducantur plures rectæ B E, B D, A F, A G, secantes tangentem A D et ipsius parallelam B F; ratio ultima abscissarum omnium A D, A E, B F, B G, chordæque et arcus A B ad invicem erit ratio æqualitatis.

Corol. 3. Et propterea hæ omnes lineæ, in omni de rationibus ultimis argumentatione, pro se invicem usurpari possunt.

LEMMA VIII.

Si rectæ datæ A R, B R cum arcu A C B, chordâ A B et tangente A D, triângula tria R A B, R A C B, R A D constituunt, dein puncta A, B accedunt ad invicem: dico quod ultima forma triangulorum evanescentium est similitudinis, et ultima ratio æqualitatis.

Nam dum punctum B ad punctum A accedit, intelligantur semper A B, A D, A R ad puncta longinqua b, d et r produci, ipsique R D parallela agi r b d, et arcui A C B similis semper sit arcus A c b. Et coëuntibus punctis A, B, angulus b A d evanescet, et propterea triângula tria semper finita r A b, r A c b, r A d coincident, suntque eo nomine similia et æqualia. Unde et hisce semper similia et proportionalia R A B, R A C B, R A D fient ultimo sibi invicem similia et æqualia. Q. e. d.

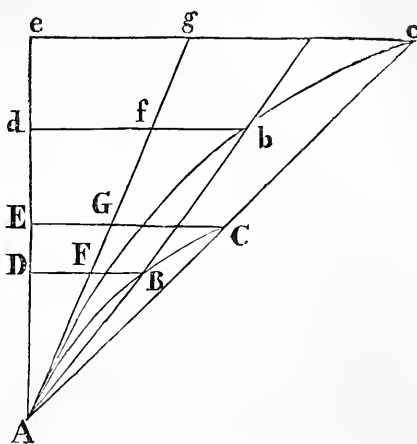
Corol. Et hinc triângula illa, in omni de rationibus ultimis argumentatione, pro se invicem usurpari possunt.

LEMMA IX.

Si recta A E et curva A B C positione datæ se mutuo secant in angulo dato A, et ad rectam illam in alio dato angulo ordinatim applicentur B D, C E, curvæ occurrentes in B, C, dein puncta B, C, simul accedant ad punctum A: dico quod areæ triangulorum A B D, A C E erunt ultimo ad invicem in duplicatâ ratione laterum.

Etenim dum puncta B, C accedunt ad punctum A, intelligatur semper A D produci ad puncta longinqua d et e, ut sint A d, A e ipsis A D,

A E proportionales, et erigantur ordinatæ d b, e c ordinatis D B, E C parallelæ quæ occurrant ipsis A B, A C productis in b et c. Duci intelligatur, tum curva A b c ipsi A B C similis, tum recta A g, quæ tangat curvam utramque in A, et secet ordinatim applicatas D B, E C, d b, e c in F, G, f, g. (^s) Tum manente longitudine A e coeant puncta B, C cum puncto A; et angulo c A g evanescente, coincident areæ curvilineæ A b d, A c e cum rectilineis A f d, A g e; ideo-



que (per Lemma V.) erunt in duplicata ratione laterum A d, A e: Sed his areis proportionales semper sunt areæ A B D, A C E, et his lateribus latera A D, A E. Ergo et areæ A B D, A C E sunt ultimo in duplicatâ ratione laterum A D, A E. Q. e. d.

LEMMA X.

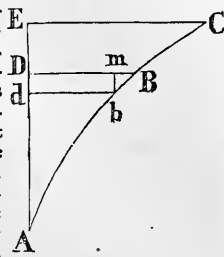
Spatia quæ corpus urgente quâcunque vi finitâ describit, sive vis illa determinata et immutabilis sit, sive eadem continuò augeatur vel continuò diminuat, sunt ipso motûs initio in duplicatâ ratione temporum.

Exponantur tempora per lineas A D, A E, et velocitates genitæ per ordinatas D B, E C; (^t) et spatia his velocitatibus descripta, erunt ut areæ A B D, A C E his ordinatis descriptis, hoc est ipso motûs initio (per Lemma IX.) in duplicatâ ratione temporum A D, A E. Q. e. d.

A B, majori angulo opposita, ad tangentem A D, datam habebit majoris inæqualitatis rationem.

(^s) 115. Tum manente longitudine finitâ A e, et mutatâ, si necessum fuerit, longitudine A d, ut sit semper A d : A e = A D : A E, coeant puncta B, C, cum puncto A, &c.

(^t) 116. Spatia his velocitatibus descripta erunt ut areæ A B D, A C E, his ordinatis descriptæ. Nam ductâ d b, ipsi D B, infinitè propinqua, ita ut D d, sit infinitesima seu evanescent respectu A D, A E, lineæ D B, d b, et rectangulum d m, ac figura D d b B, pro æqualibus respectivè usurpari possunt (107), adeò ut per tempusculum infinite-



simum, D d, velocitas D B, tanquam uniformis haberi possit; spatium autem æquabili velocitate d b, percursum, est ut factum ex velocitate d b, et tempusculo D d, (⁵) hoc est, ut rectangulum D d \times d b, seu ut area D B b d; si igitur areæ A C E, A D B, in infinita numero atque infinitesima rectangula, ut d m, divisæ concipiantur, erunt summæ spatorum percursorum, seu spatia temporibus A E, A D, percursa, ut summæ horum rectangulorum, hoc est, ut areæ ipsæ A C E, A B D, (Lem. III.)

117. Cor. Vis acceleratrix finita, utcumque variabilis, ipso motûs initio considerari potest, tanquam vis determinata et immutabilis. Spatia enim, quæ corpus urgente vi acceleratrice constante describit, sunt semper in duplicatâ temporum ratione (27); et contra, si spatia percursa duplicatam habeant temporum rationem, vis acceleratrix constans est; nam si mutabilis esset vis, illa quoque temporum et spatorum proportio mutaretur. Ergò (Lem. X.) vis quælibet acceleratrix finita, utcumque variabilis, ipso

Corol. 1. (u) Et hinc facile colligitur, quod corporum similes similium figurarum partes temporibus proportionalibus describentium errores, qui viribus quibusvis æqualibus ad corpora similiter applicatis generantur, et mensurantur, per distantias corporum a figurarum similium locis illis, ad quæ corpora eadem temporibus iisdem proportionalibus sine viribus istis pervenirent, sunt ut quadrata temporum in quibus generantur quam proximè.

Corol. 2. (x) Errores autem qui viribus proportionalibus ad similes figurarum similium partes similiter applicatis generantur, sunt ut vires et quadrata temporum conjunctim.

Corol. 3. (y) Idem intelligendum est de spatiis quibusvis quæ corpora urgentibus diversis viribus describunt. Hæc sunt, ipso motus initio, ut vires et quadrata temporum conjunctim.

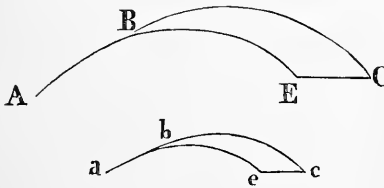
Corol. 4. Ideoque vires sunt ut spatia, ipso motus initio, descripta directè et quadrata temporum inversè.

Corol. 5. Et quadrata temporum sunt ut descripta spatia directè et vires inversè.

Scholium.

Si quantitates indeterminatæ diversorum generum conferantur inter se, et earum aliqua dicatur esse ut est alia quævis directè vel inversè: sensus

motûs initio tanquam immutabilis spectari potest.



(u) 118. Corpora duo A et a, curvas similes A B E, a b e, illarumque partes similes A B, a b, B E, b e, temporibus proportionalibus describant; duobus hisce corporibus, cum ad puncta B et b, pervenerint, accedunt novæ vires acceleratrices inter se æquales et similiter applicatæ, quæ prioribus viribus additæ corpora deferant per arcus B C, b c. Jungantur rectæ E C, e c, quæ errores solâ virium perturbantium actione genitos exponunt; Lineæ enim illæ sunt spatia solâ virium perturbantium actione descripta. Cum autem vires perturbantes supponantur æquales et similiter applicatæ, idem contingere debet ac si corpus aliquod eadem vi

acceleratrice sollicitatum spatia E C, e c, diversis temporibus describeret, adeoque spatia illa sunt, ipso motus initio, ut quadrata temporum quibus percurruntur (*Lem. X.*) B C, b c, et quibus absque virium perturbantium actione percurrerentur arcus similes B E, b e; si igitur vires illæ perturbantes supponantur constantes, spatia E C, e c, non solùm motûs initio, sed et tempore finito descripta, erunt ut prædictorum temporum quadrata (27). Undè si admodum exigua sit virium perturbantium variatio, spatia seu errores erunt quam proximè ut quadrata temporum.

(x) 119. Errores autem qui viribus proportionalibus, seu viribus in datâ ratione existentibus, ad similes figurarum similium partes similiter applicatis generantur, sunt ut vires et quadrata temporum conjunctim. Nam si tempora sunt eadem, errores sunt in datâ ratione virium; si vires sunt eadem, errores sunt in duplicata ratione temporum quibus generantur; cùm igitur vires et tempora variant, errores sunt in ratione compositâ ex datâ virium ratione et duplicatâ temporum.

(y) 120. Nam vires motûs initio tanquam constantes haberi possunt (117); dupla autem spatia, adeoque simplicia spatia, quæ corpora urgentibus viribus constantibus describunt, sunt ut vires et quadrata temporum conjunctim (30), ergo spatia quæ corpora urgentibus diversis

est, quòd prior augetur vel diminuitur in eâdem ratione cum posteriore, vel cum ejus reciprocâ. Et si earum aliqua dicatur esse ut sunt aliæ duæ vel plures directè aut inversè: sensus est, quod prima augetur vel diminuitur in ratione quæ componitur ex rationibus in quibus aliæ vel aliarum reciprocæ augetur vel diminuuntur. Ut si A dicatur esse ut B directè et C directè et D inversè: sensus est, quod A augetur vel diminuitur in eadem ratione cum $B \times C \times \frac{1}{D}$ hoc est, quod A et $\frac{B C}{D}$ sunt ad invicem in ratione datâ.

LEMMA XI.

Subtensa evanescens anguli contactus, in curvis omnibus ⁽²⁾ curvaturam finitam ad punctum contactus habentibus, est ultimo in ratione duplicatâ subtensæ arcus contermini.

Cas. 1. Sit arcus ille A B, tangens ejus A D, subtensa anguli contactus ad tangentem perpendicularis B D, subtensa arcus A B. Huic subtensæ A B et tangenti A D perpendiculares erigantur A G, B G, concurrentes in G; dein accedant puncta D, B, G, ad puncta, d, b, g, sitque I intersectio linearum B' G, A G ultimo facta

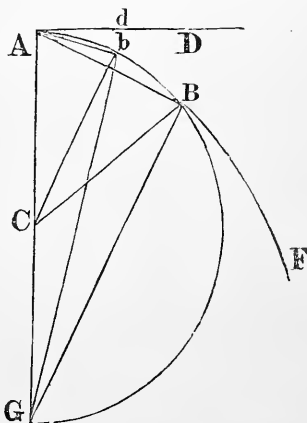
viribus describunt, sunt, ipso motus initio, ut vires et quadrata temporum conjunctim. Si itaque vires acceleratrices, motus initio, sint G, g, spatia S, s, tempora T, t, erit $S : s = G T^2 : g t^2$:

g t t, ideòque $G : g = \frac{S}{T^2} : \frac{s}{t^2}$, et $T T : t t = S : G : s : g$, hoc est, vires sunt ut spatia motus initio descripta directè et quadrata temporum inversè; Temporum verò quadrata sunt ut descripta spatia directè et vires inversè.

⁽²⁾ 121. Circuli curvatura est in omnibus circumferentiæ punctis eadem, seu uniformis; in variis autem circulis eo major est, quo minor est circuli radius, adeò ut circuli curvatura sit semper in ratione inversâ radii. Aliarum linearum curvatura in singulis punctis determinatur per curvaturam arcus circularis qui cum arcu infinitesimo curvæ in puncto dato congruit, seu, quod idem est, qui curvam in puncto dato osculatur. Est igitur lineæ cujusvis in puncto dato curvatura inversè ut radius circuli curvam lineam in dato puncto osculantis.

Sumantur duo curvæ A F, puncta A et B, ducanturque rectæ A C, B C, ad curvam perpendiculares, et ex puncto intersectionis C, tanquam centro, radiis C A, C B, duo describantur circuli, quorum unus radius C A, descriptus tangent curvam in A, alter autem radius C B, descriptus tangent eam in B. Si ad se mutuò ac-

cedant puncta A et B, donec arcus A B evanescat, duæ perpendiculares A C, B C, pro æqualibus usurpari poterunt (Lem. 1.), conjungentur duo



puncta contactus A et B, duoque circuli tangentés abibunt in unum A B G, qui curvam osculabitur in A, vel B, adeoque curvatura lineæ A F, in A, est in ratione inversâ

(^a) ubi puncta D, B accedunt usque ad A. Manifestum est quod distantia G I minor esse potest quam assignata quævis. Est autem (ex natura circulorum per puncta A B G, A b g transeuntium) A B quad. æquale A G × B D, et A b quad. æquale A g × b d; ideoque ratio A B quad. ad A b quad. componitur ex rationibus A G ad A g et B D ad b d. Sed quoniam G I assumi potest minor longitudine quâvis assignatâ, fieri potest ut ratio A G ad A g minùs differat a ratione æqualitatis quam pro differentiâ quâvis assignatâ, ideoque ut ratio A B quad. ad A b quad. minùs differat a ratione B D ad b d, quàm pro differentiâ quâvis assignatâ.

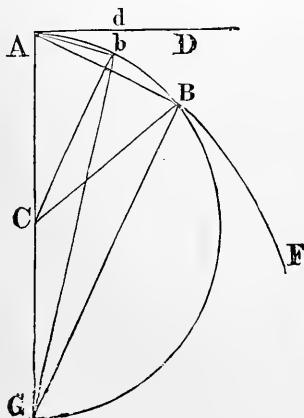
Est ergo, per Lemma I. ratio ultima A B quad. ad A b quad. eadem cum ratione ultimâ B D ad b d. Q. e. d.

Cas. 2. (^b) Inclinetur jam B D ad A D in angulo quovis dato, et eadem semper erit ratio ultima B D ad b d, quæ priùs, ideoque eadem ac A B quad. ad A b quad. Q. e. d.

Cas. 3. (^c) Et quamvis angulus D non detur, sed recta B D ad datum

radii A C circuli osculantis. Si ergo finitus sit radius osculi A C, finita quoque erit curvatura in A; si vero radius sit infinitus, curvatura erit infinitesima; ac tandem si radius sit infinitesimus, curvatura erit infinita. Quoniam autem eo magis curva a tangente A D deflectit, quo circuli osculantis radius A C minor est, et contra, patet angulum contactûs crescere et decrescere cum curvaturâ et in eadem ratione inversâ radii.

122. Ducantur chordæ A B, B G; angulus A B G, in semicirculo rectus est; ac proinde si in curvâ quâcumque curvaturam finitam in



puncto aliquo A habente ducantur chordæ evanescentes A b, A B, ad easque agantur perpendiculares B G, b G, hæ lineæ convenient in puncto G, junctisque punctis A et G, recta A G ad tangentem A d perpendicularis erit, et finitam habebit magnitudinem, ut pote quæ æqualis est duplo radio finito A C, circuli curvam osculantis in A.

(^a) 123. Ubi puncta D, B, accedunt usque ad A, linea A I (122) est diameter circuli curvam A b B osculantis in A, et quoniam accedente puncto B, ad A, accedit punctum G, ad I, atque evanescente arcu A B, evanescit quoque distantia G I, manifestum est quod distantia G I minor esse potest quam assignata quævis; quia verò anguli A b g, A B G, recti sunt (per hyp.) circuli duo diametris A g, A G, descripti per puncta b, B, transeunt, adeoque horum circulorum chordæ A b, A B, sunt mediæ proportionales inter suas respectivè abscissas A c, A C, seu æquales d b, D B, et diametros A g, A G, ac proinde $A B^2 = A G \times B D$ et $A b^2 = A g \times b d$ &c.

(^b) 124. Inclinentur jam B D, b d, ad A D, in angulo quovis dato B D F, b d f, eadem semper erit ratio ultima B D, ad b d, quæ priùs. Ductis enim B F, b f, ad A C, parallelis, erit ob triangula æquiangula B F D, b f d, $B D : b d = B F : b f$; sed (123) $B F : b f = A B : A b^2$; est igitur $B D : b d = A B^2 : A b^2$.

(^c) 125. Et quamvis angulus D, non detur, sed rectæ, D B, b b, ad datum punctum H,

punctum convergat, vel aliâ quâcunque lege constituatur; tamen anguli D, d communi lege constituti ad æqualitatem semper vergent et propiùs accedent ad invicem quàm pro differentiâ quâvis assignatâ, ideoque ultimo æquales erunt, per Lem. I. et propterea lineæ B D, b d sunt in eâdem ratione ad invicem ac priùs. Q. e. d.

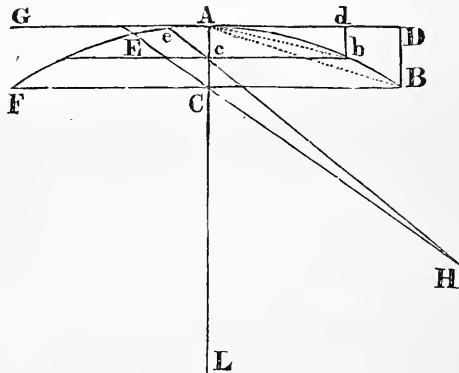
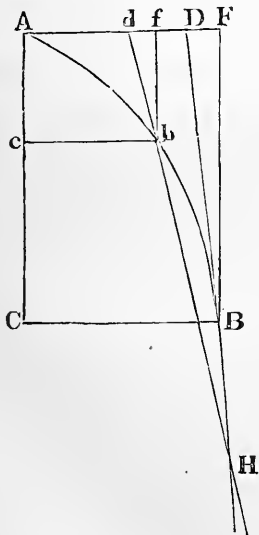
Corol. 1. Unde cum tangentes A D, A d, arcus A B, A b, et eorum sinus B C, b c fiant ultimo chordis A B, A b æquales; erunt etiam illorum quadrata ultimo ut subtensæ B D, b d.

Corol. 2. (d) Eorundem quadrata sunt etiam ultimo ut sunt arcuum sagittæ, quæ chordas bisecant et ad datum punctum convergunt. Nam sagittæ illæ sunt ut subtensæ B D, b d.

Corol. 3. ^(e) Ideoque sagitta est in duplicatâ ratione temporis quo corpus datâ velocitate describit arcum.

convergant, vel aliâ quâcumque communi lege
constituantur, tamen anguli D, d, communi
lege constituti (punctis b et B ad A et ad se
mutuò accedentibus) ad æqualitatem semper ver-

et rectæ B D, b d, ad tangentem A D, normales, per puncta C, c, semper ducantur lineæ E C, e c, ad datum punctum H, convergentes, evanescente arcu A B, rectæ D B, d b,



gent, et evanescente arcu B b, adeoque coincidentibus lineis H D, H d, propius accedent ad invicem quam pro differentiâ quâvis assignatâ ac proinde ultimò æquales erunt (per Lem. I.), et propterea lineæ B D, b d, sunt ultimò parallelae et in eadem ratione ad invicem ac prius (124.)

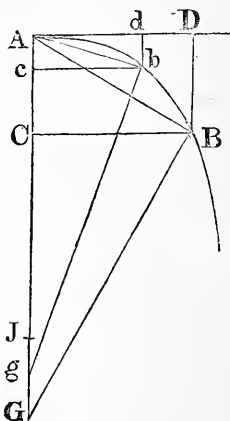
(d) 126. Sit $F A B$, arcus circuli curvam datam osculantis in A , tangens $A D$, radius osculi $A L$, chordæ $F B$, $f b$, ad radium $A L$.

et ipsi aequales sagittae A C, A c, sunt ut tangentium A D, A d, arcuum A B, A b, et chordarum A B, A b, quadrata (*Corol. 1.*) adeoque ut duplorum arcuum F A B, f a b, et chordarum f b, F B, iis arcibus evanescentibus (Lem. 7.) congruentium, atque etiam tangentium quadrata. Jam ubi punctum C, usque ad A, accedit, chorda evanescens A E, cum tangente A G, coincidit (Lem. 6.) et coeuntibus quoque lineis E H, e H, triangula C E A, c e A, fiunt similia, ac proinde E C est ad e c, ut A C, ad a c, hoc est ut arcuum evanescentium F A B, f a b, chordarum F B, f b, et tangentium quadrata.

(e) 127. Ideoque sagittae A C, A c, vel E C, e c, sunt in duplicatâ ratione temporum quibus corpus datâ velocitate percurrit arcus evanescentes F A B, f A b, vel dimidios A B, A b; spatia

Corol. 4. (^f) Triangula rectilinea $A D B$, $A d b$ sunt ultimo in triplicatâ ratione laterum $A D$, $A d$, inque sesquuplicatâ laterum $D B$, $d b$; utpote in compositâ ratione laterum $A D$ et $D B$, $A d$ et $d b$ existentia. Sic et triangula $A B C$, $A b c$ sunt ultimo in triplicatâ ratione laterum $B C$, $b c$. Rationem verò sesquiplicatam voco triplicatâ subduplicatam, quæ nempè ex simplici et subduplicatâ componitur.

Corol. 5. Et quoniam $D B$, $d b$ sunt ultimo parallelæ et in duplicatâ ratione ipsarum $A D$, $A d$: erunt areæ ultimæ curvilineæ $A D B$, $A d b$ (^g) ex naturâ parabolæ) (^h) duæ tertiæ partes triangulorum rectilineorum $A D B$, $A d b$; et segmenta $A B$, $A b$ partes tertiæ eorundem triangulorum. Et inde hæc areæ et hæc segmenta erunt in triplicatâ ratione tum tangentium $A D$, $A d$; tum chordarum et arcuum $A B$, $A b$.



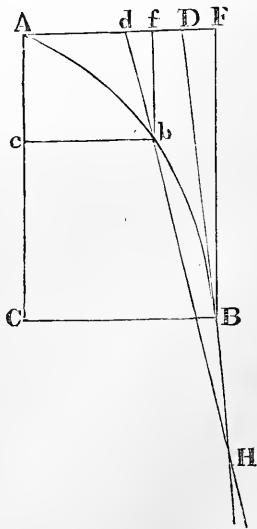
enim datâ velocitate percursum sunt ut tempora (5), adeoque pro temporibus substitui possunt arcus $F A B$, $f A b$, sed sagittæ sunt in ratione duplicatâ eorum arcuum, (126), ergò et temporum.

(^f) 128. Triangula rectilinea $A B D$, $A b d$, sunt ultimò in triplicatâ ratione laterum $A D$, $A d$, inque sesquuplicatâ laterum $B D$, $b d$; ductis enim $B F$, $b f$, ad tangentem $A B$, perpendicularibus, erit ob triangulorum $B D F$, $b d f$, similitudinem $B D : b d = B F : b f$, et propterea areæ triangulorum $A B D$, $A b d$, sunt in ratione compositâ laterum $A D$, ad $A d$, et $B D$, ad $b d$; sed (124, 125. Cor. 1.) $B D : b d = A D^2 : A d^2$, adeoque $\sqrt{B D} : \sqrt{b d} = A D : A d$, ergò triangula $A B D$, $A b d$, sunt in ratione compositâ $A D$, ad $A d$, et $A D^2$, ad $A d^2$, hoc est, in ratione triplicatâ laterum $A D$, $A d$; sunt etiam in ratione compositâ $B D$, ad $b d$, et $\sqrt{B D}$, ad $\sqrt{b d}$, hoc est, in ratione $B D \times \sqrt{B D}$ ad $b d \times \sqrt{b d}$.

(^g) 129. Arcus evanescens $A B$, in curvis omnibus curvaturam finitam ad punctum contactus A , habentibus, pro arcu parabolæ usurpari potest. Ductâ enim $A C$, lineis $B F$, $b f$, parallelâ, completisque parallelogrammis $A B$, $A b$, erunt, ex demonstratis, rectæ $F B$, $f b$, et ipsis æquales abscissæ $A C$, $A c$, ut ordinatum $C B$, $c b$, quadrata, quæ est notissima parabolæ proprietas.

130. Quare arcus evanescens spectari potest tanquam arcus parabolæ cuius latus rectum est æquale diametro circuli osculantis. Nam in arcu circulari $A B$, (vid. fig. textûs) ordinata $C B$, ad diametrum perpendicularis, est media proportionalis inter abscissam $A C$, et reliquam diametri partem, seu totam diametrum, cum $A C$, evanescit (Lem. I.), adeoque quadratum

ordinatæ $C B$, æquale est rectangulo ex abscissâ evanescente $A C$, et diametro circuli, quæ est proprietas parabolæ cuius latus rectum æquale est prædictæ diametro.



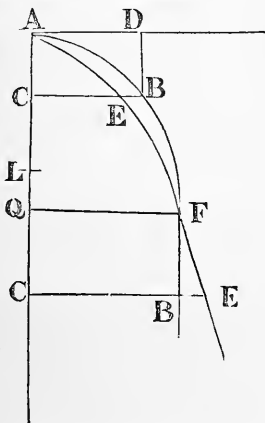
(^h) 131. Parabolæ segmentum $A b B$, est tertia pars trianguli rectilinei $A C B$, vel æqualis $A D B$, adeoque area curvilinea $A D B b A$, æqualis est duabus tertiis partibus ejusdem trianguli rectilinei $A D B$. Vid. Gregor. a S. Vincentio

Scholium.

Cæterum in his omnibus supponimus angulum contactus nec infinitè majorem esse angulis contactuum, quos circuli continent cum tangentibus suis, nec iisdem infinitè minorem; hoc est, curvaturam ad punctum A, nec infinitè parvam esse, nec infinitè magnam, seu intervallum A J finitæ esse magnitudinis. ⁽ⁱ⁾ Capi enim potest DB ut AD³: quo in casu circulus nullus per punctum A inter tangentem AD et curvam AB duci potest, proindeque angulus contactus erit infinitè minor circularibus. ^(k) Et simili argumento si fiat DB successivè ut AD⁴, AD⁵, AD⁶, AD⁷,

Cor. 1. Prop. 252. Lib. V. Quadraturæ circuli, aut Archimed. Prop. 17. Quadrat. Parabolæ.

⁽ⁱ⁾ 132. Sit parabolæ Apolloniæ AEF, axis AC, vertex A, tangens in vertice AD, ordinata CE, latus rectum AL, circulus diametro AL, descriptus parabolam osculatur in A, (130.) eundemque ac parabolæ contactus angulum efficit in A. Ad eundem axem AC, et verticem



A, describitur superioris generis parabola cujus ordinatæ CB sint semper in subtriplicatâ abscissarum AC, vel parallelarum et æqualium DB, ratione; et erit angulus contactus B A D, angulo contactus E A D, infinitè minor. Dem.—Parabolæ AFE, latus rectum AL, dicatur A; parabolæ ABB, latus rectum sit B, et erit ex harum curvarum naturâ $A \times AC = CE^2$ et $B^2 \times AC = CB^3$, adeoque $AC = CE^2 : A = CB^3 : B^2$, unde reperitur $CB^3 = CE^2 \times B^2 : A$, et CB ad $B^2 : A = CE^2$ ad CE^2 ergo cum crit $CB = B^2 : A$, tunc erit $CE^2 = CB^2$, atque adeo parabolæ AEF, ABB, ordinatam habebunt communem quæ dicatur QF, et sese intersectant in puncto F; jam verò si fuerit CB minor quam $B^2 : A$, erit quoque CE^2 minor quam CB^2 , adeoque CE minor quam CB; sed omnes ordinatæ inter verticem A, et ordinatam communem QF, (quæ est $B^2 : A$) minores sunt eâ, ergo omnes CE inter A et F comprehensæ sunt minores ordinatis correspondentibus CB, tota igitur parabola Apolloniæ portio AEF, quâ ordinatæ CE terminantur, cadit intrâ portionem AEF, alterius parabolæ, ac proinde angulus contactus B A D, semper minor est angulo contactus

E A D, cum ergò angulus E A D, aucto in infinitum latere recto AL, possit sine fine minui, manifestum est angulum contactus B A D, quovis angulo dato E A D, infinitè minorem esse, Q. e. d.

133. Ad eundem axem AC, et verticem A, successivè describantur curvæ AEE; ejus naturæ, ut abscissarum AC, et ordinarum CE, relatio exprimat æquatione generali $A^m AC = CE^m + 1$. Si loco exponentis, m, successivè ponantur in æquatione numeri quilibet positivi, integri vel fracti continuò crescentes vel decrecentes, obtinebunt infinitæ series diversæ angulorum contactuum, quorum quilibet est infinitè minor prior, dum numerus, m, semper crescit, et infinitè major dum numerus, m, semper decrescit. Dem.—Numerus, m, augeatur numero positivo, n, integro vel fracto, et describatur curva ABB, cujus æquatio sit $B^m + n \times AC = CB^m + n + 1$. Et hac æquatione et superiori $A^m AC = CE^m + 1$, reperitur $AC = CB^m + n + 1 : B^m + n = CE^m + 1 : A^m$, adeoque $CB^m + n + 1 = CE^m + 1 \times B^m + n : A^m$ atque CB^n ad $B^m + n : A^m = CE^m + 1$ ad $CB^m + 1$; sit $CB^n = B^m + n : A^m$, et erit $CB^m + 1 = CE^m + 1$, adeoque $CB = CE = QF$. Quare cum inter verticem A, et communem ordinatam QF, omnes ordinatæ sint minores ipsâ QF, patet ut suprâ (132), totam portionem AEF, curvæ AEE, cadere intrâ portionem ABB, alterius curvæ ABB, ac proinde angulum contactus B A D, quovis dato angulo contactus E A D infinitè minorem esse, et reciprocè angulum E A D, esse angulo B A D infinitè majorem. Q. e. d.

^(k) 134. In æquatione $A^m \times AC = CE^m + 1$, loco exponentis m, successivè ponantur numeri 1, 2, 3, 4, 5, &c. et erit AC successivè, ut CE^2 , CE^3 , CE^4 , CE^5 , &c. et habebitur (133) series angulorum contactus pergens in infinitum, quorum quilibet posterior est infinitè minor prior. Loco m substituantur successivè numeri decrescentes, $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$, &c. erit AC, successivè ut CE^2 , $CE^{\frac{2}{3}}$, $CE^{\frac{2}{5}}$, $CE^{\frac{2}{4}}$, &c. et habebitur alia series infinita angulorum contactus, quorum primus est ejusdem generis cum circularibus (132), secundus infinitè major, et quilibet posterior infinitè major

&c. habebitur series angulorum contactus pergens in infinitum, quorum quilibet posterior est infinitè minor priore. Et si fiat $D B$ successivè ut $A D^2$, $A D^{\frac{5}{2}}$, $A D^{\frac{4}{3}}$, $A D^{\frac{5}{4}}$, $A D^{\frac{6}{5}}$, $A D^{\frac{7}{6}}$, &c. habebitur alia series infinita angulorum contactus, quorum primus est ejusdem generis cum circularibus, secundus infinitè major, et quilibet posterior infinitè major priore. Sed et inter duos quosvis ex his angulis potest series utrinque in infinitum pergens angulorum intermediorum inseri, quorum quilibet posterior erit infinitè major minorve priore. Ut si inter terminos $A D^2$, et $A D^3$, inseratur series $A D^{\frac{15}{6}}$, $A D^{\frac{11}{3}}$, $A D^{\frac{9}{4}}$, $A D^{\frac{7}{5}}$, $A D^{\frac{5}{6}}$, $A D^{\frac{3}{7}}$, $A D^{\frac{11}{4}}$, $A D^{\frac{14}{5}}$, $A D^{\frac{17}{6}}$, &c. Et rursus inter binos quosvis angulos hujus seriei inseri potest series nova angulorum intermediorum ab invicem infinitis intervallis differentium. Neque novit natura limitem.

(¹) Quæ de curvis lineis deque superficiebus comprehensis demonstrata sunt, facilè applicantur ad solidorum superficies curvas et contenta.

(^m) Præmisi verò hæc lemmata, ut effugerem tædium deducendi longas demonstrationes, more veterum geometrarum, ad absurdum. Contractiores enim redduntur demonstrationes per methodum indivisibilium. Sed quoniam duriôr est indivisibilium hypothesis, et propterea methodus illa minùs geometrica censetur; (ⁿ) malui demonstrationes rerum sequentium

(135). Loco m , substituantur numeri $1, 1 + \frac{1}{6}, 1 + \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{5}, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{2}{3}, 1 + \frac{3}{4}, 1 + \frac{4}{5}, 1 + \frac{5}{6}$, &c., erit $A C$, successivè ut $C E^2$, $C E^{\frac{15}{6}}$, $C E^{\frac{11}{3}}$, $C E^{\frac{9}{4}}$, &c., et habebitur series infinita angulorum contactus, quorum quilibet posterior est infinitè minor priore (135), et inter binos quosvis angulos hujus alteriusve seriei inseri potest series nova angulorum intermediorum ab invicem infinitis intervallis differentium; ut enim ea series inveniat, sufficit inter duos numeros datos, v. G. $1, 1 + \frac{1}{6}$, seriem invenire numerorum crescentium, vel decrescentium, quorum quilibet major sit altero ex numeris datis, minor altero, quod facillimum est.

(1) 135. Id exemplo facili illustrare satis erit. Pyramidis et conì sit idem vertex eademque altitudo, et basis pyramidis sit polygonum inscriptum circulo qui basis est conì, numerus laterum polygoni augeatur, et eorum longitudo minuatur in i finitum, et polygoni ac circuli ultima ratio (Lem. 7.) erit ratio æqualitatis, ac proindè ultima ratio pyramidis illiusque superficiei ad conum et illius superficiem curvam, erit quoque ratio æqualitatis; undè curva superficies conì æqualis est summæ ultimæ triangulorum evanescentium, quorum communis vertex est vertex conì, bases verò latera evanescentia polygoni circulo inscripti.

(^m) 136. Quàm magnos progressus Geometria fecerit, hinc cognoscere licet. Veteres Geometræ in iis quæstionibus quæ *Infiniti* conside-

rationem involvunt, suas demonstrationes ad absurdum revocabant, et ex falsis suppositionibus verum eruebant. Ut inter duas quantitates quæ ad æqualitatem constanter vergunt, et tandem propius ad invicem accedunt quàm pro datâ quavis differentiâ rationem æqualitatis intercedere demonstrant, prius supponebant inter eas quantitates esse vel majoris vel minoris inæqualitatis rationem, deindè utrumque falsum demonstrabant, et ex hac reductione quàm ad absurdum vocant, inter illas quantitates perfectam æqualitatem esse concludebant. Quàm autem perplexus sit et tædiosus hic demonstrandus modus, nemo non videt. Verùm licet imperfecta admodum fuerit veterum Geometria, non iis tamen omnino ignota fuerunt methodi infinitesimalis principia. Quantitates infinitè parvas seu evanescentes pro nihilo habendas esse in multis demonstrationibus tanquam axioma posuerunt Euclides et Archimedes; in exemplum afferemus unicuique vulgaris Geometriæ theorema. Ut demonstrarent circulos esse inter se ut quadrata diametrorum, fingeant iis circulis inscripta esse vel circumscripta polygonia similia quorum latera numero augerentur et longitudine minuerentur in infinitum, ità ut polygonorum inscriptorum vel circumscriptorum a circulo differentia foret quavis datâ magnitudine minor; quia verò hæc polygonia sunt ut quadrata diametrorum circulorum quibus inscribuntur vel circumscribuntur, circulos pariter esse ut quadrata diametrorum concludebant. Varios infinitorum ordines supponit illud idem theorema, licèt non adverterent vete-

ad ultimas quantitatum evanescentium summas et rationes, primasque nascentium, id est, ad limites (^o) summarum et rationum deducere; et propterea limitum illorum demonstrationes quâ potui brevitate præmittere. His enim idem præstatur quod per methodum indivisibilium; et principiis demonstratis jam tutius utemur. Proinde in sequentibus, si quando quantitates tanquam ex particulis constantes consideravero, vel si pro rectis usurpavero lineolas curvas; nolim indivisibilia, sed evanescentia divisibilia, non summas et rationes partium (^p) determinatarum, sed summarum et rationum limites semper intelligi; vimque talium demonstrationum ad methodum præcedentium lemmatum semper revocari.

Objectio est, quod quantitatum evanescentium nulla sit ultima proportio; quippe quæ, antequam evanuerunt, non est ultima; ubi evanuerunt, nulla est. Sed et eodem argumento æque contendì posset nullam esse corporis ad certum locum, ubi motus finiatur, pervenientis (^q) velocitatem ultimam: hanc enim, antequam corpus attingit locum, non esse ultimam; ubi attingit, nullam esse. Et responsio facilis est: per velocitatem ultimam intelligi eam, quâ corpus movetur, neque antequam attingit locum ultimum et motus cessat, neque postea, sed tunc cum attingit; id est, illam ipsam velocitatem quâcum corpus attingit locum ultimum et

res. Nam considerabant polygona circulis inscripta tanquam composita ex infinitis numero atque infinitè parvis seu evanescentibus lateribus; manifestum autem est differentiam polygoni inscripti a circulo quâvis datâ minorem componi ex infinitis numero atque infinitè parvis seu evanescentibus circuli segmentis quorum latera polygoni sunt chordæ; hæc verò segmenta sunt minimæ quantitates illæ quas secundi ordinis infinitesimas dicunt recentiores. Hic pedem fixerant veteres, primusque longius progredi ausus est celeberrimus Geometra Bonaventura Cavalieri, qui anno 1635, indivisibilium methodum in geometriam introduxit. Hoc primum posuit suæ methodi decretum, lineas nempe ex infinitis punctis constare, superficies ex infinitis lineis, et solida ex infinitis superficiebus; deinde indivisibilia illa elementa, totamque eorum summam comparat in unâ magnitudine cum singulis elementis eorumque summâ in aliâ magnitudine, et sic duarum magnitudinum rationem determinat. Hæc autem quantitatum indivisibilium hypothesis duor' minusque geometria NEWTONO visa est.

(n) 137. NEWTONUS, ut indirectas et perplexas vitaret veterum demonstrationes, earum tamen certitudinem et evidentiam conservaret, veterum principium lemme primo generaliter expressit, illudque in lemmatis sequentibus ad curvas generatim applicavit, et indè directas perbrevesque demonstrationes in toto operis de-cursu deduxit. Ut autem methodi indivisibilium breviter assequeretur, tutius tamen et ac-

curatius procederet, loco indivisibilium evanescentia divisibilia substituit, et quantitates Mathematicas non ut ex partibus quam minimis constantes, sed ut motu continuo descriptas considerat; supponit nimirum lineas describi ac describendo generari non per appositionem partium, sed per motum continuum punctorum, superficies per motum linearum, et solida per motum superficierum, angulos per rotationem laterum, tempora per fluxum continuum, et sic in cæteris.

(o) 138. Ubi area curvilinea in parallelogramma rectilinea dividitur, et eorum numerus augetur atque latitudo minuitur in infinitum, horum parallelogrammorum summa (Lem. 2.), nunquam potest esse major areâ curvilineâ, sed hæc area est terminus ad quem parallelogrammorum decrescendum summa semper accedit et quem tandem attingit, ubi parallelogramma evanescent aut nascuntur. Idem dicendum de evanescentibus curvarum chordis respectu perimetri curvilineæ.

(p) 139. Quantitates evanescentes concipi non debent velut determinatæ aut determinabiles quædam porciones quantitatum quæ certam et definitam parvitatem obtineant. Quasculumque enim portiunculæ linearum, superficierum aut corporum acceperimus aut designaverimus, hæ semper reipsâ finitæ erunt, non evanescentes; itaque non sunt intrâ certos terminos quantumvis proximos coarctandæ, undè hæ quantitates semper ut decrescentes ac perpetuò diminuendæ accipi debent.

(q) 140. Exempli causâ, gravis sursùm projecti et ad altissimum locum pervenientis.

quâcum motus cessat. Et similiter per ultimam rationem quantitatum evanescentium, intelligendam esse rationem quantitatum, non antequam evanescent, non postea, sed quâcum evanescent. Pariter et ratio prima nascentium est ratio quâcum nascuntur. Et summa prima et ultima est quâcum esse (vel augeri aut minui) incipiunt et cessant. Extat limes quem velocitas in fine motûs attingere potest, non autem transgredi. Hæc est velocitas ultima. Et par est ratio limitis quantitatum et proportionum omnium incipientium et cessantium. Cumque hic limes sit certus et definitus, problema est verè geometricum eundem determinare. Geometrica verò omnia in aliis geometricis determinandis ac demonstrandis legitimè usurpantur.

Contendi etiam potest, quod si dentur ultimæ quantitatum evanescentium rationes, dabuntur et ultimæ magnitudines: et sic quantitas omnis

(^r) 141. Seu, quantitatum determinatarum et indivisibilium, sed, &c.

142. Ut quantitatum evanescentium aut nascentium relationes atque proprietates inveniantur, considerantur quantitates finitæ, harum investigantur relationes et proprietates et lex quâ continuò crescunt vel decrescunt; quibus cognitis faciliè intelligitur quænam proprietates quantitatum illis crescentibus ac decrescentibus semper conveniant, adeoque et cum in infinitum minuuntur et evanescent, vel cum nascuntur. Imò verò ex Lemmate primo aliisque sequentibus invenitur quænam sint proprietates quæ licet quantitatis finitis non conveniant, evanescentibus tamen et nascentibus competunt, cum nempe quantitates finitæ decrescentes ad illas proprietates, ut ità dicam perpetuò accedunt, et ad eas tempore dato accedunt magis quàm pro differentiâ quâvis datâ.

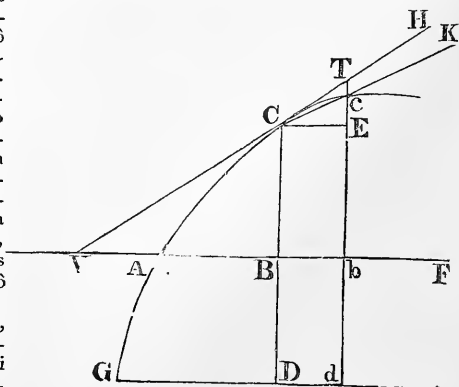
Ex præcedentibus Lemmatibus faciliè deducitur ac demonstratur *Newtoniana* fluxionum methodus cujus generalia principia ut potè nobis in posterum profutura breviter explicabimus.

143. Quantitates indeterminatæ quæ continuò crescunt vel decrescunt, variabiles aut fluentes dicuntur; constantes verò aut determinatæ vocantur, quæ aliis continuò crescentibus vel decrescentibus, eadem manent. Ordinatæ B C, B D, super basi A F, motu sibi semper parallelo ità progrediantur, ut ordinatâ B D, eadem semper manente, punctum D, rectam G D d describat, et interim continuò crescente vel decrescente ordinatâ B C, punctum C describat curvam A C c; abscissa A B, ordinata B C, curvæ arcûs A c, arcûs A C B, A G D B, sunt quantitates indeterminatæ seu fluentes; recta verò B D, est quantitas constans.

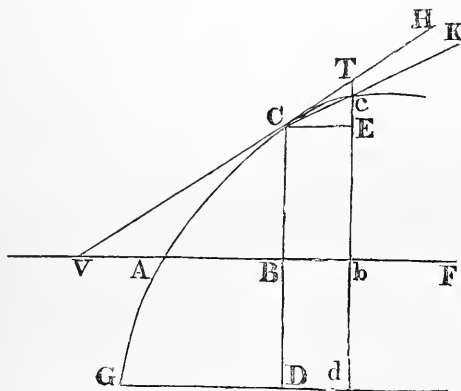
144. Quantitates fluentes, ut A B, B C, æqualibus temporibus crescentes et crescendo genitæ, pro velocitate majori vel minori quâ crescunt, ac generantur, evadunt ma-

jores vel minores; si enim punctum B, velociùs semper progrediatur quam punctum C, in lineâ B C, incrementa B b, fluentis A B, majora erunt incrementis E c, fluentis B C, eodem tempore genitis. Velocitates quibus illa incrementa ut B b, E c, eodem tempore genita, primò nascuntur, dum nempe b c, coincidit cum B C, dicuntur *fluxiones*, et methodus ex fluentibus inveniendi fluxiones, methodus fluxionum directa vocatur; methodus verò ex fluxionibus inveniendi fluentes, *methodus fluxionum inversa* appellatur.

145. Velocitates quibus fluentium quantitas tum incrementa eodem tempore genita, primò nascuntur, sunt uniformes.—*Dem.* Cum curva A C c, motu puncti C, velocitate quâvis finitâ progredientis describi possit, si illius puncti velocitas secundùm directionem C E, lineæ A B parallelam, supponatur uniformis, velocitas ejusdem secundùm directionem E c, pro variâ curvæ A C c naturâ, varia quidem erit in diversis curvæ punctis, v. gr. in C, e c; sed quò magis punctum c, ad C, accedet, eò minor erit velocitatis secundùm directionem E c, variatio



constabit ex indivisibilibus, contra quam Euclides de incommensurabilibus, in libro decimo elementorum, demonstravit. Verum hæc objectio falsæ innititur hypthesi. Ultimæ rationes illæ quibuscum quantitates evanescent, revera non sunt rationes quantitatum (^r) ultimarum, sed limites ad quos quantitatum sine limite decrescentium rationes semper appropinquant; et quas propius assequi possunt quàm pro datâ quâvis differentiâ, nunquam verò transgredi, neque priùs attingere quàm quantitates diminuuntur in infinitum. Res clariùs intelligetur in infinitè magnis. Si quantitates duæ, quarum data est differentia, augeantur in infinitum, dabitur harum ultima ratio, nimirum ratio æqualitatis, nec tamen ideò dabuntur quantitates ultimæ seu maximæ quarum ista est ratio. In sequentibus igitur, si quando facili rerum conceptui consulens, dixero quantitates quàm minimas, vel evanescentes, vel ultimas; cave intelligas quantitates magnitudine determinatas, sed cogita semper diminuendas sine limite.



in punctis C, et c, adeò ut dum punctum c, co- incidit cum puncto C, omnis velocitatis per E c, variatio expiret. Quare (Lem. I.) velocitates quibus fluentium incrementa eodem tempore genita primò nascuntur, sunt uniformes. Q. e. d.

146. Cum ergò velocitates uniformes sint spatiis eodem tempore percurrendis proportionales (5), manifestum est fluxiones (145) esse in ratione incrementorum eodem tempore genitorum, dum primò nascuntur vel ultimò evanescent; adeoque ut fluxionum relatio inveniat, sumere oportet incrementa fluentium eodem tempore genita, et primam eorum incrementorum nascentium, vel ultimam evanescentium rationem considerare tanquam relationem fluxionum.

147. Hinc summa fluxionum est ut summa incrementorum nascentium vel evanescentium, summa verò incrementorum omnium nascentium est ipsa quantitas fluens; nam si tota area A c b divisa intelligatur in parallelogramma ut B E, eorumque numerus augeatur et latitudo B b minuatur in infinitum, summa omnium incrementorum nascentium B b, ab A usque ad

b, erit ipsa fluens A b, summa omnium incrementorum E c, ab A, usque ad c, erit fluens b c, summa omnium C c, erit arcus fluens A c, et summa omnium parallelogrammorum B E, erit area A c b fluens (106, 107); ergò summa fluxionum est ut ipsa quantitas fluens.

148. Quoniam in figurâ superiori fluxio aliqua, vel abscissæ A B, vel ordinatæ C B, aut arcus A C, ad arbitrium tanquam uniformis spectari possit, (Ex dictis 145.) patet ex pluribus fluxionibus unam tanquam constantem posse considerari et quantitate finitâ constanti exponi, dum aliæ fluxiones variâ ratione mutari et quantitativis variabilibus exponi possunt.

149. Quare cum quantitates variabiles suas habeant fluxiones quæ rursus possunt esse variabiles, liquet dari fluxiones fluxionum, seu varios, imò infinitos fluxionum ordines. Fluentium finitarum fluxiones dicuntur fluxiones primæ; harum fluxiones primæ dicuntur fluentium finitarum fluxiones secundæ, et ita porro in infinitum.

150. Ductâ rectâ V T H, quæ curvam tangat in C, ipsisque b c et B A productis occur-

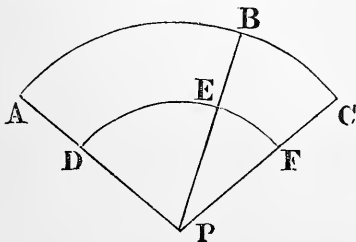
rat in T et V; linea b c in locum suum priorem B C redeat, et ultima forma triangulorum evanescentium C E c, C E c, C E T, est similitudinis et ultima ratio æqualitatis (Lem. VIII.) ideòque fluxiones primæ ipsarum A B, B C, A C, sunt (146.) ut trianguli C E T, latera C E, E T, et C T, et per eadem latera exponi possunt, vel quod perindè est, per latera V B, C B, et V C, trianguli V B C, similis triangulo C E T.

151. Quoniam aræ B b c C, B b d D, eodem tempore describuntur communi ordinatarum B C, B D motu, erunt aræ illæ nascentes vel evanescentes ut fluxiones arearum A C B, A B D G, (146); sed area nascens B b c C, non differt à parallelogrammo B E, (107); ergò fluxiones arearum A C B, A B D G, sunt in ratione primâ parallelogrammorum B E, B d nascentium, seu ob commune latus B b, in ratione ordinatarum C B, B D.

152. Si circulus centro B, radio fluente B C, descriptus per longitudinem abscissæ A B, ad angulos rectos progrediatur, describet solidum idem quod ex rotatione figuræ A C B, circa axem A B generaretur, et fluxio solidi geniti erit ut factum ex aræ circuli illius in incrementum nascens B b, abscissæ A B, et fluxio superficiæ solidi geniti erit ut factum ex perimetro ejusdem circuli in arcum C c, vel tangentem C T, nascentem.—Dem. Rectangulum nascens

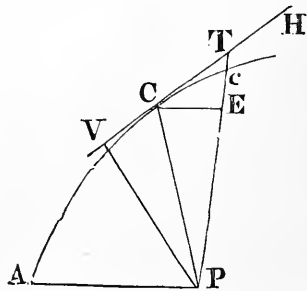
B E, non differt à figurâ B b c C nascente (107), adeòque incrementum nascens solidi ex rotatione figuræ A C B, geniti æquale est solidò ex rotatione rectanguli B E, circa latus B b, genito; hoc autem solidum est cylindrus æqualis facto ex aræ circuli radio C B descripti in altitudinem B b; solidi igitur motu circuli C B per axem A B geniti incrementum nascens adeòque et ipsius fluxio (146) est ut factum ex aræ circuli in incrementum nascens B b, abscissæ A B. Similiter cum arcus nascens C c, cum tangente C T coincidat, (Lem. 7.) superficies nascens ex rotatione figuræ B b c C, genita æqualis est superficiæ coni truncati, adeòque æqualis facto ex semisumma peripheriarum, quarum sunt radii B C, b c, in latus C T, seu ob, b c = B C (107) æqualis facto ex peripheriâ circuli, cujus radius B C, in latus C T, vel arcum C T, nascentem; ergò factum istud est incrementum nascens superficiæ curvæ ex rotatione A C descriptæ, adeòque est ut illius superficiæ fluxio (146) Q. e. d.

155. Anguli rectilinei A P B, E P F sunt



inter se directè ut arcus A B, E F, qui angulos subtendunt et reciprocè ut arcum radii A P, E P.—Dem. Est angulus A P B, ad angulum B P C, seu E P F, ut arcus A B, ad arcum B C, adeòque ut A B : A P, ad B C : A P; sed ob arcus similes B C, E F, est B C : A P = E F : E P; ergò angulus A P B, est ad angulum E P F, ut A B : A P, ad E F : E P. Q. e. d.

154. Hinc sequitur 1º. quemlibet angulum A P B exprimi posse arcu A B qui ipsum subtendit diviso per radium A P. 2º. Quemlibet arcum circuli A B, esse ut factum ex angulo A P B in radium A P, atquè adeò hoc facto exprimi posse. 3º. Incrementum nascens anguli fluentis A P B, adeòque et illius anguli fluxionem (146) esse in ratione directâ arcus circularis nascentis et inversâ radii illius.



155. Recta P C fluens circa datum polum P revolvatur, et punctum illius extremum C, curvam A C c, describat quam tangit in C recta V C H in quam ex polo P, demissa sit perpendicularis P V. Sit A punctum in curvâ A C fixum, progrediaturque recta P C de loco suo P C, in locum novum P c, et producta P c, tangentem secet in T. Capiatur P E = P C, seu radio P C describatur circuli arcus C E, ut habeantur E c, incrementum rectæ P C, C c, incrementum curvæ, A c, P C c incrementum aræ P A C P, angulus C P c, incrementum anguli A P C, eodem tempore genita. Redeat jam P C, in locum suum priorem P C, ut incrementa illa omnia evanescant et horum incrementorum evanescentium ratio ultima erit ratio fluxionum quantitatum fluentium quarum sunt incrementa (146).

156. Quoniam autem perveniente P c, in locum P C, triangula C E c, C E T, evanescentia sunt ultimò similia et æqualia (Lem. 8.) circuli arcus C E, cum chordâ ipsius coincident, ipsique æqualis est (Lem. 7.), et præterea evanescente angulo C P E, anguli P C E, P E C, sunt inter se et duobus rectis æquales, adeòque C E, ad P T, normalis. Manifestum est, 1º. Triangulum T V P esse triangulo T E C, adeòque et triangulo evanescenti C E C, simile, ac proinde fluxiones arcus A C, et rectæ P C, esse inter se ut duo latera V T, T P seu V C, P C. 2º. Fluxionem anguli A P C, esse ut C E : P C (154).—3º. Fluxionem aræ A C P, esse ut factum ex rectâ C P, in normale C E evanescentem; nam area trianguli P C T, æqualis dimidio rect-

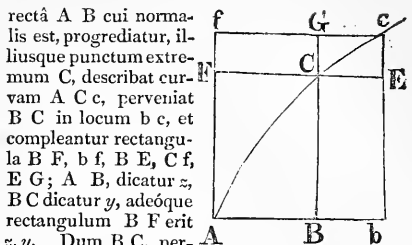
tangulo $P T \times C E$, seu ob evanescen-
tem $E T$, dimidio rectangulo $P C \times C E$
(Lem. 1.)

157. Similibus argumentis ex fluentibus cal-
culo expressis fluxiones inveniri possunt, in quan-
titatibus finitis analysim instituendo, et finitarum
nascentium vel evanescentium rationes primas
vel ultimas investigando. Hæc autem sunt cal-
culi fluxionum principia. Nimirum, 1^o. Cum
fluxiones sint in primâ ratione incrementorum
nascentium et ultimâ evanescentium (146), fluxi-
ones iis incrementis primò nascentibus vel ulti-
mò evanescentibus possunt exprimi. — 2^o. Quan-
titates quæ non nisi suo incremento nascente aut
evanescente differunt, sunt æquales (Lem. 1.) —
3^o. Quantitatum constantium nullæ sunt fluxio-
nes, nulla incrementa vel decrements. — 4^o. Si in-
ter quantitates indeterminatas aliquæ decrescant,
dum aliæ crescunt, decrescantium fluxiones sunt
negativæ, sunt enim ut incrementa negativa, seu
ut decrements.

158. Quantitates fluentes designantur ultimis
alphabeti litteris z, y, x, v ; constantes indican-
tur aliis a, b, c , &c. fluentium fluxiones primas
aut ipsis proportionalia incrementa nascentia vel
evanescentia NEWTONUS notat iisdem litteris qui-
bus fluentes exponuntur, sed iis punctuatis sic
 $\dot{z}, \dot{y}, \dot{x}, \dot{v}$; Leibnitius litteram d , incrementi
nascentis vel evanescentis notam characteristicam
fluentibus præponit sic dz, dy, dx, dv . Fluxiones
secundæ designantur sic $\ddot{z}, \ddot{y}, \ddot{x}, \ddot{v}$, vel sic $ddz,$
 ddy, ddx, ddv ; fluxiones tertiæ sic $\dddot{z}, \dddot{y}, \dddot{x}, \dddot{v}$,
vel sic $dddz, dddy, dddx, dddv$, vel sic $d^3z, d^3y,$
 d^3x, d^3v , et ita deinceps in infinitum.

159. Fluxio quantitatis ex pluribus terminis
per additionem vel subtractionem compositæ,
æqualis est omnibus singulorum terminorum
fluxionibus per eadem signa $+$ vel $-$ junctis;
itâ fluxio quantitatis compositæ $a + z - y$, erit
 $dz - dy$. — Dem. Totius quantitatis $a + z - y$,
incrementum tempore dato genitum æquale
est differentiæ incrementorum ipsarum z et y ,
cum nullum sit constantis a , incrementum (156)
adeoque incrementum nascentium vel evanescentium
ipsarum $a + z - y$, æquale est differentiæ
incrementorum nascentium vel evanescentium
ipsarum z et y , sed fluxiones sunt in primâ rati-
one incrementorum nascentium (145) ergò fluxio
totius quantitatis $a + z - y$, est $dz - dy$. Q. e.
d. Si crescente quantitate z , decresceret y , ipsius
 y , fluxio foret negativa nempe $-dy$ (157)
adeoque fluxio $dz - dy$, fieret $dz + dy$.
Quod in sequentibus semper est obser-
vandum.

160. Fluxio quantitatis fluentis ex pluribus
variabilibus per multiplicationem compositæ,
æqualis est summæ factorum ex singularum vari-
abilium componentium fluxionibus in aliarum va-
riabilium facta ductis, hoc est fluxio quantitatis
 zy , est $zdy + ydz$, fluxio quantitatis az est
 $a dz$, fluxio quantitatis zyx est $yx dz + xz dy$
 $+ zy dx$. — Dem. Recta $C B$, fluens super



rectâ AB cui norma-
lis est, progrediatur, il-
liusque punctum extre-
mum C , describat cur-
vam AC , perveniat
 BC in locum $b c$, et
compleantur rectangu-
la $B F, b f, B E, C f,$
 $E G$; $A B$, dicatur z ,
 BC dicatur y , adeoque
rectangulum $B F$ erit
 z, y . Dum BC , per-
venit in $b c$, incrementum rectanguli $B F$ seu
 zy , æquale est summæ rectangulorum $B E$,
 $E G, C f$; est autem rectangulum $E G$, ad rectan-
gulum $B E$, ut $E c$ ad $B C$, et ad rectangulum
 $C f$ ut $C E$, vel $B b$, ad $F C$, seu $A B$; quare
redeunte $b c$, in locum suum priorem $B C$, et
decrescit BC continuo $E c$, et $E C$ atque tan-
dem ultimò evanescentibus, decrescit quoque et
tandem evanescit, seu fit inassignabilis ratio rec-
tanguli $E G$, ad rectangula $B E$ et $C f$; adeoque
(Lem. 1.) summa duorum rectangulorum $B E$,
 $C f$, fit ultimò æqualis summæ trium rectangu-
lorum $B E, E G, C f$; ergò incrementum nas-
cens rectanguli $B F$, seu zy , æquale est summæ
duorum rectangulorum $B E, C f$, nascentium,
seu summæ factorum ex z , in incrementum nas-
cens ipsius y , et ex y , in incrementum nascentium
ipsius z , adeoque fluxio facti zy (146) est $z dy$
 $+ y dz$. Undè etiam fluxio az est, $a dz$, quia a ,
constans nullam habet fluxionem. Q. e. d.

Jam in facto zyx ponatur $zy = v$, et erit $z \times$
 $y x = v x$, adeoque fluxio facti zyx æqualis
fluxioni facti $v x$; fluxio autem facti $v x$, est $x dv$
 $+ v dx$, et fluxio facti $zy = v$, est $z dy + y dz$
 $= dv$, id est si in fluxione $x dv + v dx$, pro
 v et dv scribantur zy , et $z dy + y dz$, fluxio
facti zyx , nempe $x dv + v dx$, erit $z x dy +$
 $y x dz + zy dx$; et par est ratio aliorum fac-
torum quorumcumque. Q. e. d.

161. Cor. 1. Ponatur singulæ fluentes z, y ,
 x , &c. sibi mutuò semper æquales et ipsius $z z$,
fluxio erit $z dz + z dz = 2 z dz$; fluxio cubi
 z^3 erit $z z dz + z z dz + z z dz = 3 z z dz$
 $= 3 z^2 - 1 dz$; fluxio potentie z^n erit $4 z^3 dz$
 $= 4 z^4 - 1 dz$; et eodem argumento fluxio
potentie cujuscumque z^m erit $m z^{m-1} dz$.

162. Cor. 2. Fluxio quantitatis $z^{\frac{1}{2}}$, est
 $\frac{1}{2} z^{\frac{1}{2}-1} dz = \frac{dz}{2 z^{\frac{1}{2}}}$ nam ponatur $z^{\frac{1}{2}} = y$
et erit $z = y y, dz = 2 y dy$ (161) $dy =$
 $d(z^{\frac{1}{2}}) = dz : 2 y = dz : 2 z^{\frac{1}{2}}$ et generaliter
fluxio quantitatis z^m est $\frac{m}{n} z^{\frac{m}{n}-1} dz = \frac{m}{n} \times$
 $z^{\frac{m}{n}-1} dz$.

163. Cor. 3. Fluxio fractionis $z : y$ seu zy^{-1}
est $y dz - z dy : y y$. Nam fiat $z : y = x$,
erit $z = y x, dz = y dx + x dy$, et $dx = dz : y$
 $y - x dy : y = dz : y - x dy : y y = y dz - x dy :$
 $y y$; fluxio quantitatis $az^m y^n$ est $a m y^n z^{m-1}$
 $dz + a n z^m y^{n-1} dy$ (160.)

164. Fluxiones secundæ ex primis fluxionibus, tertiæ ex secundis, iisdem regulis colliguntur quibus primæ fluxiones ex fluentibus finitis erunt. Ubi tamen sic pergitur ad fluxiones secundas, tertias et sequentes, convenit, quantitatem aliquam ut uniformiter fluentem considerare, et pro ejus fluxione primâ unitatem scribere, pro secundâ verò et sequentibus nihil (148). Exemplum unicum afferemus; sit quærenda fluxio fluxionis $y \, d y : d x$, supponendo quantitatem x uniformiter fluere, adeoque $d x$ constantem seu $= 1$, invenitur fluxio $y \, d d y + d y^2 : d x$.

165. Ex fluxionibus fluentes inveniuntur, operationes instituendo iis contrarias quibus ex fluentibus reperiuntur fluxiones; quare, litterâ S , significante fluentem fluxionis cui præponitur, seu summam primam incrementorum nascentium, vel ultimam evanescentium (147) methodi fluxionum inversæ fundamentates formulæ erunt.

1. $S. d z = z$, et $S. a d z = a z$. $S. d z : a = z : a$.

2. $S. m z^m - 1 d z = z^m$,

et $S. m a z^m - 1 d z = a z^m$,

et $S. \frac{m}{n} z^m - n : n d z = z^m : n$.

3. $S. (d z + d y) = z + y$.

4. $S. (z d y + y d z) = y z$.

et $S. (a m y^n z^m - 1 d z + a n x^m y^n - 1 d y) = a z^m y^n$.

5. $S. (y d z - z d y) : y y = z : y$.

166. Si fluxio, cujus fluens quæritur, nulli harum formularum similis fuerit, per novarum variabilium substitutionem aliasque artes quas hic tractare nobis non licet, ad illas sæpè reduci potest. Sit in exemplum fluxio $c b + c x^{\frac{1}{2}} \times d x$, ponatur $c b + c x^{\frac{1}{2}} = z$ et erit $c b + c x = z^2$, et $c d x = 2 z d z$, et $d x = \frac{2 z d z}{c}$.

adeoque $c b + c x^{\frac{1}{2}} \times d x = 2 z z d z : c$. Hæc autem fluxio similis est formulæ $m a \times z^m - 1 d z$, estque $z^2 = z^m - 1$, adeoque $m = 3$, $m a = 3 a = 2 : c$, et $a = 2 : 3 c$, adeoque $S. m a z^m - 1 d z = a z^m = 2 z^3 : 3 c$ loco z , scribatur ipsius valor $c b + c x^{\frac{1}{2}}$, et invenietur $S. c b + c x^{\frac{1}{2}} \times d x = \frac{2}{3} c (c b + c x) \times c b + c x^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} (b + x) \times c b + c x^{\frac{1}{2}}$.

167. Superiarum formularum auxilio et fluxionibus secundis primæ, ex tertiis secundæ, &c. inveniuntur. Exempla sint $S. d d x = d x$. $S. d x. d d x = \frac{1}{2} d x d x = \frac{1}{2} d x^2$. Nam ponatur $d x = y$, et erit $d d x = d y$, et $d x d d x = y d y$,

et per formulam secundam invenitur $S. y d y = \frac{1}{2} y y$, et si loco y substituaturs ipsius valor, $d x$, erit $S. y d y = S. d x d d x = \frac{1}{2} d x^2$. Similiter. $S. (d y^2 + y d d y) : d x = y d y : d x$, supponendo $d x$ constantem, nam fiat $d d y = d v$, adeoque $d y = v$, et fluxio proposita evadet, $v d y + y d v : d x$, cujus fluens (per formulam 4am) est $v y : d x$, ob $d x$ constantem. Cum autem sit $v = d y$, erit $v y : d x = y d y : d x$.

168. Postquam fluentes ex fluxionibus collectæ sunt, si de veritate conclusionis dubitatur, fluxiones fluentium inventarum vicissim colligendæ sunt, et cum fluxionibus sub initio propositis comparandæ. Nam si prodeunt æquales, conclusio rectè se habet; sin minus, corrigendæ sunt fluentes sic, ut earum fluxiones fluxionibus sub initio propositis æquantur. Nam et fluens pro lubitu assumi potest, et assumptio corrigi, ponendo fluxionem fluentis assumptæ æqualem fluxioni propositæ, et terminos homologos inter se comparando.

169. Quoniam constantis quantitatis nulla est fluxio, et eadem proinde fluxio $d z$ ex fluentibus z , et $z + a$, colligitur; fluens omnis quæ ex fluxione primâ colligitur, augeri potest vel minui quantitate aliquâ constante; quæ ex fluxione secundâ colligitur, augeri potest vel minui quantitate cujus fluxio secunda nulla est; quæ ex fluxione tertiâ colligitur, augeri potest vel minui quantitate cujus fluxio tertiâ nulla est. Et sic deinceps in infinitum.

170. Cum fluens composita, quæ ex propositâ fluxione collecta est, unicam variabilem includit, ut fluens $\frac{2}{3} (b + x) \times \overline{b c + c x^{\frac{1}{2}}}$, quæ (166) deducta est ex fluxione $c b + c x^{\frac{1}{2}} \times d x$, ita determinari solet constans adjungenda vel detrahenda: in fluente inventâ loco variabilis x , ponitur 0; tum si fluens ipsa sit etiam 0, completa est. Si quid verò residuum fuerit, ut hic remanet $+\frac{2}{3} b \sqrt{b c}$, hoc residuum cum signo contrario fluenti primò inventæ adjicitur, ut habeatur fluens completa, $\frac{2}{3} (b + x) \times \overline{b c + c x^{\frac{1}{2}}} - \frac{2}{3} b \sqrt{b c}$. Hujus regulæ ratio est, quod fluens inventa supponi possit exhibere aream curvæ alicujus, cujus sit abscissa variabilis x , adeo ut dum $x = 0$; area, fluente expressâ, sit etiam 0; unde si in fluente primò inventâ loco x , substituaturs 0, sitque aliquod residuum, illud ex fluente detrahi debet. Generaliter, quantitas constans adjicienda vel subducenda ex naturâ quæstionis determinatur, aut arbitraria est.

SECTIO II.

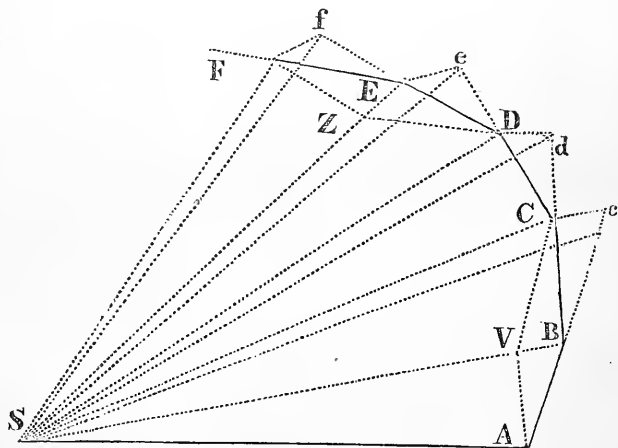
De Inventione Virium Centripetarum.

PROPOSITIO I. THEOREMA I.

Areas, quas corpora in gyros acta radiis ad immobile centrum virium ductis describunt, et in planis immobilibus consistere, et esse temporibus proportionales.

Dividatur tempus in partes æquales, et primâ temporis parte describat corpus vi insitâ rectam AB . Idem secundâ temporis parte, si nil impediret, rectâ pergeret ad c , (per leg. 1.) describens lineam Bc æqualem ipsi AB ; adeò ut radiis AS , BS , cS ad centrum actis, confectæ forent

æquales areæ ASB , $BS c$. Verùm ubi corpus venit ad B , agat vis centripeta impulsu unico sed magno, efficiatque ut corpus de recta Bc declinet et pergat in rectâ BC . Ipsi BS parallela agatur cC , occurrens BC in C ; et completâ secundâ temporis parte, corpus (per legum Corol. 1.) reperietur in C , in eodem ^(a) plano cum triangulo ASB . Junge SC ; et triangulum $SB C$, ob parallelas SB , Cc , æquale erit

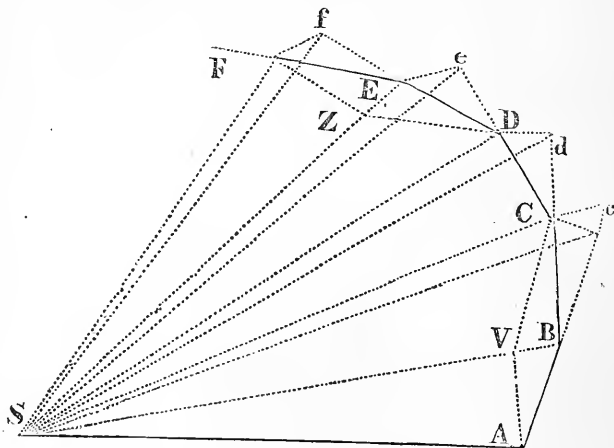


(a) 171. Reperitur in C , in eodem plano cum triangulo ASB ; nam diagonalis BC , plano parallelogrammi $VB c C$, cujus latera BV , Bc , viribus separatim describenda, sunt in plano trianguli ASB .
E

triangulo $S B c$, atque ideo etiam triangulo $S A B$. Simili argumento si vis centripeta successivè agat in C , D , E , &c. faciens ut corpus singulis temporis particulis singulas describat rectas $C D$, $D E$, $E F$, &c. jacebunt hæ omnes

in eodem plano; et triangulum $S C D$ triangulo $S B C$, et $S D E$ ipsi $S C D$, et $S E F$ ipsi $S D E$ æquale erit.

Æqualibus igitur temporibus æquales areae in plano immoto describuntur: et componendo, sunt arearum summæ quævis



$S A D S$, $S A F S$ inter se, ut sunt tempora descriptionum. Augeatur jam numerus et minuatur latitudo triangulorum in infinitum; et eorum ultima perimeter $A D F$, (per Corollarium quartum Lemmatis tertii) erit linea curva: ideòque vis centripeta, quâ corpus à tangente hujus curvæ perpetuò retrahitur, aget indesinenter; areae verò quævis descriptæ $S A D S$, $S A F S$ temporibus descriptionum semper proportionales, erunt iisdem temporibus in hoc casu proportionales. Q. e. d.

Corol. 1. Velocitas corporis in centrum immobile attracti est in spatiis non resistantibus reciprocè ut perpendicularum à centro illo in orbis tangentem rectilineam demissum. ^(b) Est enim velocitas in locis illis A , B , C , D , E , ut sunt bases æqualium triangulorum $A B$, $B C$, $C D$, $D E$, $E F$; et hæ bases sunt reciprocè ut perpendiculara in ipsas demissa.

Corol. 2. Si arcum duorum æqualibus temporibus in spatiis non resistantibus ab eodem corpore successivè descriptorum chordæ $A B$, $B C$ compleantur in parallelogrammum $A B C V$, et hujus diagonalis $B V$ in eâ positione quam ultimò habet ubi arcus illi in infinitum diminuuntur, producatur utrinque; ^(c) transibit eadem per centrum virium.

Corol. 3. Si arcum æqualibus temporibus in spatiis non resistantibus

^(b) 172. Est enim velocitas in locis illis A , B , C , D , E , ut sunt bases æqualium triangulorum $A B$, $B C$, $C D$, $D E$, $E F$, æqualibus temporibus uniformi motu descriptæ ⁽⁵⁾; æqua-

lium autem triangulorum bases sunt reciprocè ut eorum altitudines, hoc est, reciprocè ut perpendiculara ex centro virium S , in bases demissa. Cum igitur evanescentibus triangulis

descriptorum chordæ AB , BC ac DE , EF compleantur in parallelogramma $ABCV$, $DEFZ$; vires in B et E sunt ad invicem in ultimâ ratione diagonalium BV , EZ , ubi arcus isti in infinitum diminuuntur. Nam corporis motus BC et EF componuntur (per legum Corol. 1.) ex motibus Bc , BV et Ef , EZ : atqui BV et EZ , ipsis Cc et Ff æquales, in demonstratione propositionis hujus generabantur ab impulsibus vis centripetæ in B et E , ideòque sunt his impulsibus proportionales.

Corol. 4. Vires quibus corpora quælibet in spatiis non resistentibus à motibus rectilineis retrahuntur ac detorquentur in orbes curvos, sunt inter se ut arcuum æqualibus temporibus descriptorum sagittæ illæ quæ convergunt ad centrum virium, et chordas bisecant ubi arcus illi in infinitum diminuuntur. ^(d) Nam hæ sagittæ sunt semisses diagonalium, de quibus egimus in Corollario tertio.

Corol. 5. Ideoque vires eadem sunt ad ^(e) vim gravitatis, ut hæ sagittæ ad sagittas horizonti perpendiculares arcuum parabolicorum, quos projectilia eodem tempore describunt.

Corol. 6. Eadem omnia obtinent per legum Corol. v. ubi plana, in quibus corpora moventur, unâ cum centris virium, quæ in ipsis sita sunt, non quiescunt, sed moventur uniformiter in directum.

ASB , $BS C$, &c. Ultima perimeter $ABCD$ EF , sit linea curva quam (115) rectæ $A c$, $B d$, $C e$, $D f$, tangunt in punctis A , B , C , D , E , manifestum est velocitates in illis punctis esse reciprocè ut perpendiculara à centro S , in tangentes demissa.

^(c) 173. Transibit eadem per centrum virium. Nam ex demonstratione propositionis hujus, sumptâ $BV = Cc$, erit VC , æqualis et parallela lineæ Bc , seu AB , adeòque VA , BC , erunt etiam æquales et parallelæ, et BV , quæ producta transit per centrum S , erit diagonalis parallelogrammi $ABCV$.

174. Si ducantur per puncta quævis B , et D , perimetri curvæ vel diversarum curvarum tangentes Bc , $D e$, et demittantur angulorum contactuum subtensæ Cc , $E e$, radii SB , SD , ad

centrum virium convergentibus parallelæ, sintque arcus BC , DE , æqualibus temporibus descripti, patet ex Corollario 5. vires centripetas in B et D , esse ad invicem in ultimâ ratione subtensarum Cc , $E e$.

^(d) 175. Nam hæ sagittæ sunt semisses diagonalium BV , EZ , diagonales enim AC , DF , quæ sunt chordæ arcuum evanescentium $AB C$, $DE F$, alias diagonales BV , EZ , bisecant.

^(e) 176. Vis enim gravitatis per lineas parallelas ad horizontem perpendiculares agit, et gravia obliquè projecta parabolas describunt (40), quod etiam in figurâ superiori contingeret, si centrum virium S , in infinitum abiret, et vis centripeta in omnibus punctis A , B , C , D , eadem maneret.

Cas. 2. Et, per Legum Corollarium quintum, perinde est, sive quiescat superficies, in quâ corpus describit figuram curvilineam, sive moveatur eadem unâ cum corpore, figurâ descriptâ, et puncto suo S uniformiter in directum.

Corol. 1. In spatiis vel mediis non resistentibus, si areae non sunt temporibus proportionales, vires non tendunt ad concursum radiorum; (^g) sed indè declinant in consequentia, seu versus plagam in quam fit motus, si modo arearum descriptio acceleratur: sin retardatur, declinant in antecedentia.

Corol. 2. (^h) In mediis etiam resistentibus, si arearum descriptio acceleratur, virium directiones declinant à concursu radiorum versus plagam, in quam fit motus.

Scholium.

Urgeri potest corpus à vi centripetâ compositâ ex pluribus viribus. In hoc casu sensus propositionis est, quod vis illa quæ ex omnibus componitur, tendit ad punctum S. (ⁱ) Porro si vis aliqua agat perpetuò secundum lineam superficiei descriptæ perpendicularem; hæc faciet ut corpus deflectatur à plano sui motus: sed quantitatem superficiei descriptæ nec augebit nec minuet, et propterea in compositione virium negligenda est.

PROPOSITIO III. THEOREMA III.

Corpus omne, quod radio ad centrum corporis alterius utcumque moti ducto describit areas circa centrum illud temporibus proportionales, urgetur vi compositâ ex vi centripetâ tendente ad corpus illud alterum, et ex vi omni acceleratrice quâ corpus illud alterum urgetur.

(^k) Sit corpus primum L, et corpus alterum T: et (per legum

(^g) 178. Sed indè declinant in consequentia, si modò arearum descriptio acceleratur: sin retardatur, declinant in antecedentia. Nam si triangulum S B C, æquale non est triangulo S A B, seu S B c, eodem tempore descripto, recta C c, non erit parallela lineæ B S, sed producta cum lineâ S B, itâ converget ut tendat in plagam motûs, si triangulum S B C, triangulo S B c, majus est, et tendat in plagam contrariam si triangulum S B C, triangulo S B c, minus. Quarè vis centripeta in B, agens secundum directionem parallelam lineæ C c, in primo casu declinat in consequentia, in secundo casu declinat in antecedentia.

(^h) 179. Cum enim medium resistat accelerationi descriptiæ arearum, liquet arearum de-

scriptionem etiam sublatâ medii resistentiâ accelerari oportere, ac proindè per Coroll. 1. virium directiones declinare à concursu radiorum, in S, versus plagam in quam fit motus.

(ⁱ) 180. Porro si vis illa perpetuò secundum lineam superficiei descriptæ perpendicularem agat, planum subiectum duntaxat premit, et corpus in illo plano motum in neutram partem impellit, ac proindè nec superficiei descriptæ quantitatem auget nec minuit, et propterea in compositione virium in plano agentium negligenda est.

(^k) 181. Corpus L, circâ alterum T, in curvâ A L B, itâ revolvatur, ut circâ illius centrum T, semper describat areas temporibus proportionales, dum interim corpus T, urgetur vi acceleratrice secundum directionem T Q, et per

Corol. 6.) si vi novâ, quæ æqualis et contraria sit illi, quâ corpus alterum T urgetur, urgeatur corpus utrumque secundum lineas parallelas; perget corpus primum L describere circa corpus alterum T areas easdem ac prius: vis autem, qua corpus alterum T urgebatur, jam destruetur per vim sibi æqualem et contrariam; et propterea (per Leg. I.) corpus illud alterum T sibimet ipsi jam relictum vel quiescet, vel movebitur uniformiter in directum: et corpus primum L urgente differentiâ virium, id est, urgente vi reliquâ perget areas temporibus proportionales circa corpus alterum T describere. Tendit igitur (per Theor. II.) differentia virium ad corpus illud alterum T ut centrum. Q. e. d.

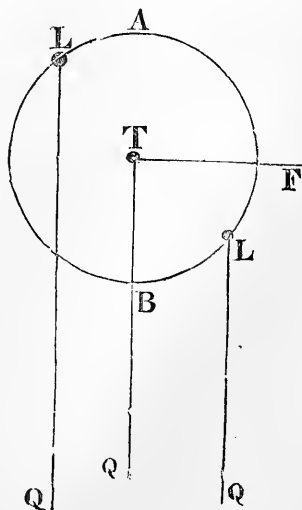
Corol. 1. Hinc si corpus unum L radio ad alterum T ducto describit areas temporibus proportionales; atque de vi totâ (sive simplici, sive ex viribus pluribus juxta Legum Corollarium secundum compositâ) quâ corpus prius L urgetur, subducatur (per idem Legum Corollarium) vis tota acceleratrix, qua corpus alterum urgetur: vis omnis reliqua, quâ corpus prius urgetur, tendet ad corpus alterum T ut centrum.

Corol. 2. Et, si areæ illæ sunt temporibus quamproximè proportionales, vis reliqua tendet ad corpus alterum T quamproximè.

Corol. 3. Et vice versâ, si vis reliqua tendit quamproximè ad corpus alterum T, erunt areæ illæ temporibus quamproximè proportionales.

Corol. 4. Si corpus L radio ad alterum corpus T ducto describit areas, quæ cum temporibus collatæ sunt valde inæquales; et corpus illud al-

Leg. Corol. 6. si vi novâ acceleratrice quæ æqualis et contraria sit illi quâ corpus T secundum directionem T Q urgetur, urgeatur corpus utrumque secundum lineas parallelas Q T, Q L; perget corpus L, describere circa corpus T, areas easdem ac prius; vis autem acceleratrix quâ corpus T urgebatur jam destruetur per vim sibi æqualem et contrariam; et propterea, per Leg. I. corpus illud T, sibimet ipsi jam relictum vel quiescet vel movebitur uniformiter in directum; nimirum quiescet, si nullâ aliâ vi præter acceleratricem secundum directionem T Q, antè urgebatur; movebitur verò æquabiliter per rectam aliquam T F, si præter vim acceleratricem per T Q, agentem, aliâ vi non acceleratrice ferebatur juxta directionem T F, &c.



terum T vel quiescit, vel movetur uniformiter in directum: actio vis centripetæ ad corpus illud alterum T tendentis vel nulla est, vel miscetur et componitur cum actionibus admodum potentibus aliarum virium: visque tota ex omnibus, si plures sunt vires, composita ad aliud (sive immobile sive mobile) centrum dirigitur. Idem obtinet, ubi corpus alterum motu quocunque movetur; si modo vis centripeta sumatur, quæ restat post subtractionem vis totius in corpus illud alterum T agentis.

Scholium.

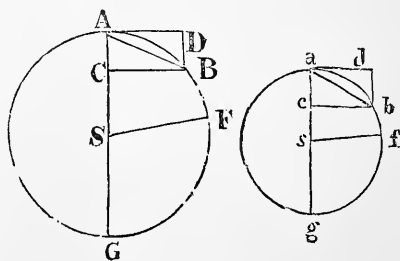
Quoniam æquabilis arearum descriptio index est centri, quod vis illa respicit, quâ corpus maximè afficitur, quâque retrahitur a motu rectilineo, et in orbita sua retinetur; quidni usurpemus in sequentibus æquabilem arearum descriptionem ut indicem centri, circum quod motus omnis circularis in spatiis liberis peragitur?

PROPOSITIO IV. THEOREMA IV.

Corporum, quæ diversos circulos æquabili motu describunt, vires centripetas ad centra eorundem circulorum tendere; et esse inter se, ut sunt arcuum simul descriptorum quadrata applicata ad circulorum radios.

(¹) Tendunt hæ vires ad centra circulorum per Prop. II. et Corol. 2. Prop. I. et sunt inter se ut arcuum æqualibus temporibus quam minimis descriptorum sinus versi per Corol. 4. Prop. I. hoc est; ut quadrata arcuum eorundem ad diametros circulorum applicata per Lem. VII. et propterea,

(¹) 182. Corpora duo A et a, circulos ABGA, abga, æquabili motu describant, et aræ seu sectores ASF, FSG, et asf, fsg, erunt in singulis circulis ut arcus AF, FG, et a f, fg; hoc est (5) ut tempora quibus describuntur, ac proinde vires quibus corpora A et a, in periphereis ABGA, abga retinentur tendunt ad centra S et s. Sint arcus AB, ab, æqualibus temporibus quam minimis descripti, et ductis tangentibus AD, ad, et ad eas perpendicularibus BD, bd, completisque parallelogrammis CD, cd, vires centripetæ in A et a, erunt inter se ut rectæ DB, db, seu ut sinus versi AC, ac, (174). Verùm ductis chordis AB, ab, est AC:AB=AB:AG, et ac:a=ab:ag, undè $AC = \frac{AB^2}{AG}$, et $ac = \frac{ab^2}{ag}$; cum igitur chordæ et arcus nascentes æquales sint (per Lem. VII.) erit AC:ac, hoc est, vis



centripeta in A, ad vim centripetam in a, ut quadratum arcus evanescentis AB diametro AG divisum, ad quadratum arcus evanescentis, ab, diametro ag, divisum et propterea cum hi arcus, &c.

cùm hi arcus sint ut arcus temporibus quibusvis æqualibus descripti, et diametri sint ut eorum radii; vires erunt ut arcuum quorumvis simul descriptorum quadrata applicata ad radios circulorum. Q. e. d.

Corol. 1. Cum arcus illi sint ut velocitates corporum, vires centripetæ erunt in ratione compositâ ex duplicatâ ratione velocitatum directè, et ratione simplici radiorum inversè. (^m)

Corol. 2. (ⁿ) Et, cum tempora periodica sint in ratione compositâ ex ratione radiorum directè, et ratione velocitatum inversè; (^o) vires centripetæ sunt in ratione compositâ ex ratione radiorum directè, et ratione duplicatâ temporum periodicorum inversè.

Corol. 3. (^p) Unde si tempora periodica æquantur, et propterea velocitates sint ut radii; erunt etiam vires centripetæ ut radii: et contra.

Corol. 4. (^q) Si et tempora periodica, et velocitates sint in ratione subduplicatâ radiorum; (^r) æquales erunt vires centripetæ inter se: et contra.

Corol. 5. (^s) Si tempora periodica sint ut radii, et propterea velocitates æquales; vires centripetæ erunt reciproce ut radii: et contra.

(^m) 183. Vis centripeta quâ corpus in peripheriâ circuli uniformiter incedens retinetur, est in omnibus peripheriâ punctis eadem, ut pote semper proportionalis constantis velocitatis quadrato ad radium constantem applicato.

(ⁿ) 184. Tempora periodica, hoc est, tempora quibus integræ peripheriæ describuntur, sunt in ratione compositâ ex ratione radiorum directè et ratione velocitatum inversè. Nam (⁵) velocitates sunt ut peripheriæ ad tempora periodica applicatæ, sed peripheriæ sunt ut radii, ergo velocitates sunt ut radii ad tempora periodica applicati, ac proindè tempora periodica sunt ut radii directè et velocitates inversè. Si corporum A et a, tempora periodica dicantur T et t, celeritates C et c, radii A S, a s, dicantur R et r, erit

$$C : c = \frac{R}{T} : \frac{r}{t} \text{ idèoque } T : t = \frac{R}{C} : \frac{r}{c}.$$

(^o) 185. Vires centripetæ sunt reciproce ut quadrata temporum periodicorum applicata ad circulorum radios; nam vires centripetæ corporum A et a, dicantur V et v, erit (per Coroll. 1.)

$$V : v = \frac{C^2}{R} : \frac{c^2}{r}, \text{ sed quoniam (184) } C : c =$$

$$\frac{R}{T} : \frac{r}{t}, \text{ adeoque } C^2 : c^2 = \frac{R^2}{T^2} : \frac{r^2}{t^2} \text{ erit}$$

$$\frac{C^2}{R} : \frac{c^2}{r} = \frac{R}{T^2} : \frac{r}{t^2} \text{ ergò } V : v = \frac{R}{T^2} : \frac{r}{t^2}$$

$$= t^2 R : T^2 r = \frac{t^2}{r} : \frac{T^2}{R}.$$

(^p) 186. Undè si tempora periodica æquantur

et propterea (¹⁸⁴) velocitates sint ut radii, erunt etiam vires centripetæ ut radii, nam cum sit (¹⁸⁵) $V : v = t^2 R : T^2 r$, si $T^2 = t^2$, erit $V : v = R : r$.

Et contrà si vires centripetæ sint ut radii, tempora periodica æquantur. Cum enim sit (¹⁸⁵) $V : v = t^2 R : T^2 r$, si ponatur $V : v = R : r$, erit $R : r = t^2 R : T^2 r$, unde $r t^2 R = R T^2 r$, adeoque $t^2 = T^2$, et $t = T$.

(^q) 187. Si tempora periodica sint in ratione subduplicatâ radiorum, velocitates erunt in eadem ratione. Nam (¹⁸⁴) $C : c = \frac{R}{T} : \frac{r}{t}$ adeoque

$$C^2 : c^2 = \frac{R^2}{T^2} : \frac{r^2}{t^2}. \text{ Undè si fuerit}$$

$$T : t = R^{\frac{1}{2}} : r^{\frac{1}{2}} \text{ ac proindè } T^2 : t^2 = R : r, \text{ erit } C^2 : c^2 = R : r.$$

Et contrà si fuerit $C^2 : c^2 = R : r$, erit $\frac{R^2}{T^2} : \frac{r^2}{t^2} = R : r$, adeoque $\frac{R}{T^2} = \frac{r}{t^2}$, et $R t^2 = r T^2$, unde $T^2 : t^2 = R : r$.

(^r) 188. Si et tempora periodica ac proindè velocitates (¹⁸⁷) sint in ratione subduplicatâ radiorum, æquales erunt vires centripetæ inter se. Cum sit (¹⁸⁵) $V : v = t^2 R : T^2 r$ si ponatur $T^2 : t^2 = R : r$, erit $t^2 R = T^2 r$, unde $V = v$.

Et contrà si $V = v$, cum sit (¹⁸⁵) $V : v = t^2 R : T^2 r$, erit $t^2 R = T^2 r$, et proindè $T^2 : t^2 = R : r$.

(^s) 189. Si tempora periodica sunt ut radii et propterea (¹⁸⁴) velocitates æquales, vires centripetæ erunt reciproce ut radii. Quoniam

Corol. 6. (t) Si tempora periodica sint in ratione sesquiplicatâ radiorum, et propterea velocitates reciproce in radiorum ratione subduplicatâ; (u) vires centripetæ erunt reciproce ut quadrata radiorum: et contra.

Corol. 7. Et universaliter, si (x) tempus periodicum sit ut radii R potestas quælibet R^n , et propterea velocitas reciproce ut radii potestas R^{n-1} ; (y) erit vis centripeta reciproce ut radii potestas R^{2n-1} : et contra.

Corol. 8. (z) Eadem omnia de temporibus, velocitatibus, et viribus,

enim (per Coroll. 1.) $V : v = \frac{C^2}{R} : \frac{c^2}{r}$ si $C^2 = c^2$, erit $V : v = \frac{1}{R} : \frac{1}{r}$.

Et contrâ si fuerit $V : v = \frac{1}{R} : \frac{1}{r}$, cum sit (Coroll. 1.) $V : v = \frac{C^2}{R} : \frac{c^2}{r}$ erit $\frac{1}{R} : \frac{1}{r} = \frac{C^2}{R} : \frac{c^2}{r}$, adeoque $C^2 = c^2$, et $C = c$.

(t) 190. Si tempora periodica sint in ratione sesquiplicatâ radiorum, erunt velocitates reciproce in ratione radiorum subduplicatâ; nam quoniam (184) $C : c = \frac{R}{T} : \frac{r}{t}$, adeoque $C^2 : c^2 = \frac{R^2}{T^2} : \frac{r^2}{t^2}$ si fuerit $T^2 : t^2 = R^3 : r^3$,

erit $C^2 : c^2 = \frac{R^2}{R^3} : \frac{r^2}{r^3} = \frac{1}{R} : \frac{1}{r} = R : R$.

Et contrâ si fuerit $C^2 : c^2 = R : R$, erit $\frac{R^2}{T^2} : \frac{r^2}{t^2} = R : R$ adeoque $\frac{R^3}{T^2} = \frac{r^3}{t^2}$ et $R^3 : r^3 = T^2 : t^2$.

(u) 191. Si tempora periodica sint in ratione sesquiplicatâ radiorum et propterea (190) velocitates reciproce in radiorum ratione subduplicatâ, vires centripetæ erunt reciproce ut quadrata radiorum. Nam cum sit (185) $V : v = t^2 R : T^2 r$; si fuerit $T^2 : t^2 = R^3 : r^3$, erit $V : v = r^3 R : R^3 r = r^2 : R^2$.

Et contrâ si $V : v = r^2 : R^2$, erit (185) $r^2 : R^2 = t^2 R : T^2 r$ ac proinde $t^2 R^3 = T^2 r^3$; et $R^3 : r^3 = T^2 : t^2$.

(x) 192. Si tempora periodica sint ut radiorum potestates quælibet R^n, r^n , velocitates erunt reciproce ut radiorum potestates R^{n-1}, r^{n-1} . Nam ponatur $T : t = R^n : r^n$, et quoniam (184) $C : c = \frac{R}{T} : \frac{r}{t}$, erit $C : c =$

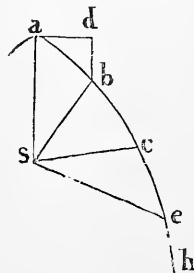
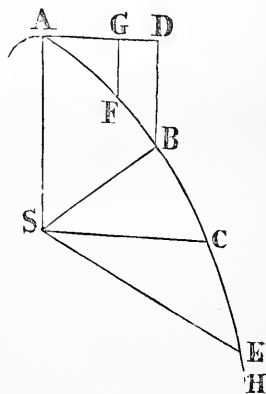
$\frac{R}{R^n} : \frac{r}{r^n} = \frac{1}{R^{n-1}} : \frac{1}{r^{n-1}} = R^{n-1} : R^{n-1}$.

Et contrâ si fuerit $C : c = R^{n-1} : R^{n-1}$, erit $\frac{R}{T} : \frac{r}{t} = R^{n-1} : R^{n-1}$, adeoque $\frac{R^n}{T} = \frac{r^n}{t}$, undè $R^n : r^n = T : t$.

(y) 193. Et universaliter si tempora periodica sint ut radiorum potestates quælibet R^n, r^n et propterea (192) velocitates reciproce ut radio-

rum potestates R^{n-1}, r^{n-1} , erunt vires centripetæ reciproce ut radiorum potestates R^{2n-1}, r^{2n-1} . Nam ponatur $T : t = R^n : r^n$ adeoque $T^2 : t^2 = R^{2n} : r^{2n}$; et cum sit (185) $V : v = t^2 R : T^2 r$, erit $V : v = R r^{2n} : r R^{2n} = R^{2n-1} : R^{2n-1}$.

Et contrâ si fuerit $V : v = R^{2n-1} : R^{2n-1}$; cum sit $V : v = t^2 R : T^2 r$, erit $r^{2n-1} : R^{2n-1} = t^2 R : T^2 r$, adeoque $t^2 \times R^{2n} = T^2 r^{2n}$, undè $T^2 : t^2 = R^{2n} : r^{2n}$; et $T : t = R^n : r^n$.



(z) 194. Corpora A et a, figurarum simili.

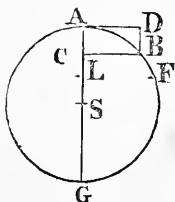
Corol. 9. (a) Ex eâdem demonstratione consequitur etiam, quod arcus, quem corpus in circulo datâ vi centripetâ uniformiter revolvendo tempore quovis describit, medius est proportionalis inter diametrum circuli, et descensum corporis eâdem datâ vi eodemque tempore cadendo confectum.

$\frac{r^2}{t^2}$. Et quoniam (195) $V : v = \frac{C^2}{R} : \frac{c^2}{r}$,
erit $V : v = \frac{R}{T^2} : \frac{r}{t^2} = t^2 R : T^2 r =$
 $\frac{t^2}{r} : \frac{T^2}{R}$, hoc est, vires centripetæ sunt

reciprocè ut quadrata temporum periodicorum ad radios homologos applicata. Cùm igitur cætera omnia de temporibus, velocitatibus et viribus in circulis corollaria, ex superioribus proportionibus deducta sint, evidens est eadem omnia convenire temporibus, velocitatibus, et viribus, quibus corpora similes figurarum quarumcumque similium, centraque in figuris illis similiter posita habentium, partes describunt.

(a) 198. Corpus A uniformiter revolvatur in circuli peripheriâ A B G A, et idem vel aliud corpus ex puncto A, per radium A S, eâdem vi centripetâ quâ corpus A in circuli peripheriâ retinetur continuò itâ urgeatur ut (vi illâ centripetâ constanti permanente, quemadmodum fit in corporibus vi gravitatis constante cadentibus) corpus illud cadendo percurrat A L, eodem tempore quo corpus A, uniformiter describit arcum A F. Quoniam vis acceleratrix per radium A S, constans est et continuò agit (per hyp.) corpus per A S, motu uniformiter accelerato cadit (25) et spatia percurra sunt ut quadrata temporum quibus percurrunt (27), ducatur per A, tangens A D, et sumpto arcu minimo A B, in tangentem demittatur perpendicularis B D, et compleatur rectangulum C D, eodem tempore quo corpus A, æquabili motu describit arcum A B, per vim centripetam percurrit D B, seu A C, (ex Coroll. 3. Prop. 1^a.) erit igitur A C, ad A L ut quadratum temporis per A B, ad quadratum temporis per A F, hoc est, ob motum in circulo æquabilem $A C : A L = A B^2 : A F^2 = A B^2 : A F^2$ $A G : A G$; cum igitur ob arcum nascentem A B, suæ chordæ æqualem, sit $A C = A B^2$ $A G$, erit quoque $A L = \frac{A F^2}{A G}$ atque adeò $A L \times A G = A F^2$ et proinde $A L : A F = A F : A G$.

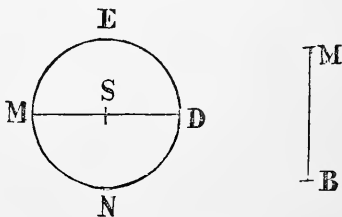
199. *Coroll. 1.* Velocitas quâ corpus A, peripheriam circuli A F G A, uniformiter describit, æqualis est velocitati quam acquireret cadendo per dimidium radium A S, si vi centripetâ constanti continuò urgeretur æquali illi quâ corpus A in peripheriâ circuli retinetur: Nam sit A L



altitudo per quam A cadere debet ut acquirat velocitatem quâ peripheria circuli describitur, sitque A F arcus eo tempore descriptus quo A cadit per A L eodem etiam tempore motu æquabili percurreretur, $2 A L$ per velocitatem eam in L acquisitam (50), adeoque erit $A F = 2 A L$ siquidem eodem tempore eademque celeritate æquabili percurrunt, sed est semper $A F^2 = A L \times A G$ (198) cum igitur sit $2 A L = A F$ ac proinde $4 A L^2 = A F^2$ erit $4 A L^2 = A L \times A G$ et $4 A L = A G$ et $A L = \frac{A G}{4} = \frac{A S}{2}$.

200. *Coroll. 2.* Tempus revolutionis per integram peripheriam est ad tempus descensus uniformiter accelerati per dimidium radium, ut peripheria ad radium. Nam eodem tempore quo dimidius radius motu uniformiter accelerato percurritur, totus radius describeretur cum æquabili velocitate lapsus per dimidium radium acquisitâ (30) eâ verò ipsa celeritate corpus circuli peripheriam (199) describit. Ergo cum spatia eadem velocitate uniformi percurra, sint ut tempora (5) patet propositum.

201. *Coroll. 3.* Hinc datâ vi centripetâ quâlibet in datâ a centro distantia, facile est reperire velocitatem quâ corpus projici debet ut circa prædictum centrum in datâ distantia circumum uniformiter describat; velocitas enim illa æqualis est velocitati quam corpus acquireret cadendo per dimidiam distantiam a centro, si datâ vi centripetâ continuò urgeretur (199). Dato autem circuli radio, datur peripheria, et datâ æquabili in circulo velocitate cum peripheriâ, invenitur tempus periodicum, et arcus dato quovis tempore descriptus habetur.



202. *Coroll. 4* Datis circuli radio et velocitate corporis in eo revolvantis, facile colligitur proportio vis centripetæ in eo circulo ad vim quamlibet notam, qualis est vis gravitatis. Primum enim inveniatur tempus revolutionis unius in eo circulo peractæ (5), mox inveniatur tempus

Scholium.

(^b) Casus Corollarii sexti obtinet in corporibus cœlestibus, (ut seorsum collegerunt etiam nostrates Wrennus, Hookius et Halleius) et propterea quæ spectant ad vim centripetam decrescentem in duplicatâ ratione distantiarum a centris, decrevi fusiùs in sequentibus exponere.

Porro præcedentis Propositionis et Corollariorum ejus beneficio, colligitur etiam proportio vis centripetæ ad vim quamlibet notam, qualis est ea gravitatis. Nam si corpus in circulo terræ concentrico vi gravitatis suæ revolvatur, hæc gravitas est ipsius vis centripeta. Datur autem ex decensu gravium, et tempus revolutionis unius, et arcus dato quovis tempore descriptus, per hujus Corol. IX. Et (^c) hujusmodi propositionibus

quo corpus vi illâ centripetâ continuò sollicitatum per dimidium radium caderet (200). Ex datâ autem vi gravitatis seu ex dato spatio quod grave liberè cadendo, dato quodam tempore percurrit, invenitur (27) spatium ab eodem gravi percursum eo tempore quo corpus vi centripetâ sollicitatum per dimidium radium cadit, sed vires acceleratrices constantes, rationem habent spatiorum quæ dato tempore percurrere faciunt (50) est ergo vis ea centripeta ad vim gravitatis, ut dimidius circuli radius ad spatium id quod grave percurreret eo tempore quo corpus vi centripetâ sollicitatum dimidium illum radium percurrit.

Exempli causâ. Corpus M, ope fili M S clavo in S alligatî, circâ centrum S uniformiter describat circum M N D E, in plano horizontali positum, eaque sit corporis revolvantis celeritas quæ acquiritur a gravi per altitudinem M B cadente, quæritur ratio vis centripetæ in circulo ad vim gravitatis. Tempus quo grave cadit per altitudinem M B, dicatur T, et velocitas in B acquisita, quâ (ex hyp.) corpus M circuli peripheriam uniformiter describit, erit $\frac{2 M B}{T}$ (30), peripheria circuli dicatur p, et cum tempus periodicum in circulo sit æquale peripheriæ ad velocitatem $\frac{2 M B}{T}$ applicatæ (5) erit id

tempus periodicum $\frac{p \times T}{2 M B}$; jam verò est peripheria ad radium (200) ut tempus periodicum ad tempus quo corpus M, solâ vi centripetâ constante sollicitatum, dimidium radium M S percurrit, sive $p : M S = \frac{p \times T}{2 M B}$ ad tempus per dimidium radium quod est ideo $\frac{T \times M S}{2 M B}$. Cum autem grave tempore T altitudinem M B

sit emensum, et in motu uniformiter accelerato spatia percurra sint ut quadrata temporum quibus percurruntur (27) erit T^2 ad $\frac{T^2 \times M S^2}{4 M B^2}$

seu $4 M B^2$ ad $M S^2$ ut spatium M B tempore T percursum ad spatium percursum tempore $\frac{T \times M S}{2 M B}$, quo corpus, M, vi centripetâ per-

currit dimidium radium, quod erit $\frac{M S^2 \times M B}{4 M B^2}$

$= \frac{M S^2}{4 M B}$ est igitur (13) vis centripeta in circulo

ad vim gravitatis ut $\frac{M S}{2}$, ad $\frac{M S^2}{4 M B}$, sive ut $2 M B$ ad $M S$.

(^b) 203. Ex observationibus colligunt astronomi planetas secundarios, ut sunt Jovis vel Saturni Satellites, radiis ad suum planetam primum ductis, areas describere temporibus proportionales, eorumque tempora periodica esse in ratione sesquuplicatâ distantiarum a centro planetæ primarii; planetas verò primarios radiis ad solem ductis, areas describere temporibus proportionales, eorumque tempora periodica esse in ratione sesquuplicatâ radiorum, et vires centripetæ sunt reciprocè ut quadrata radiorum.

(^c) 204. Hugenus ad calcem tractatûs de horologio oscillatorio, de viribus centrifugis in circulo earumque cum vi gravitatis proportionem 13. Theoremata sine demonstratione proposuit. Eorum aliqua in Corollaris Propos. hujusce IV. demonstravit NEWTONUS, viamque aperuit, cui insistendo cætera omnia facili negotio absolvi possunt, quod postea perfecerunt multi insignes Mathematici.

Hugenius in eximio suo tractatu De Horologio Oscillatorio vim gravitatis cum revolvantium viribus centrifugis contulit.

(^d) Demonstrari etiam possunt præcedentia in hunc modum. In circulo quovis describi intelligatur polygonum laterum quocunque. Et si corpus in polygoni lateribus datâ cum velocitate movendo ad ejus angulos singulos a circulo reflectatur; vis, quâ singulis reflexionibus impingit in circulum, erit ut ejus velocitas: ideoque summa virium in dato tempore erit ut velocitas illa, et numerus reflexionum conjunctim: hoc est (si polygonum detur specie) ut longitudo dato illo tempore descripta, et aucta vel diminuta in ratione longitudinis ejusdem ad circuli prædicti radium; id est, ut quadratum longitudinis illius applicatum ad radium: ideoque, si polygonum lateribus infinitè diminutis coincidat cum circulo, ut quadratum arcus dato tempore descripti applicatum ad radium. Hæc est vis centrifuga, quâ corpus urget circulum; et huic æqualis est vis contraria, quâ circulus continuo repellit corpus centrum versus.

(^d) 205. Duo intelligantur polygona similia et regularia circulis duobus inscripta, quorum latera numero crescant et longitudine minuantur in infinitum, et corpora duo in polygonorum lateribus æquabili velocitate ferantur, atque ad singulos angulos a circulo reflectantur. Manifestum est corporum in polygonis revolvantium vires centrifugas non esse mensurandas ex solâ velocitate quâ in singulis angulis incurrunt in circulum et quâ ab illo reflectuntur, sed insuper habendam esse rationem frequentiæ impactuum aut reflexionum, itâ ut si eadem fuerit duorum corporum revolvantium celeritas, vires centrifugæ sint ut numeri impactuum aut reflexionum tempore dato peractarum; nam quò plures sunt tempore dato impactus et reflexiones, eò magis corpus circulum urget, ut à centro recedat et vice-versâ eò magis ad centrum urgetur per circuli reactionem æqualem et contrariam actioni. Quare si varia fuerit corporum in polygonis revolvantium celeritas æquabilis, vires centrifugæ erunt ut velocitates et numeri impactuum seu reflexionum tempore dato peractarum conjunctim. Est autem numerus reflexionum tempore dato ut numerus laterum polygoni eo tempore descriptorum. Por-

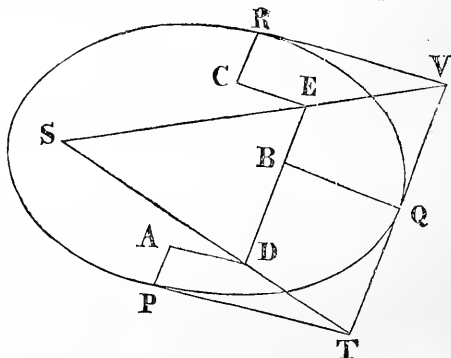
rò si eadem supponatur in utroque polygono velocitas, numeri laterum eodem tempore descriptorum erunt reciproci ut latera singula, quo enim majora sunt latera, eo minor eorum numerus dato tempore datâque velocitate percurritur; quare manente eadem in utroque polygono velocitate, numeri reflexionum sunt inversè ut latera, sive ob polygonorum similitudinem, inversè ut radii circulorum. Si verò ponatur idem circulorum radius, et varia in utroque polygono velocitas uniformis, erunt numeri laterum in utroque polygono dato tempore percursorum, directè ut velocitates æquabiles, seu, ut longitudes dato tempore descriptæ (5). Quare variantibus polygona velocitate et radio, numerus reflexionum est ut velocitas, seu ut longitudo tempore dato descripta applicata ad radium. Cum igitur suprâ ostensum sit vim centrifugam in circulo, aut vim centripetam ipsi æqualem et contrariam, esse in ratione compositâ velocitatis et numeri reflexionum dato tempore peractarum, liquet eandem vim centrifugam esse quoque ut quadratum velocitatis radio divisum, et etiam ut quadratum longitudinis seu arcus dato tempore descripti applicatum ad radium.

PROPOSITIO V. PROBLEMA I.

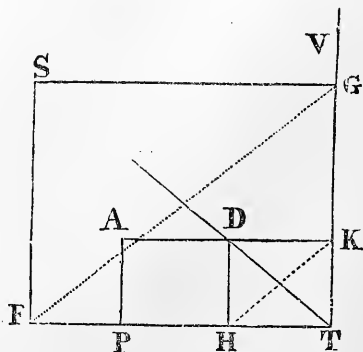
Data quibuscunque in locis velocitate, quâ corpus figuram datam viribus ad commune aliquod centrum tendentibus describit, centrum illud invenire.

Figuram descriptam tangant rectæ tres P T, T Q V, V R in punctis totidem P, Q, R, concurrentes in T et V. Ad tangentes erigantur perpendiculara P A, Q B, R C velocitatibus corporis in punctis illis P, Q, R, a quibus eriguntur, reciproçè proportionalia; id est, ita ut sit P A ad Q B ut velocitas in Q ad velocitatem in P, et Q B ad R C ut velocitas in R ad velocitatem in Q. Per perpendicularorum terminos A, B, C ad angulos rectos ducantur A D, D B E, E C, concurrentes in D et E: Et actæ T D, V E concurrent in centro quæsito S.

Nam perpendiculara a centro S in tangentes P T, Q T demissa (per Corol. 1. Prop. I.) sunt reciproçè ut velocitates corporis in punctis P et Q; ideoque per constructionem ut perpendiculara AP, BQ directè, id est ut perpendiculara à puncto D in tangentes demissa. (°) Unde facillè colligitur quòd puncta S, D, T sunt in unâ rectâ. Et simili argumento puncta S, E, V sunt etiam in unâ rectâ; et propterea centrum S in concursu rectarum T D, V E versatur. Q. e. d.

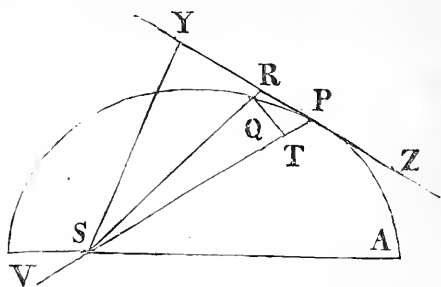


(°) 206. Puncta S, D, T, sunt in unâ rectâ. Demissis enim ex centro S, in tangentes TV, TF, perpendicularis SG, SF, et ex puncto D, perpendicularis DK, DH, patet angulos FSG, HDK, lineis parallelis contentos esse æquales et propter laterum SF, SG, DH, DK, analogiam, triangula FGS, HKD, esse similia, adeoque angulos SFG, DHK, æquari, ac proinde lineas FG, HK, esse parallelas, et triangula FTG, HTK, similia, erit ergò TH : TF = HK : FG = DH : SF, et TK : TG = HK : FG = DK : SG. Quare linea TD, producta, transibit per centrum S.



(^e) Idem faciliè demonstratur etiam per Corol. 4 Lem. X.

Corol. 1. Si corpus P resolvendo circa centrum S describat lineam curvam A P Q; tangat verò recta Z P R curvam illam in puncto quovis P, et ad tangentem ab alio quovis curvæ puncto Q agatur Q R distantia S P parallela, ac demittatur Q T perpendicularis ad distantiam



illam S P: vis centripeta erit reciprocè ut solidum $\frac{S P \text{ quad.} \times Q T \text{ quad.}}{Q R}$

si modo solidi illius ea semper sumatur quantitas, quæ ultimo fit, ubi coëunt puncta P et Q. (^h) Nam Q R æqualis est sagittæ dupli arcus Q P, in cujus medio est P, et duplum trianguli S Q P sive S P \times Q T, temporis, quo arcus iste duplus describitur, proportionale est; ideoque pro temporis exponente scribi potest.

Corol. 2. Eodem argumento vis centripeta est reciprocè ut solidum $\frac{S Y q \times Q P q}{Q R}$, si modò S Y perpendiculum sit à centro virium in orbis tangentem P R demissum.

(ⁱ) Nam rectangula S Y \times Q P et S P \times Q T æquantur.

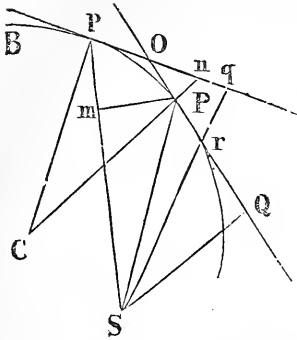
Corol. 3. Si orbis vel circulus est, vel circulum concentricè tangit, aut concentricè secat, id est angulum contactus aut sectionis cum circulo quam minimum continet; eandem habens curvaturam eundemque ra-

(^e) 208. Idem faciliè demonstratur etiam per Corol. 4. Lem. X. quo statuitur vires esse ut spatia, ipso motus initio, descripta directè et quadrata temporum inversè: Cum enim F D, f d, seu sagittæ P C, p c, sint spatia ex virium centripetarum actione descripta iisdem temporibus quibus percurrunt arcus evanescentes P D, p d, patet per suprà dictum Coroll. vires centripetas esse inter se in ratione composità ex directà ratione sagittarum P C, p c, et reciproca quadratorum temporum quibus describuntur arcus evanescentes P D, p c, seu H D, h d.

(^h) 209. Nam Q R æqualis est sagittæ dupli arcus Q P, in cujus medio est P, (207), duplum verò trianguli evanescentis S Q P, (quod per Lem. VIII., tanquam rectilineum considerari potest) æquale est facto ex perpendiculo Q T, in

basim S P; cum igitur in eadem curvâ A P Q, aræ sint proportionales temporibus quibus describuntur, ac proinde rectangulum Q T \times S P, scribi possit loco temporis quo duplus arcus Q P, seu duplum triangulum S Q P, describitur, erit vis centripeta in P, directè ut $\frac{Q R}{S P^2 \times Q T^2}$ et inversè ut $\frac{S P^2 \times Q T^2}{Q R}$.

(ⁱ) 210. Rectangula S Y \times Q P, et S P \times Q T, æquantur; nam tangens P R, cum arcu evanescente Q P, congruit (per Lem. VII.) et propterea tangens illa considerari potest tanquam trianguli S P Q, basis P Q, producta, et S Y, tanquam perpendicularis ad illam basim productam, quare area dupli trianguli S P Q, est S Y \times Q P = S P \times Q T.



214. Itaque corpus P, circà centrum virium S revolvendo describat curvam B p P, et centro C radio CP descripat intelligatur arcus infinitesimus P p circuli curvam B p P osculantis P, ac centro S radio SP, arculus P m, et denique S Q, S q, ad tangentes P Q, p q, perpendiculares. Duo triangula q O r, n C p, seu P C p similia sunt, nam aequales sunt anguli r q O, C p n, sunt enim ambo recti, et anguli r O q, P C p, qui cum angulo P O p duos rectos efficiunt. Similia quoque sunt triangula p m P, p q S, seu P Q S, ob angulos ad q et m rectos et angulum m P p communem, dum coeunt puncta P, p, quare p P : r q = P C : O q, seu p q, seu P Q; et m p : P p = P Q : S P unde ex aequo m p : r q = P C ad S P et P C

$$\frac{SP \times m p}{r q}.$$

Porro (212) vis centripeta in P

$$= \frac{SP \times m p}{r q}.$$

Porro (212) vis centripeta in P

est ut $\frac{SP}{PC \times SQ^3}$; ergò si substituatur valor

ipsius P C, modò inventus, eris vis ut $\frac{r q}{S Q^3 \times m p}$,
 hoc est, si vis contrahens sit $\frac{r q}{S^2 P}$.

hoc est, si vis centripeta sit $= v$, $SP = z$, ac
proindè $mp = dz$, $SQ = p$, adeóque $rq =$

$$dp, \text{ erit } v = \frac{dp}{p^3 dz}, \text{ et radius osculi } CP = r$$

$= \frac{z \, dz}{dp}$, quas duas formulas tradunt Keilius,

in suâ de Legibus Virium Centripetarum Epistolâ
ad Halleium directâ, et Hermannus loco suprâ
citato.

215. Sit $Pp = ds$, et $Pm = dy$, et ob trian-
gula similia pPm , PSQ , erit $ds : dy = z : p$,

adeóque $p = \frac{z dy}{ds}$, et sumptis utrinque fluxio-

nibus nullâ constante usurpatâ, invenietur (165)

$$d_p = \frac{dz dy ds + z ds dy - z dy ds}{ds^2};$$

quarè $v = \frac{dp}{p^3 dz} = \frac{dp ds^3}{z^3 dy^3 dz}$ ob $p =$

$$\frac{z \, dy}{ds} \text{ et } p^3 = \frac{x^3 \, dy^3}{ds^3}, \text{ adeóque } v = \frac{z \, dz \, dy \, ds^2 + z \, ds^2 \, d \, dy - z \, dy \, ds \, d \, ds}{z^3 \, dy^3 \, dz}$$

quæ formula nonnisi nominibus differt à formulis quas Varignonius dedit in Commentariis Parisiensibus, 1701. 1706.

216. Hinc radorum osculi formula admodum generalis et expedita facile reperitur

Nam invenimus (214) $r = \frac{z \, dz}{d p} =$ (215)

$$\frac{z d z d s^2}{d z d y d s + z d s d d y - z d y d d s}$$

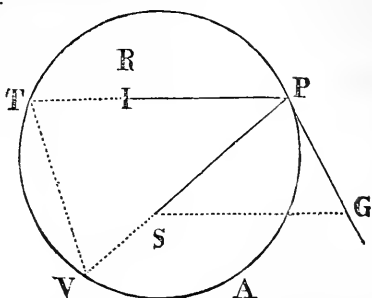
$d z d y d s + z d s d d y - z d y d d s$
 cum in hac formulâ nulla fluxio constans assumpta sit, in alias infinitas transformari potest, sumptis pro arbitrio constantibus. Si centrum S, in infinitum abeat, ut rectæ SP, evadant parallelæ, erit $d z d y d s$, quantitas infinitè parva respectu $z d s d d y$ et $z d y d d s$; nam cum z finita est $d z d y d s$, est ejusdem generis cum $z d s d d y$; ubi igitur z , evadit infinita $z d s d d y$, fit etiam infinita respectu $d z d y d s$; undè si in formulâ radif osculatoris modò inventâ deleatur membrum
 $d s^2 d z$

osculatoris modo inventa deletur membrum

$$dz dy ds, \text{ habebitur } r = \frac{ds^2 dz}{ds dy ds - dy ds ds}$$

formula generalis radii osculi in curvis quarum ordinatæ SP parallelæ axique perpendiculares sunt, et in quibus dz , sunt elementa abscissarum.

trum S revolvitur, est ad vim, qua corpus idem P in eodem circulo et eodem tempore periodico circum aliud quodvis virium centrum R revolvi potest, ut RP quad. $\times SP$ ad cubum rectæ SG , quæ a primo virium centro S ad orbis tangentem PG ducitur, et distantiae corporis a secundo virium centro parallela est.



(^m) Nam per constructionem hujus propositionis vis prior est ad vim posteriorem ut $R P q \times P T$ cub. ad $S P q \times P V$ cub. id est, ut $S P \times R P q$ ad $\frac{S P \text{ cub.} \times P V \text{ cub.}}{P T \text{ cub.}}$ sive ((ⁿ) ob similia triangu-
la $P S G$, $T P V$) ad $S G$ cub.

Corol. 3. Vis, quâ corpus P in orbe quocunque circum virium centrum S revolvitur, est ad vim, quâ corpus idem P in eodem orbe eodemque tempore periodico circum aliud quodvis virium centrum R revolvitur potest, ut $SP \times RP$, contentum utique sub distantia corporis a primo virium centro S et quadrato distantiae ejus a secundo virium centro R, ad cubum rectae SG, quae a primo virium centro S ad orbis tangentem PG ducitur, et corporis a secundo virium centro distantiae RP parallela est. (°) Nam vires in hoc orbe ad ejus punctum quodvis P eadem sunt ac in circulo ejusdem curvaturae.

procè ut illæ quantitates quæ eas multiplicant,
hoc est sagitta in S est ad sagittam in R sicut
 $R P^2 \times P T^3 : S P^2 \times P V^3$. Q. e. d.

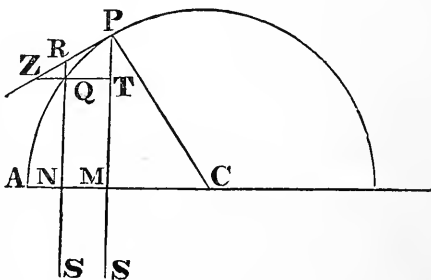
(ⁿ) 220. Triangula $\hat{P} S G$, $T P V$, similia sunt, ob angulos $\hat{P} S G$, $S P T$ æquales, quia sunt alterni inter parallelas $S G$, $T P$, et angulos $V P G$, $V T P$, æquales per 32. lib. 5. Elem. unde $T P : P V = S P : S G =$

$$\frac{SP \times PV}{TP} \text{ et } SG^3 = \frac{SP^3 \times PV^3}{PT^3}$$

(o) 221. Nam vires in hoc orbe ad ejus punctum quodvis P, eadem sunt ac in circulo orbitam osculante in P, vis enim illa in P, est semper eadem ac si corpus in arcu evanescente circuli osculatoris moveretur, cum arcus ille circuli pro arcu orbitæ evanescente usurpari possit.

PROPOSITIO VIII. PROBLEMA III.

Moveatur corpus in semicirculo P Q A : ad hunc effectum requiritur lex vis centripetæ tendentis ad punctum adeo longinquum S, ut lineæ omnes P S, R S ad id ductæ, pro parallelis haberi possint.



A semicirculi centro C agatur
semidiameter CA parallelas istas
perpendiculariter secans in M et N,
et jungatur CP. Ob (P) similia
triangula CPM, PZT et RZQ
est CPq ad PMq ut PRq ad
QTq, et naturâ circuli PRq
æquale est rectangulo QR

× $\overline{R N + Q N}$, sive coëunti-

bus punctis P et Q rectangulo Q R \times 2 P M. Ergo est C P q ad
P M quad. ut Q R \times 2 P M ad Q T quad. ideoque $\frac{Q T \text{ quad.}}{Q R}$ æquale

$$\frac{2 \text{ P M cub.}}{\text{C P quad.}}, \text{ et } \frac{\text{Q T quad.} \times \text{S P quad.}}{\text{Q R}} \text{ æquale } \frac{2 \text{ P M cub.} \times \text{S P quad.}}{\text{C P quad.}}$$

Est ergo (per Corollarium 1. et 5. Prop. VI.) vis centripeta recprocè ut $\frac{2 \text{ P M cub. } \times \text{ S P quad. }}{\text{C P quad}}$, hoc est (neglectâ ratione determinatâ $\frac{2 \text{ S P quad. }}{\text{C P quad.}}$.)

reciprocè ut $\bar{P} M$ cub. Q. e. i.

(^q) Idem faciliè colligitur etiam ex propositione præcedente.

Scholium.

(^r) Et argumento haud multum dissimili corpus invenietur moveri in

(^p) 222. Similia sunt triangula C P M, P Z T, anguli enim ad M et T recti aequales sunt, et quoniam anguli Z P T + M P C, et anguli M P C + M C P, recto æquantur, erit etiam M C P = Z P T; et $P R^2 = Q R \times \frac{R N + Q N}{C P^2}$ (per Prop. 56. lib. 3. Elem.) Cum autem C P sit radius circuli et S P sit linea infinita adeoque S M = S P, erunt C P, S P, $\frac{2 S P^2}{C P^2}$ quantitates constantes.

(^a) 223. *Idem facile colligitur ex Propositione præcedente* quâ constat vim centripetam esse reciprocè ut $S P^2 \times P V^3$. Nam, centro virium S in infinitum abeunte, omnes $S P$ sunt æquales adeoque constantes, et propterea vis reciprocè ut $P V^3$.

224. Ut multa de sectionibus conicis
mox erunt dicenda, visum est eas præmittere ex
conicis propositiones quæ sæpius occurrunt, ne
memoria vitio aut fastidio ad alios Auctores re-
currendi demonstrationum vis Lectores fugiat.

ellipsi, vel etiam in hyperbolâ vel parabolâ, vi centripetâ, quæ sit reciproce ut cubus ordinatim applicatæ ad centrum virium maxime longinquum tendentis.

Def. 1^a. Si Planum quodpiam secet conum, sed per ejus Verticem non transeat, intersectio Coni et istius Plani dicitur Sectio Conica.

2^a. Si ducatur planum per Verticem Coni, parallelum plano secanti, conum ipsum vel secabit, vel tanget, vel totum erit extra eum; hinc distinguuntur sectionum Conicarum species, dicuntur primo casu Hyperbolæ, 2^o. Parabolæ, 3^o. Ellipses.

3^a. Si sint duo Coni similes sibi per Verticem oppositi, illud planum verticale quod unum e Conis secat, alterum etiam secabit, ideo, planum sectionis ipsi Parallelum utrumque etiam Conum secabit, et ex utriusque Coni sectione formabuntur in eo Plano duæ Hyperbolæ oppositæ.

4^a. Si secundum lineas rectas in quibus planum per Verticem Coni ductum secat Coni superficiem, applicentur duo plana Conum tangentia, eorum cum plano Hyperbolarum intersectiones, dicuntur Hyperbolarum Asymptoti; nam ut ea plana superficiem Coni jam tetigerunt, nullibi eam superficiem iterum attingent, non ergo attingent Hyperbolam quæ terminatur in superficie Coni et quæ est in plano lineis quas tangunt parallelo.

Lemma I. Sit linea ab unâ Asymptoto ad alteram ducta, quæ per Hyperbolam secetur, partes ejus lineæ inter Hyperbolam et Asymptotum utrinque contentæ sunt æquales.

Et si lineæ, inter se Parallelæ, ab unâ Asymptoto ad alteram ducantur, æqualia erunt facta partium utriusque Parallelæ per Hyperbolam sectæ.

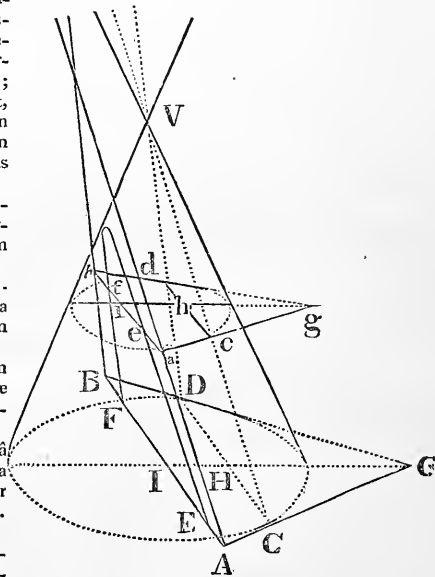
Si verò linea ab unâ Hyperbolâ ad oppositam ducta per Asymptotos secetur, partes ejus lineæ inter Hyperbolam et Asymptotum utrinque contentæ sunt æquales.

Et si lineæ, inter se Parallelæ, ab unâ Hyperbolâ ad oppositam ducantur, æqualia erunt facta partium utriusque Parallelæ per Asymptotum sectæ (Apoll. lib. 2. Prop. 8. et 16.)

Demonst. Primum talis sit linea A B ut planum per eam lineam duci possit basi conï parallellum, cujus sectio cum cono erit circulus C E F D, ducatur planum V C D per verticem Coni V C D plano Hyperbolarum parallellum et secundum lineas V C, V D applicentur plana Conum tangentia, in quibus erunt Hyperbolæ Asymptoti et Tangentes circuli C E F D in punctis C et D: concurrant illæ Tangentes in G; ex G per centrum circuli ducatur linea G H I quæ erit perpendicularis in chordam C D eamque bifariam secabit, ut etiam ejus Parallelam A B, et chordam E F (per 3. 3. Elem.) est ergo I A = I B, et I E = I F, unde I A - I E

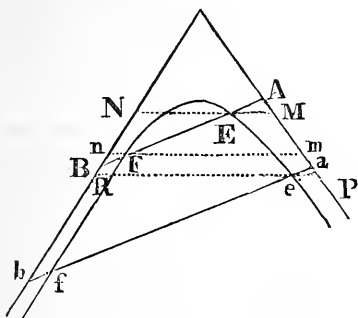
sive A E = I B - I F sive B F et (per 56. 5. Elem.) $C A^2 = A F \times A E = A F \times B F$.

Sit verò linea a b huic Parallela, sive in eadem sive in oppositâ sectione; simili ratiocinio ostendetur esse a e = b f; et $c a^2 = a f \times a e = a f \times b f$. Sed figura A C a c est Parallelogramma; est enim tota in plano Tangente Conum, et terminatur per sectiones planorum Parallelorum, nam C c et A a sunt sectiones plani Verticalis et plani Hyperbolarum ipsi Paralleli, et C A et c a sunt sectiones planorum basi conï Parallelorum; est ergo C A = c a et $C A^2 = c a^2$, ac per consequens A F \times B F = a f \times b f.



Casus 2^{us}. Quod si linea A B utcumque sit ducta inter Asymptotos, et Hyperbolam secet in E et F erit A E = B F; nam per E et F ducantur lineæ M E N, m F n, tales ut plana per eas ducta sint basi Coni parallela, Triangula A E M et A F m, B F n et B E n erunt similia propter Parallelas, est ergo A E : A F = E M : F m et B E : B F = N E : n F; est ergo per compositionem rationis. . A E \times B E : A F \times B F = E M \times N E : F m \times n F, sed per demonstrationem

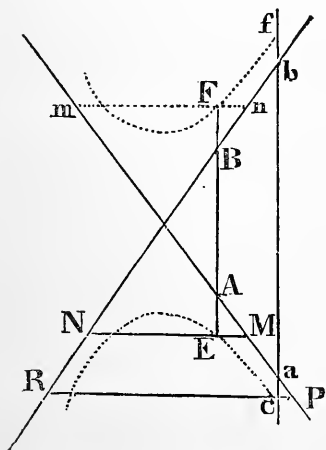
primi casûs est $EM \times NE = Fm \times nF$, ergo $AE \times BE = AF \times BF$, unde (per Prop. 16. 6. Elem.) $AF : AE = BE : BF$ et dividendo $AF - AE$ sive $EF : AE = BE - BF$ sive $EF : BF$, cum ergo sit $EF : AE = EF : BF$ est $AE = BF$.



Ducatur verò linea quævis a b, priori A B parallela, et per punctum e ducatur linea P e R lineæ M E N parallela, similia erunt Triangula A E M et a e P, B E N et b e R ob parallelas, est ergo $AE : ae = EM : eP$

et $BE : be = EN : eR$, est ergo per compositionem rationis... $AE \times BE : ae \times be = EM \times EN : eP \times eR$, sed per casum primum est $EM \times EN = eP \times eR$, ergo $AE \times BE = ae \times be$.

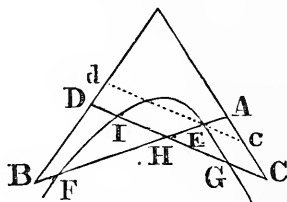
Casus 3^{us}. Si lineæ de quibus agitur, ab unâ



Hyperbolâ ad ejus oppositam ducerentur et per Asymptotas secarentur, eadem prorsus foret demonstratio ac in 2^o. casu, nisi quod

in primâ demonstrationis parte, componendo concluderetur, non dividendo.

Lemma II. Sint duæ lineæ in Hyperbolarum plano ductæ, quæ in quodam puncto sibi occurrant; facta partium singulæ lineæ sumptarum a puncto concursus usque ad punctum Hyperbolæ, sunt inter se sicut facta partium sumptarum ab Hyperbolâ usque ad utramque Asymptotum.

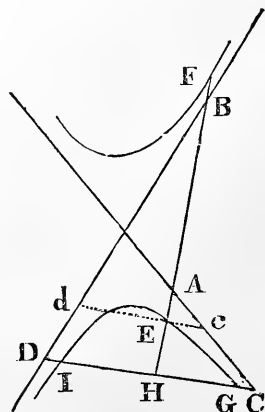


Lineæ A B, D C sibi mutuo occurrant in H, est $EH \times FH : GH \times IH = AE \times BE : CG \times DG$.

Demonstr. Ducatur per punctum E Hyperbolæ, in quo secatur per lineam A B productam si necesse sit, linea c E d, alteri lineæ datæ C H D Parallela: similia erunt Triangula A H C et A E c, B H D et B E d: unde habebuntur hæc proportionēs

A H sive $AE + EH : AE = H C$ sive $CG + GH : cE$

et B H sive $BF + FH : BE = H D$ sive $DI + IH : dE$, et per compositionem rationis $AE \times BF + AE \times FH + EH \times BF$ (sive AE per Lem. I.) $+ EH \times FH : AE \times BE = CG \times DI + CG \times IH + GH \times DI$ (sive CG per Lem. I.) $+ GH \times$



$IH : cE \times dE$ (sive $CG \times DG$ per Lem. I.) est verò $BF + FH + HE = BE$, et DI

$+IH + HG = DG$ ergo est $AE \times BE + EH \times FH : AE \times BE = DG \times CG + GH \times IH : CG \times DG$. et dividendo: $EH \times FH : AE \times BE = GH \times IH : CG \times DG$
ergo alternando $EH \times FH : GH \times IH = AE \times BE : CG \times DG$.

Eadem est demonstratio sive lineæ sint in eadem Hyperbola, sive, una sit in unâ Hyperbolâ altera inter oppositas, sive ambæ inter oppositas ducantur. Ergo facta partium, etc.

Lemma III. Sint duæ Parallelæ in sectione Conicâ ductæ quæ secantur per lineam quamvis, facta partium uniuscujusque Parallelæ sumptarum a curvâ ad punctum ejus intersectionis, sunt inter se ut facta partium lineæ secantis sumptarum a curvâ ad punctum intersectionis cum Parallelâ.

Sint AB, CD , parallelæ sectæ per lineam EF in punctis G et H , est $AG \times GB : CH \times HD = EG \times GF : EH \times HF$.

Sit V , vertex conî; ex eo ducantur VE, VF ad extremitates lineæ EF ; ducatur in B, A , planum VAB , per verticem conî transiens et in C, D planum Hyperbolarum ipsi Parallelum, in plano VBA ducatur VG , et in H, HM ipsi VG parallelæ quæ jacebit in plano Hyper-

$\sqrt{G^2} : MH \times IH = EG \times GF : EH \times FH$.

Lineæ VE, VF ductæ per verticem conî et punctum in ejus superficie sumptum sunt semper in superficie conî, ergo earum intersectiones I et M cum lineâ HM in plano Hyperbolarum ductâ sunt in ipsâ curvâ Hyperbolicâ cujus Asymptoti sint TN, TP parallelæ lineis VA, VB ; per punctum I in quo lineâ HM occurrit Hyperbolæ ducatur SIR lineis DC et AB parallelæ, similia erunt Triangula VAG et LRI, VBG et KSI lineis enim parallelis terminantur, erit ergo

$$VG : AG = LI : RI$$

$$\text{et } VG : GB = KI : SI \text{ et per compositionem rationis}$$

$\sqrt{G^2} : AG \times GB = LI \times KI : RI \times SI$ ($= PD \times DN$ per Lem. I.) Sed per Lemma II. est

$$LI \times KI : PD \times DN = MH \times IH : CH \times DH \text{ est ergo}$$

$$\sqrt{G^2} : AG \times GB = MH \times IH : CH \times DH \text{ et alternando}$$

$$\sqrt{G^2} : MH \times IH = AG \times GB : CH \times DH.$$

Erat autem $\sqrt{G^2} : MH \times IH = EG \times FG : EH \times FH$, ex primâ demonstrationis parte, est ergo $AG \times GB : CH \times DH = EG \times FG : EH \times FH$. Q. e. d.

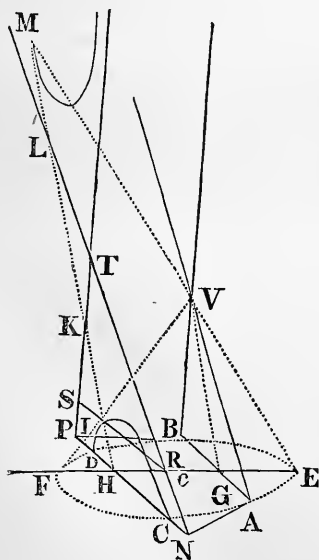
Cas. 2. Si punctum F infinitè distaret a puncto E , lineâ FG æqualis censenda foret lineæ FH , ideoque $EG \times FG : EH \times FH = EG : EH = AG \times GB : GH \times DH$, hoc est ipsæ partes secantis forent inter se sicut facta partium parallelarum quas secat.

Cas. 3. Si punctum F non foret in eadem sectione in qua est punctum E , sed in oppositâ, eadem foret demonstratio nisi quod puncta M et I , in eadem Hyperbola forent.

Cas. 4. Eadem etiam fiet demonstratio sive puncta G et H sint intra extremitates Parallelarum AB, CD , aut intra vertices E et F lineæ secantis, sive sint extra.

Corol. 1. Sumatur medium lineæ secantis puncta E et F sitque c , si intersectio ejus lineæ per Parallelam sit intra vertices, erit factum partium ejus æquale quadrato ejus dimidii dempto quadrato ejus portionis a Centro ad intersectionem sumptæ, v. gr. erit $EG \times GF = c \bar{E}^2 - c \bar{G}^2$ ut liquet per 5. 2. Elem. Si intersectio ejus lineæ sit extra vertices, erit factum ejus partium æquale quadrato portionis ejus a Centro ad intersectionem sumptæ dempto quadrato dimidiæ lineæ, v. gr. foret $EG \times GF = c \bar{G}^2 - c \bar{E}^2$, ut liquet per 6. 2. Elem.

Corol. 2. Ex puncto quovis ductæ sint duæ Tangentes ad sectionem Conicam, et ex quodam puncto unius ex illis Tangentibus, ducatur lineâ trans sectionem Conicam alteri Tangenti parallelæ. Quadratum prioris Tangentis est ad quadratum alterius Tangentis ut quadratum partis in primâ Tangente assumptæ ad factum lineæ Parallelæ alteri tangenti per ejus Partem inter Tangen-

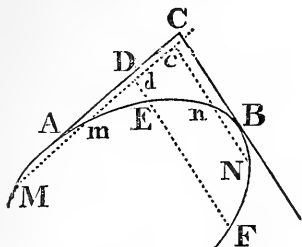


bolarum: erunt ergo Triangula VGE et MHE , VGF et IHF similia unde habentur hæ proportionēs

$$VG : MH = EG : EH$$

et $VG : IH = FG : FH$, et per compositionem rationis

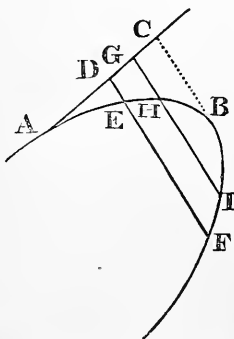
tem et curvam comprehensam (Apol. lib. 3.
Prop. 16.)



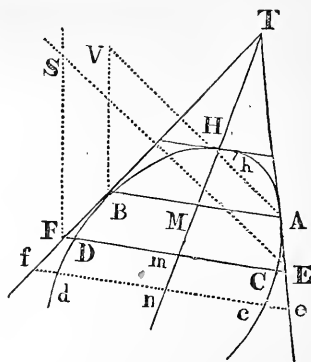
Sint AC, CB Tangentes sectionis Conicæ ABF, ex D ducatur DEF parallela CB, erit $\overline{AC^2} : \overline{CB^2} = \overline{AD^2} : \overline{DF \times DE}$.

Ducatur Mm c parallela Tangenti AC, et Nn c parallela Tangenti CB, et Mm c lineam DEF secet in d, erit per Lem. sup. $c n \times c N : d F \times d E = M c \times m c : M d \times m d$, est enim M c linea secans parallelas c N, d F; evanescant arcus Mm, et Nn, coincident lineæ Mm c cum AC et Nn c cum BC, eritque $c n = C N = C B$, $d F = D F$, $d E = D E$, $M c = m c = A C$, $M d = m d = A D$, ergo erit $\overline{CB^2} : \overline{DF \times DE} = \overline{AC^2} : \overline{AD^2}$ et permutando et alternando $\overline{AC^2} : \overline{CB^2} = \overline{AD^2} : \overline{DF \times DE}$. Q. e. d.

Corol. 3. Si ex variis punctis Tangentis ducantur lineæ Parallelæ trans sectionem Conicam, Quadrata partium Tangentis sunt inter se ut facta Parallelarum per earum partem inter Tangentem et curvam interceptam. Sit AC Tangens ex ejus punctis D et G



ducantur Parallelæ DEF, GHI, erit $\overline{AD^2} : \overline{AG^2} = \overline{DF \times DE} : \overline{GI \times GH}$; nam supponatur in B ea Tangens quæ his lineis sit Parallela secetque priorem in C erit per Corollarium superius $\overline{AC^2} : \overline{BC^2} = \overline{AD^2} : \overline{DF \times DE} = \overline{AG^2} : \overline{GI \times GH}$ ergo alternando, $\overline{AD^2} : \overline{AG^2} = \overline{DF \times DE} : \overline{GI \times GH}$. Q. e. d.



Lemma IV. Dicatur sectionis Conicæ Diameter ea linea quæ Parallelas in curva terminatas bifariam dividit: sit ejus Diametri vertex punctum in quo curvæ occurrit; illæ Parallelæ, quas bisecat, ipsi ordinatim applicatæ dicantur, et earum alterutra pars dicatur ordinata illius Diametri; portio Diametri ab ejus vertice ad Ordinatam usque, dicetur ejus abscissa: et denique ea Diameter quæ Parallelas bisecando simul est illis perpendicularis, dicatur Axis.

His positis 1°. Linea quæ duas Parallelas bisecabit erit Diameter curvæ: id est cæteras omnes lineas hisce Parallelas etiam bisecabit. (Apol. Lib. 2. Prop. 28.)

2°. Linea in Vertice Diametri ducta et Ordinatis Parallela, erit Tangens curvæ in eo Vertice (Apol. Lib. 1. Prop. 17.) et vice versâ ea Linea erit Diameter quæ bisecabit lineam quæ erit Parallela Tangenti per ejus verticem ductæ: (Apol. Lib. 2. Prop. 7.)

Denique; Quadrata ordinarum erunt inter se ut facta partium quas secant in Diametro.

Demonst. In extremitatibus lineæ AB ducantur Tangentes quæ concurrant in T, per medium M, lineæ AB ducatur TMm sitque lineæ DC parallela lineæ BA hinc inde producta donec Tangentibus TB, TA productis si necesse sit in E et F occurrat: per AB et Verticem coni V ducatur planum VAB, et per EF planum ipsi Parallellum quod Hyperbolam in Cono formabit, erit ergo DC lineæ ad Hyperbolam pertinens, et propter Tangentes BF, AE, puncta F et E ad Asymptotos pertinebunt, ergo (per Lem. I.) est $\overline{EC} = \overline{FD}$, sed ob parallelas AB, EF et quia bifariam dividitur AB in M per lineam TMm erit $m E = m F$, itaque $m E - E C$ (sive $m C$) = $m F - F D$ (sive $m D$) ergo lineæ TM, lineam CD lineæ AB parallelam bifariam dividit, idem verò de quavis lineæ c d parallelâ lineæ AB demonstrabitur ergo lineæ Mm per medium linearum AB, CD, transiens omnes earum Parallelas in curva terminatas bifariam dividit. Est ergo Diameter curvæ.

2^o. Linea per Verticem Diametri H ducta, et ordinatis Parallela est tangens curvæ, pone enim illam lineam sectioni iterum occurrere in h, linea T M quæ dividit bifariam omnes Parallelas lineæ A B in curva terminatas, deberet bifariam dividere lineam H h, sed illud absurdum, siquidem illam attingit in ejus extremo H, ergo linea per verticem Diametri ducta ordinatis parallela curvam iterum non attingit, est ergo Tangens in puncto H. Vice versâ sit Tangens lineæ A B parallela, et ex medio M lineæ A B per H punctum contactus ducatur linea, ea erit Diameter; si enim Diameter quæ transit per M ad h non verò ad H pertingeret, ducatur per h linea Parallela lineæ A B, ea erit Tangens in h; eritque Parallela Tangenti in H, sed illud est absurdum, ergo linea M H est Diameter.

Denique cum Diameter secet Parallelas sunt (juxta Lem. III.) facta partium Parallelarum, ut facta partium quas secant in Diametro, sed partes singulæ Parallelae a Diametro sectæ sunt utrinque æquales et ordinatæ dicuntur, ergo quadrata Ordinarum sunt ut facta partium quas secant in Diametro.

Lemma V. E quovis puncto Sectionis Conicæ ducatur ordinata ad Diametrum, et Tangens quæ illi Diametro occurrat in quodam puncto: distantia hujus puncti ab utroque vertice Diametri erunt inter se sicut abscissæ ab utroque vertice Diametri sumptæ (Apollon. l. 1. Prop. 34.)

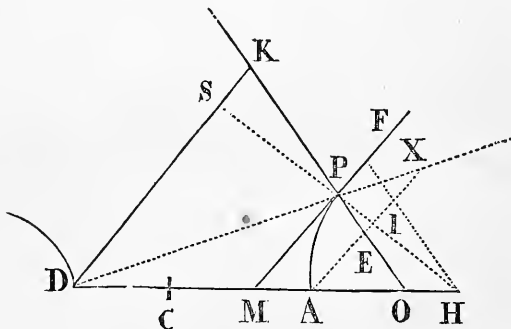
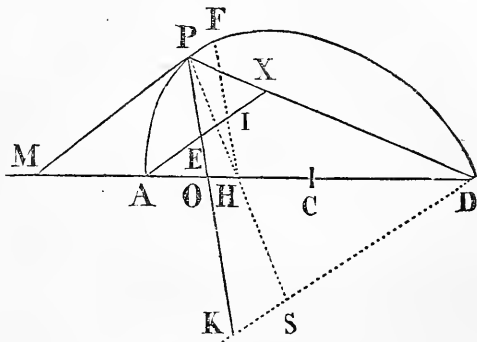
E puncto P curvæ ducatur ordinata P O ad Diametrum A D, et in eâ sumatur punctum M tale ut sit $A M : D M = A O : D O$, ducaturque linea P M, illa in nullo alio puncto F curvæ occurret, hoc est, erit Tangens in P.

Demonst. Ex eo puncto supposito F ducatur ordinata F H, erit $M O : M H = P O : F H$ et $M O^2 : M H^2 = P O^2 : F H^2$, sed si F pertineat ad curvam est (per Lem. IV.) $A O \times O D : A H \times H D = P O^2 : F H^2$ ergo $A O \times O D : A H \times H D = M O^2 : M H^2$ et alternando $A O \times O D : M O^2 = A H \times H D : M H^2$. Ducantur autem per A et D lineæ A X, D K parallelae P M quæ secant P O ejusque productionem in E et K, et per P et H ducatur linea quæ parallela A X et D K in I et S, secet, similia erunt Triangula A O E, M O P, D O K ob parallelas, unde habentur hæc proportionēs $A O : M O = A E : M P$.

et $O D : M O = D K : M P$ et per compositionem rationis erit

$$A O \times O D : M O^2 = A E \times D K : M P^2.$$

Pariter similia sunt Triangula A H I, M H P,



D H S, unde est: $A H : M H = A I : M P$
et $D H : M H = D S : M P$.

et per compositionem rationis erit

$$A H \times D H : M H^2 = A I \times D S : M P^2.$$

Sed si F pertinet ad curvam invenitur $A O \times O D : M O^2 = A H \times D H : M H^2$, foret ergo $A E \times D K : M P^2 = A I \times D S : M P^2$, sive $A E \times D K = A I \times D S$ et $A E : A I = D S : D K$, quod absurdum esse in datâ Hypothesi sic evincitur.

Ex P ad Diametri extremitatem D, ducatur P D, quæ lineam A E I (productam si necesse fit) secet in X; ob parallelas P M, X A est $A M : D M = P X : D P$ et $P X : D P = X E : D K$; et ob Triangula similia A O E, D O K est $A O : D O = A E : D K$, et quia per Hypo-

thesim est $AM : DM = AO : DO$, erit
 $XE : DK = AE : DK$ ideoque in datâ
 Hypothesi $XE = AE$ et cum sit
 $XI : XE = DS : DK$ ob parallelas, erit $XI :$
 $AE = DS : DK$ erat verò ex suppositione
 quod F est in curva,

$AE : AI = DS : DK$, foret ergo
 $XI : AE = AE : AI$, et $AE^2 = XI \times$
 AI . Sed AE^2 quadratum dimidii lineæ AX
 est semper majus Rectangulo ejus partium XI
 $\times AI$ (per 5. 2. Elem.), absurdum ergo est ea
 esse æqualia, quod tamen sequitur supposito
 punctum F ad curvam pertinere, ideoque, MP
 curvam tangit in P . Sed ad idem cujusvis curvæ
 punctum duas Tangentes rectas duci non
 posse ex naturâ curvarum liquet, ergo Tangens
 in P , ita occurrit Diametro ut sit
 $AM : DM = AO : DO$. Q. e. d.

Cor. 1. Si Diameter AD sit infinita, hoc est
 punctum D ad infinitum removeatur, DM et
 DO æqualia censenda sunt, cum ergo sit
 $DM : AM = DO : AO$ erit $AM = AO$;
 sive distantia puncti concursus Tangentis cum
 Diametro, ab ejus vertice, æqualis erit abscissæ
 ab eodem vertice sumptæ (Ap. Lib. 1. 35.)

Cor. 2. Si Diameter AD sit terminata, ejus-
 que medium sit C sitque PO ordinata fiatque
 $CM : CA = CA : CO$, erit P M tangens in
 puncto O ; Etenim sumendo summam et dif-
 ferentiam terminorum harum rationum est,
 $CM + CA : CA + CO = CM - CA :$
 $CA - CO$

sive in primâ ratione ponendo DC pro CA
 est $DM : DO = AM : AO$ aut alternando
 $DM : AM = DO : AO$, ergo (per Lemma)
 MP erit Tangens in P ; est ergo semidiameter
 media proportionalis inter abscissam a centro
 sumptam, et partem Diametri à centro ad con-
 cursum Tangentis comprehensam (Apol. Lib.
 1. 37.)

Cor. 3. In Puncto P Sectionis Conicæ ducatur
 Tangens, quæ secet Diametrum in M ,
 et ducatur ordinata PO quæ secet Diametrum
 in O factum partium Diametri $AO \times DO$ est
 æquale facto $CO \times OM$ ex partibus lineæ a

Centro ad Tangentem sumptæ et per
 ordinatam in O sectæ. Cum enim
 sit $CM : CA = CA : CO$ tol-
 lendo terminos secundæ rationis a
 terminis primæ erit $MA : AO =$
 CA (sive DC) : CO , unde com-
 ponendo erit $MO : AO = DO :$
 CO , ideoque $AO \times DO = CO$
 $\times MO$; et (per 5. vel 6. II. Elem.)
 prout O est inter A et D vel ultra,
 erit $CO \times MO = AC^2 - CO^2$
 vel $CO^2 - AC^2$, unde deduci-
 tur $MO = \frac{AC^2 - CO^2}{CO}$ vel
 $\frac{CO^2 - AC^2}{CO}$.

De Hyperbolâ.

Theor. I. Lineæ omnes ab Intersectione
 Asymptotorum in eorum Angulo ductæ et
 utrinque productæ, sunt Hyperbolæ utriusque
 Diametri, et earum portio inter utramque Hy-
 perbolam comprehensa, dicitur Diameter trans-
 versa, et bifariam dividitur in Intersectione A-
 symptotorum quæ ideo centrum Hyperbolarum
 vocatur. Tangentes verò in utroque vertice
 ejusdem Diametri ductæ et inter Asymptotos
 comprehensæ sunt inter se Parallelæ et æqua-
 les, et bifariam dividuntur ab ea Diametro
 dicunturque ejus Diametri conjugatæ. (Apol.
 Lib. 1. Prop. 30. Lib. 2. Prop. 3. et 19.)

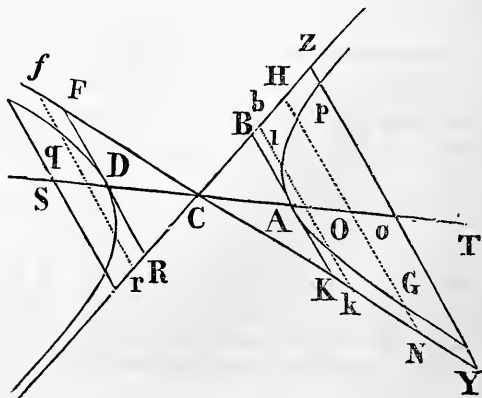
Demonst. Ductâ enim quomodocumque lineâ
 SCT in Angulo Asymptotorum ZCY per
 earum intersectionem C , si crura CZ et CY
 sumantur reciprocè proportionalia sinibus An-
 gulorum adjacentium, ducaturque lineâ ZY
 illa per lineam SCT bifariam dividitur; nam
 in Triangulo CZY est $CZ : CY = \sin. Y :$
 $\sin. Z = \sin. Y \cos. \sin. Z \cos.$ (per const.)
 et alternando, $\sin. Y : \sin. Y \cos. = \sin. Z :$
 $\sin. Z \cos.$ Sed in Triangulo COY est

$$\sin. Y : \sin. Y \cos. = CO : YO,$$

et in Triangulo COZ est
 $\sin. Z : \sin. Z \cos. = CO : ZO$,
 ergo cum duæ priores rationes sint æquales,
 est $CO : YO = CO : ZO$, ideoque $YO = ZO$.

Omnis autem lineâ HN lineæ ZY parallela
 similiter bifariam dividitur in O per lineam
 ST , partes autem ejus inter Hyperbolam et
 Asymptotum utrinque contentæ sunt æquales,
 per Lem. I. cum ergo sit semper $HO = ON$,
 et $HP = GN$ est $HO - HP = NO -$
 NG sive $OF = OG$. Ergo lineâ ST , lineas
 omnes lineæ ZY parallelas, in Hyperbola con-
 tentas bifariam secat, est ergo ejus Diameter
 per Lemma V.

Sint verò A et D puncta in quibus lineâ ST
 occurrit Hyperbolis, per ea ducantur BAK ,
 FDR parallelæ lineæ ZY inter Asymptotos
 contentæ, ergo bisecantur in A et D , cum verò
 sint parallelæ ordinatis Diametro ST sunt Tan-



gentes in verticibus A et D (per Lemma IV.) et inter se Parallelae.

Dico præterea eas esse æquales; ducantur enim Parallelae ipsis proximæ bik , fqr : erit $f q \times q r = b i \times k i$ (per Lem. I.) accedentibusque ordinatis ad Tangentes fit tandem $f q = F D$, $q r = R D$; $b i = B A$, et $k i = K A$ est ergo $F D \times R D = B A \times K A$, sed est $F D = D R$ et $B A = K A$ ergo $F D^2 = B A^2$ et $F D = B A = K A$. Unde tandem cum Triangula $C A K$ et $C D F$ sint similia, et sit $C A : C D = K A : F D$ est etiam $C A = C D$.

Theor. II. Tertia proportionalis Diametri transversæ et Diametro conjugatæ dicatur Latus Rectum; est Diameter transversa ad Latus Rectum ut factum Abscissarum ab utroque vertice sumptarum, ad quadratum Ordinatæ; hinc ista curva $\upsilon\pi\epsilon\beta\alpha\lambda\alpha$ sive excedens dicitur, quia quadratum ordinatæ majus est facto lateris recti per abscissam a proximo vertice (Apol. Lib. I. Prop. XXI.) Coincidit verò hæc Propositio cum ista, est quadratum Diametri Transversæ ad quad. Diametri conjugatæ ut factum abscissarum ad quadratum ordinatæ.

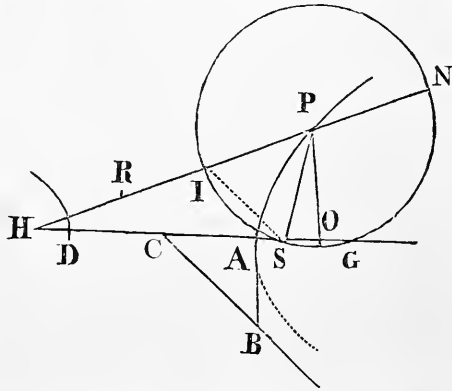
Demonst. Sit ut prius Diameter transversæ $D A T$, conjugatæ $B A K$ et ordinata inter Asymptotas contenta $H P O G N$: sunt (per Lem. II.) facta partium sumptarum in lineis $D O$, $H N$ a puncto Hyperbolæ ad utramque Asymptotum, sicut facta partium earundem linearum a puncto concursus O , usque ad Hyperbolam sumptarum; hoc est $A C \times A C : G N \times G H = A O \times D O : P O \times G O$. Sed $G N \times G H$ æqualis est quadrato semitangente $B A$, sive semi-diametri conjugatæ; nam (per Lem. I.) est $G N \times G H = b i \times k i$ (et per præced. Dem. $b i \times k i = B A^2$) et est $P O = G O$ ideo proportio superior huc redit. $A C^2 : B A^2 = A O \times D O : P O^2$. Sit verò L latus rectum, est per ejus definitionem $2 A C : 2 B A = 2 B A : L$, ergo est $2 A C : L = 4 A C^2 : 4 B A^2 = A C^2 : B A^2$ ideoque $2 A C : L = A O \times D O : P O^2$.

Hinc deducitur quod $P O^2 = \frac{L \times A O \times D O}{2 A C}$
 $\frac{D O}{A D} \times L \times A O$; ut ergo $D O$ est semper major quam $A D$, est etiam $P O^2$ semper major quam $L \times A O$. Q. e. d.

Theor. III. Diameter illa quæ Asymptotorum Angulum bifariam dividit est perpendicularis suis ordinatis (ut liquet ex Elem.), ideoque est Axis Hyperbolæ et ejus Diameter conjugata Axis conjugatus: si a centro feratur utrinque in Axem longitudo Asymptoti a centro ad extremum Axis conjugati sumptæ, puncta notata in Axi dicuntur foci Hyperbolæ, et si a focus ad quodvis Hyperbolæ punctum ducantur lineæ, earum differentia est semper Axi transverso æqualis. Latus Rectum axis dicitur latus rec-

tum Principale, et tota linea ordinatim Axi applicata in foco est æqualis illi lateri recto Principali, quod erit majus quadruplo distantia verticis a foco, si denique bifariam dividatur Angulus quem faciunt lineæ ab utroque foco ad idem curvæ punctum ductæ, linea eum angulum bisecans, erit Tangens curvæ in eo puncto. (Apol. lib. 3. 51.)

Demonst. Ducatur quævis linea ex foco H , sumatur $H I = D A$, et ducta $I S$ ad alterum focum S , fiat $I S P = P I S$ erit $P I = P S$, ideoque differentia linearum $H P$, $S P$ erit $H I = D A$ seu axi transverso, dico hoc posito, P ad Hyperbolam pertinere. Centro P , radio $P S$, describatur circulus $I S G N$ habebitur hæc proportio, $H I : H S = H G : H N$ sumatur dimidium harum linearum manebit proportio,



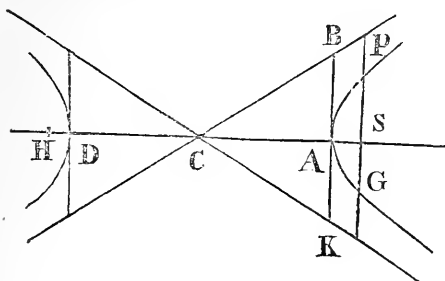
sit autem $\frac{1}{2} H I = H R$, $\frac{1}{2} H S = C S$, $\frac{1}{2} H G = \frac{1}{2} H S + \frac{1}{2} S G$ et demissa $P O$ perpendiculari in $S G$ est $\frac{1}{2} S G = S O$, ergo $\frac{1}{2} H G = C S + S O = C O$. Denique $\frac{1}{2} H N = \frac{1}{2} H I + \frac{1}{2} I N = R I + I P = R P$ est ergo $H R : C S = C O : R P$: componendo primum habetur $H R : C S + H R = C O : R P + C O$ et prioris rationis terminos terminis secundæ jungendo habetur $H R : C S + H R = C O + H R : H R + R P + C S + C O$, sive quia $H R = A C = D C$, et $C S = C H$ est $A C : C S + A C = D O : H P + H O$. At operationibus contrariis in eandem proportionem, $H R : C S = C O : R P$ factis, hoc est, dividendo et postea prioris rationis terminos et terminis secundæ detrahendo, substitutionibus factis erit

$A C : C S - A C = A O : H P - H O$, multiplicatis ergo terminis utriusque proportionis erit

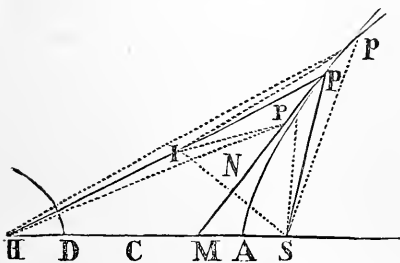
$A C^2 : C S^2 - A C^2 = A O \times D O : H P^2 - H O^2$ sit autem perpendicularis $A B$ erecta ab A usque ad Asymptotam $C B$, est $C B = C S$, et $C S^2 - A C^2 = A B^2$; est etiam $H P^2 - H O^2 = P O^2$, est ergo

$A C^2 : A B^2 = A O \times D O : P O^2$, sed

est $A C^2 : A B^2 = D O \times A O$ ad quadratum ordinatæ in O , (per Theor. II.) ergo $P O$ est ipsa illa ordinata et punctum P ad Hyperbolam pertinet.



Sit autem $P S$ ordinata in foco, erit $A C^2 : A B^2 = A S \times D S : P S^2$ est verò $D S = C S + A C$ et $A S = C S - A C$, ergo $D S \times A S = C S^2 - A C^2 = A B^2$, ergo $A C^2 : A B^2 = A B^2 : P S^2$, et $A C : A B = A B : P S$, et duplicando omnes terminos $2 A C : 2 A B = 2 A B : 2 P S$ sive $P G$. Sed est per naturam lateris recti $2 A C : 2 A B = 2 A B : L$, ergo $L = P G$: et $\frac{1}{2} L = P S$, sed cum per Theor. II. fit $P O^2 = \frac{D O}{A D} \times L \times A O$ erit ergo $P S^2$ sive $\frac{1}{4} L^2 = \frac{D S}{A D} \times L \times A S$ et $\frac{1}{4} L = \frac{D S}{A D} \times A S$, ut itaque $D S$ est major $A D$, erit $\frac{1}{4} L$, major $A S$.

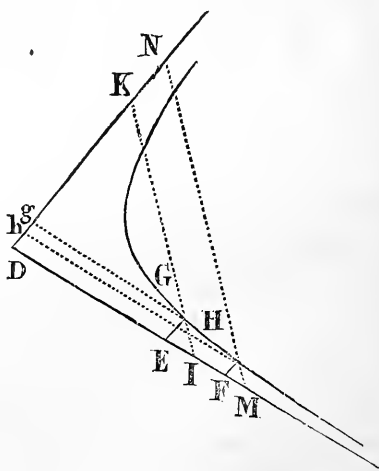


Denique. Ducantur a focus lineæ $H P, S P$, lineæ $P M$ bifariam dividat angulum P , dico eam esse Tangentem Hyperbolæ in P ; hoc est

illam non occurrere Hyperbolæ in alio quovis puncto p ; ex $H P$ tollatur $H I = D A$, erit $P I = P S$ (per hoc Theor.) et ducta $I S$ erit $P M$ perpendicularis in medium N lineæ $I S$, ex alio quovis puncto p ducantur rectæ $p I, p S$ erunt inter se æquales, ob æqualia Triangula $p N I, p N S$ (per 4. I. Elem.) sed si p esset in Hyperbola, esset $H p = H I + p S$ sive quia $p I = p S$ esset $H p = H I + I p$, quod absurdum (per 20. I. Elem.)

Theor. IV. Si sumantur pro abscissis portiones quævis Asymptoti ab Hyperbolæ centro, et Ordinatæ sint Parallelæ alteri Asymptoto, Ordinatæ erunt suis Abscissis reciproce proportionales; et area inter Asymptotum, Hyperbolam, ordinatam Vertici axis occurrentem et ordinatam quamvis comprehensa erit abscissæ hujus ordinatæ Logarithmus.

Demonst. Sit C centrum Hyperbolæ, $C E, C F$ abscissæ, $E G, F H$ ordinatæ Asymptoto $C N$ parallelæ, dico quod est $C E : C F = F H : E G$: Ductis enim per G et H lineis $G g, H h$ parallelis Asymptoto $C F$, et $I G K, M H N$ inter se parallelis trans Hyperbolam, erunt similia Triangula $I G E$ et

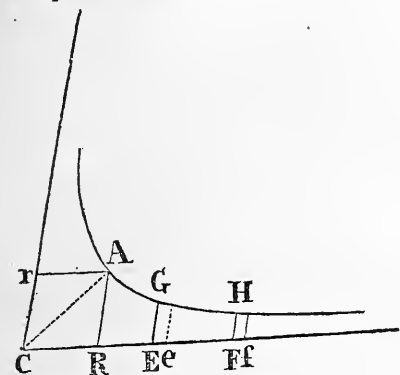


$M H F, G K g$ et $H N h$ propter Parallelas ideòque est

$I G : M H = G E : H F$
et $G K : H N = G g$ (sive $C E$) : $H h$ (sive $F C$) compositis rationibus est
 $I G \times G K : M H \times H N = G E \times C E : H F \times F C$. Sed, (per Lem. I.) est $I G \times G K = M H \times H N$, ergo $G E \times C E = H F \times F C$ est ergo $C E : C F = H F : G E$, cum autem Parallelogrammata $C G, C H$, sint

æquiangula et ea lateribus reciprocis contineri sit demonstratum, sunt æqualia.

Dico denique areas Hyperbolæ esse abscissarum Logarithmos; ex centro C ducatur axis CA, et ex vertice A ducantur lineæ AR, AR Asymptotis Parallelæ, ob Angulum C bifarium divisum et parallelas, erit CR = AR sit AR = 1; et fingantur duæ ordinatæ quæ ita moveantur ut abscissæ unius sint semper potentia eadem n alterius; coincident quidem in R, nam quævis potentia unitatis est semper 1, sed



procedendo sit CE = x debeat esse CF = x^n , erunt ergo GE $\frac{1}{x}$ et HF $\frac{1}{x^n}$ est enim

$$CE : CR = AR : GE \text{ sive } x : 1 = 1 : \frac{1}{x}$$

$$\text{et } CF : CR = AR : FH \text{ sive } x^n : 1 = 1 : \frac{1}{x^n},$$

fluxio autem lineæ CE erit $dx = Ee$, et lineæ CF erit $dx = Ff$, ideo

$$\text{areæ } RG \text{ fluxio erit } dx \times \frac{1}{x} = \frac{dx}{x} \text{ et areæ}$$

$$RH, \text{ n} x^n \text{ erit } dx \times \frac{1}{x^n} = \frac{dx}{x^n} \text{ sed } \frac{dx}{x^n} = \frac{dx}{x} \times \frac{1}{x^{n-1}}$$

$$\frac{dx}{x} = 1 : n, \text{ sunt ergo fluxiones earum}$$

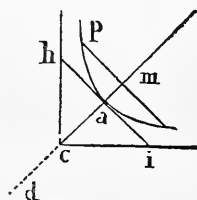
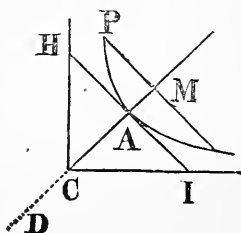
arearum in Ratione constanti 1 ad n, ideoque et areæ integræ RG, RH quæ sunt earum summæ, sunt in eadem ratione 1 ad n, sunt autem 1 et n Exponentes potentiarum abscissarum CE, CF; sunt ergo areæ sicut illi exponentes, sed Logarithmi sunt semper ut Exponentes potentiarum quantitarum quarum sunt Logarithmi, ergo illæ areæ RG, RH, sunt Logarithmi abscissarum CE, CF.

In puncto R ubi abscissa est unitas, area est o, ut Logarithmis convenit, fitque negativa retrocedendo ab R versus C, simulque cum sint abscissæ minores unitate CR fiunt fractiones.

Theor. V. Si Angulus Asymptotorum sit Rectus, Hyperbola dicitur æquilatera, æqualesque sunt Axes conjugati, ideoque latus Rectum Axis transverso est æquale : ac (per Theor. II.) facta

abscissarum quadrato ordinatarum æqualia sunt, sicut in circulo : Diversæ Hyperbolæ eodem Asymptotorum angulo descriptæ sunt similes : si verò idem sit Hyperbolarum axis, sed diversus Angulus, erunt ordinatæ ad idem axeos punctum sicut Radices quadratæ Laterum Rectorum Principalium, et in eâ erunt ratione portiones earum Hyperbolarum per Ordinatas terminatarum quarum æquales sunt abscissæ.

Demonst. Axis transversus est perpendicularis conjugato, dividitque bifarium angulum Asymptotorum; si ergo is angulus sit 90° , ejusque dimidium 45° . Triangulum CAH erit Isosceles et CA = AH, cætera ex his faciliè deducuntur.

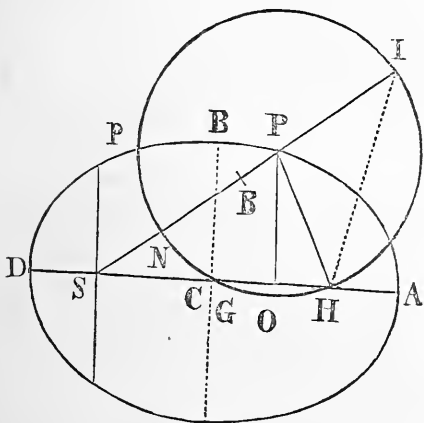


Si in duabus Hyperbolis anguli Asymptotorum sint æquales, ut bifarium dividuntur per axem, similia erunt Triangula CAH, cah : ideoque $CA^2 : AH^2 = ca^2 : ah^2$ sumantur abscissæ AM, am in ratione AD ad a d erit etiam DM : dm in eadem ratione; cum sit ergo AM : am = AD : a d

et DM : dm = AD : a d. est $AM \times DM : am \times dm = AD^2 : a d^2$ sed est $CA^2 : AH^2 = ca^2 : ah^2 = AM \times DM : MP^2 = am \times dm : m p^2$, et altern. $AM \times DM : am \times dm = MP^2 : m p^2$ est ergo $AD^2 : a d^2 = MP^2 : m p^2$ unde est $MP : m p = AD : a d$, omnes ergo ordinatæ ac omnia puncta Hyperbolæ determinantur per rationem AD ad a d.



Theor. III. Sit $A D$ axis major, a centro feratur utrinque $C H$, $C S$, æquales et tales ut quadratum $C H^2$ sive $C S^2$ cum quadrato semi-axis conjugati $C B^2$ sit æquale quadrato semi-axis majoris $C A^2$, dicanturque puncta H et S , Foci, summa linearum ab utroque foco ad quodvis punctum Ellipseos ductarum erit semper æqualis Axi majori, (Apol. Lib. III. Prop. LII.); et tota linea ordinatim applicata in foco erit æqualis Lateri Recto Principali, quod ergo minus erit quadruplo distantie foci a proximo Vertice.



Demonst. Ducatur quævis linea ex foco S , in eâ sumatur $SI = DA$ et ducta $I H$ ad alterum focum, fiat $I H P = I$ erit $I P = P H$, ideoque $S P + P H = S P + P I = S I = D A$ sive axi majori: quo posito dico punctum P ad Ellipsim pertinere. Centro P radio $P H$ describatur circulus $I H G N$ habebitur hæc Proportio $SI : SH = SG : SN$, sumendo dimidium harum linearum manebit proportio; sit autem $\frac{1}{2} SI = SR$; $\frac{1}{2} SH = CH$; $\frac{1}{2} SG = \frac{1}{2} SH - \frac{1}{2} GH$ et demissa PO perpendiculari in GH est $\frac{1}{2} GH = HO$ ergo $\frac{1}{2} SG = CH - HO = CO$. Denique $\frac{1}{2} SN = \frac{1}{2} SI - \frac{1}{2} NI = RI - PI = RP$ est ergo

$SR : CH = CO : RP$ et componendo habetur $SR : SR + CH = CO : CO + RP$, tum prioris rationis terminis jungendo terminis secundæ, est: $SR : SR + CH = CO + SR : CO + RP + SR + CH$ sive quia $SR = AC = DC$ et $CH = CS$, est $AC : AC + CH = DO : SP + SO$. At operationibus contrariis factis in eandem proportionem $SR : CH = CO : RP$, hoc est, dividendo et postea prioris rationis terminis

e terminis secundæ detrahendo substitutionibusque factis erit

$AC : AC - CH = AO : SP - SO$ multiplicatis autem terminis utriusque proportionis est

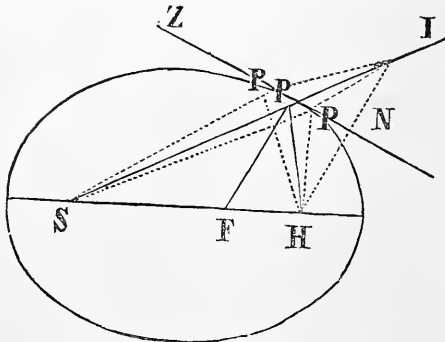
$AC^2 : AC^2 - CH^2$ (sive BC^2) $= AO \times DO : SP^2 - SO^2$, est autem (per 47. I. Elem.) $SP^2 - SO^2 = OP^2$, sed est $AC^2 : BC^2 = AO \times DO$ ad quadratum ordinatæ in O , est ergo PO ipsa illa ordinata, et punctum P ad Ellipsim pertinet.

Sit autem Sp ordinata in foco erit $AC^2 : BC^2 = AS \times SD : Sp^2$, est autem (per 5. II. Elem.) $AS \times SD = AC^2 - CS^2 = BC^2$, est ergo $AC^2 : BC^2 = BC^2 : Sp^2$ sive, $AC : BC = BC : Sp$, et duplicando omnes terminos: $2 AC : 2 BC = 2 BC : 2 Sp$, sed est $2 AC : 2 BC = 2 BC : L$ ergo $L = 2 Sp$, et $\frac{1}{2} L = Sp$.

Est autem (per Theorema II.) Sp^2 , sive $\frac{1}{4} L^2 = \frac{AS}{2 AC} \times L \times DS$ et $\frac{1}{4} L = \frac{AS}{2 AC} \times DS$ ut ergo est AS minor $2 AC$ erit $\frac{1}{4} L$ minor DS , hoc est latus rectum minus est quadruplo distantie foci a proximo Vertice.

Theor. IV. Tangens Ellipsis bifariam dividit Angulum qui fit inter unam e lineis a foco ductam et productionem alterius: et lineæ ab utroque foco ductæ, æquales faciunt angulos cum Tangente, et si bifariam dividatur angulus quem faciunt lineæ a foco ductæ, linea bisecans erit curvæ perpendicularis. (Apol. 48. b. 3. 48.)

Demonst. Ducantur a focus lineæ SP , HP productaque SP in I , dividatur bifariam angulus SPH , dico lineam ZPN non occurrere Ellipsi in ullo alio puncto p , sit $PI = PH$ et



ductâ $I H$, erit PN perpendicularis in ejus medium, ex alio quovis puncto p , ducantur $p I$, $p H$, quæ erunt æquales ob æqualia Triangula $p N I$, $p N H$ (per 4. I. Elem.) sed si p foret in Ellipsi, esset $Sp + p H$ sive $Sp + p I = SI$ quod absurdum (per 20. I. Elem.)

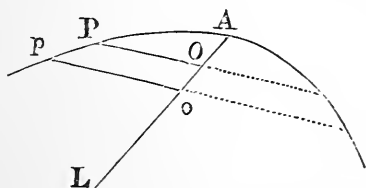
Est autem $ZPS = IPN$ (per 15. I. Elem.) est $IPN = NPH$, per const. ergo $ZPS = NPH$. Si ergo $FPS = FPH$ est $ZPS + FPS = NPH + FPH$, sunt

Cor. II. Si Ellipsis sit data, sic inveniuntur centrum et Axes: ducantur ut lubet duæ Parallelæ P p, F f, per earum medium O, o, ducatur linea, erit Diameter, ejus medium C erit Centrum ex quo describitur circulus qui secet curvam in duobus punctis R, r ducatur per centrum linea perpendicularis in lineam R r quæ eam bifariam dividet (per 3. 3. Elem.) erit ergo Axis, alter axis habetur erigendo lineam huic perpendicularem in Centro ad curvam usque.

IX. De Parabola.

Theor. I. Omnes Diametri Parabolæ sunt infinitæ et inter se Parallelæ: quadrata ordinarum sunt inter se ut Abscissæ Diametrorum, et cum tertia proportionalis abscissæ et ordinatæ dicatur Latus Rectum, factum lateris Recti per abscissam est æquale quadrato ordinatæ, hincque derivatur nomen hujus curvæ. (Apol. Lib. 1. Prop. 20.)

Dem. Ducatur in basi conici chorda parallela plano Parabolæ, et infinitè parva, per verticem conici et eam chordam ducatur Planum et aliud illi parallelum per unam e lineis Parabolæ in hoc plano formabitur Hyperbola, sed quam proxima Parabolæ, et cujus centrum tanto magis a Vertice conici removetur quo minor est chorda per quam transit planum per Verticem conici ductum, evanescat hæc chorda, centrum ejus Hyperbolæ in infinitum abibit, et ut Planum verticale fiet tangens cono, coincidet hæc Hyperbola cum Parabolâ, sed omnes ejus Diametri a puncto infinitè remoto divergentes erunt Parallelæ et infinitæ, tales ergo etiam erunt Diametri Parabolæ. Præterea ex casu 2^{do}. Lem. III. constat, quod si secans infinita plures lineas Parallelas in Sectione Conicâ secet, abscissæ erunt inter se ut facta partium linearum Parallelarum, sed hæ bifariam dividuntur a Diametro, sunt ergo Diametri abscissæ sicut quadrata ordinarum.

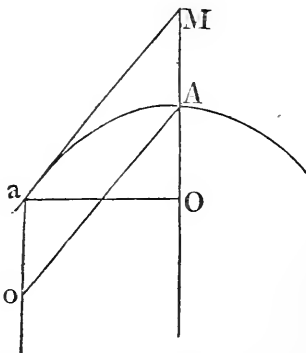


Fiat $AO : OP = OP : L$ erit $OP^2 = AO \times L$; esto verò quævis alia abscissa A o et ordinata o p erit $AO : A o = OP^2 : o p^2$, et multiplicando primam rationem per L erit $L \times AO : L \times A o = OP^2 : o p^2$, sed per Hypothesim $AO \times L = OP^2$ ergo etiam $L \times A o = o p^2$ hoc est factum Lateris recti per quamvis abscissam æquale est quadrato ordinatæ ipsi respondentem.

Cor. I. Si in Diametrum productam sumatur a Vertice longitudo æqualis lateri Recto, et ab ejus extremo ad extremum abscissæ describatur semi-circulus, et in vertice diametri Parabolæ erigatur Perpendicularis ad circulum usque, erit

hæc perpendicularis æqualis ordinatæ ad eam abscissam pertinenti.

Cor. II. Si in Diametro quævis sumatur a vertice quarta pars ejus Lateris recti, ordinatim applicata illi puncto erit æqualis lateri recto. Sit enim $A o = \frac{1}{4} L$ est $\frac{1}{4} L L = o p^2$: ergo $L L = 4 o p^2$ et $L = 2 o p$. sive toti ordinatim applicatæ in p

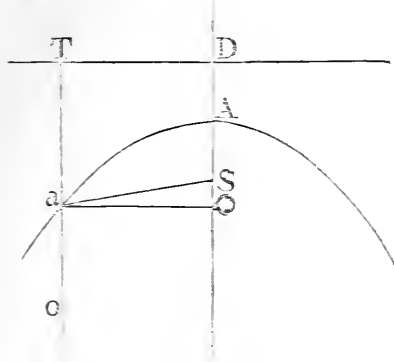


Cor. III. Latus Rectum Diametri cujusvis est æquale Lateri recto axis et quadruplo abscissæ axis determinatæ per ordinatam et vertice Diametri in axem ductam. Ducatur ex vertice a Diametri tangens a M quæ axi occurrat in M et a O ordinata axi, per Corollarium Lemmatis V. distantia verticis axis A ad M est æqualis distantia ejusdem verticis ab O, ergo $MO = 2 AO$, et (per 47. I. Elem.) est $M^2 = MO^2$ (sive $4 AO^2$) + $a O^2$ (sive $L \times AO$) = $4 AO^2 + L \times AO$; a vertice A axis ducatur ordinata A o ad Diametrum propositam, evidens est ob parallelas a o, A O, et Tangentem ordinatæ parallelam, esse a o = A M sive A O et o A = a M; sit verò l latus Rectum Diametri a o, erit $o A^2$, sive $a M^2 = l \times a o = l \times A O$ sed erat $a M^2 = 4 AO^2 + L \times AO$ ergo $l \times A O = 4 AO^2 + L \times AO$, unde $l = L + 4 AO$. Q. e. d.

Theor. II. Si in axe sumatur a vertice quarta pars ejus lateris recti, id punctum vocatur Parabolæ focus, si verò ultra verticem eadem feratur longitudo et per punctum in quo cadit ducatur linea axi perpendicularis, dicitur Directrix Parabolæ: Si autem producat quævis Diameter ad Directricem, portio ejus inter verticem et Directricem comprehensa est quarta pars lateris Recti ejus Diametri, et est æqualis distantia ejus verticis a foco.

Demont. Ut enim Diameter et axis sunt paralleli, ducta perpendiculari a T a vertice diametri ad directricem erit $T = OD = DA + AO$, est verò DA, quarta pars lateris recti principalis et A O abscissa axis quæ respondet ordinatæ a O a vertice Diametri ductæ, est verò (per Corol. 2. Theor. præced.) latus rectum diametri æquale quadruplo lateris recti et quadruplo A O, hoc est $= 4 DA + 4 AO$

ergo $aT = DA + AO$ est quarta pars lateris Recti Diametri aO .



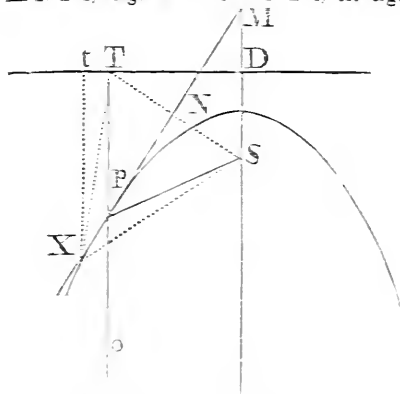
Secundò, E foco Parabolæ S, ad verticem Diametri ducatur S a. sitque ducta a O ordinata axi, (per 47. 1. Elem.) sit $Sa^2 = SO \cdot \frac{1}{2} + aO^2$ et $aO^2 = 4DA \times AO$: ergo $Sa^2 = SO \cdot \frac{1}{2} + 4DA \times AO$, sed est DO^2 (per 8. 2. El.) $= SO^2 + 4DA \times AO$, ergo $DO^2 = Sa^2$ et $Sa = DO = aT$.

Theor. III. Si a puncto Parabolæ ducatur perpendicularis ad Directricem, et linea ad focum, bifariamque dividatur Angulus quem faciunt, linea eum dividens erit Tangens in eo puncto, quæ si producatur donec secet axem, portio axis a foco ad occursum Tangentis contenta erit æqualis lineæ a foco ad punctum Parabolæ ductæ: Angulus Diametri cum Tangente erit æqualis angulo lineæ a foco ductæ cum eâ Tangente, ideo ea quæ secundum Diametros ad Parabolam appellunt ad focum reflectentur. et Angulus Diametri cum lineâ a foco ductâ bifariam dividitur per perpendicularem ad curvam: si ea perpendicularis secet axem, pars axis inter eam et ordinatam axi ex Vertice Diametri ductam, est æqualis dimidio lateris recti principalis, et pars axis inter eam et Tangentem comprehensa, est dimidium lateris Recti Diametri. ipsa verò perpendicularis est media proportionalis inter ea semilatera recta.

Demonst. Sit T D directrix. a puncto P linea P T perpendicularis in Directricem ducatur, ducatur etiam ad focum linea P S et denique ducatur linea P N bifariam dividens angulum S P T; illa linea perpendiculariter et bifariam dividet lineam S T a foco ad punctum T ductam. Ex quovis puncto X lineæ P N ducantur lineæ X T, X S. erunt inter se æquales (per 4. 1. Elem.), erit verò X T directrici obliqua ideoque perpendicularis ab X in Directricem demissa erit brevior quam X T ac per consequens brevior quam X S, ergo id punctum X vicinius erit Directrici quam foco, erit ergo extra Parabolam, ideoque linea P N erit Tangens, cum in unico puncto P Parabolæ occurrat.

Anguli autem T P N, N M S sunt æquales

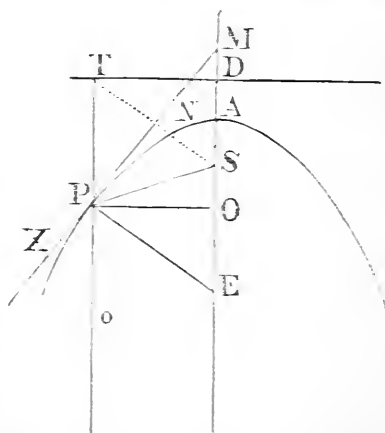
ob Parallelas T P, M S, et per const. T P N = N P S, ergo N M S = N P S, est ergo



Triangulum M S P Isosceles, et M S = S P

Anguli autem X P O, T P N, per verticem sunt oppositi, ergo sunt æquales, sed T P N = N P S per const. ergo X P O = N P S.

Dividatur bifariam angulus S P O per lineam P E ita ut sit O P E = E P S: erit X P O + O P E = N P S + E P S hi quatuor valent



duos rectos, ergo X P O + O P E valent rectum ut est P E perpendicularis in Tangentem.

Est ergo in Triangulo Rectangulo M P E (ductâ perpendiculari P O) $MO : PO = PO : OE = \frac{PO^2}{MO}$, est verò $PO^2 = L \times AO$ et $MO = 2AO$ ergo $OE = \frac{L \times AO}{2AO} = \frac{L}{2}$.

Ergo etiam E M est æqualis dimidio lateris Recti Diametri P O, est enim ejus Latus Rectum æquale lateri Recto principali et quadruplo

Porro ob similitudinem triangulorum HAX , HMP , est $H M : P M = H A : A X = P M \times H A$ et $A X^2 = \frac{P M^2 \times H A^2}{H M}$ et

$\frac{A M^2 \times P M}{A X^2} = \frac{A M^2 \times H M^2}{P M \times H A^2}$, vis igitur est etiam in omni sectione conicâ reciprocè ut $\frac{A M^2 \times H M^2}{P M \times H A^2}$

In Parabolâ (per Prop. 35. Lib. 1. Conic. Appoll. sive Cor. 1. Lem. V. de Conicis) $H A = A M$, et $H M = 2 A M$, et (per Prop. 20. Lib. 1. Conic. Appoll. quæ est Theor. I. de Parabola) $A M$, adeoque et $H M$ est semper ut $P M^2$. Ergo vis centripeta in parabolâ erit reciprocè ut $\frac{4 A M^4}{P M \times A M^2}$ sive ut $\frac{A M^2}{P M}$, hoc est, ut $\frac{P M^4}{P M} = P M^3$, hoc est, reciprocè ut cubus ordinatæ $P M$.

In Ellipsi et Hyperbolâ, si latus rectum axis AB , dicatur L , erit (ex Prop. 21. Lib. 1. Conic. Appoll. sive Theor. II. de Ellip.) $P M^2 : A M \times M B = L : A B$ ac proinde $A M = \frac{P M^2 \times A B}{L \times M B}$, et $A M^2 = \frac{P M^4 \times A B^2}{L^2 \times M B^2}$, et

$\frac{A M^2 \times H M^2}{P M \times H A^2} = \frac{P M^3 \times A B^2 \times H M^2}{L^2 \times M B^2 \times H A^2}$, undè deletâ ratione constanti $\frac{A B^2}{L^2}$, erit vis

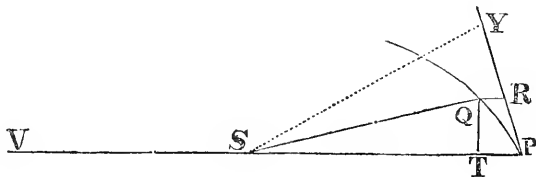
centripeta reciprocè ut $\frac{P M^3 \times H M^2}{M B^2 \times H A^2}$; verùm (per Prop. 37. Lib. 1. Conic. Appoll. sup. Cor. 2. Lem. V.) posito centro sectionis C , est $C M : C A = C H : C H$, adeoque dividendo vel componendo $C M : A M = C A : H A$, ac proinde addendo vel detrahendo terminos secundæ rationis e terminis prioris $M B : H M =$

$C A : H A$ et $\frac{H M}{M B \times H A} = \frac{1}{C A}$ et $\frac{H M^2}{M B^2 \times H A^2} = \frac{1}{C A^2}$ quæ est quantitas constans. Erit igitur etiam in hyperbolâ et Ellipsi adeoque in omni sectione conicâ vis centripeta reciprocè ut $P M^3$, seu reciprocè ut cubus ordinatæ $P M$; deletâ nimirum, in expressione vis centripetæ suprâ inventâ, quantitate $\frac{H M^2}{M B^2 \times H A^2}$ constante.

PROPOSITIO IX. PROBLEMA IV.

Cyretur corpus in spirali P Q S secante radios omnes S P, S Q, &c. in angulo dato : requiritur lex vis centripetæ tendentis ad centrum spiralis.

(^s) Detur angulus indefinite parvus P S Q, et ok datos omnes angulos



dabitur specie figura S P R Q T. Ergo datur ratio $\frac{Q T}{Q R}$, estque

$\frac{Q T \text{ quad.}}{Q R}$ ut Q T, hoc est (ob datam specie figuram illam) ut S P. Mu-

tetur jam utcumque angulus P S Q, et recta Q R angulum contactus Q P R

subtendens mutabitur (per Lemma XI.) in duplicatâ ratione ipsius P R

vel Q T. Ergo manebit $\frac{Q T \text{ quad.}}{Q R}$ eadem quæ prius, hoc est ut S P.

Quare $\frac{Q T q \times S P q}{Q R}$ est ut S P cub. ideoque (per Corol. 1. et 5. Prop.

VI.) vis centripeta est reciprocè ut cubus distantiae S P. Q. e. i.

Idem aliter.

(^t) Perpendicularum S Y in tangentem demissum, et circuli spiralem con-

(^s) 225. Ob omnes angulos datos, dabitur specie figurâ S P Q R T, et ipsius latera omnia erunt inter se in datâ seu constanti ratione, ergo datur ratio $\frac{Q T}{Q R}$, estque proindè $\frac{Q T}{Q R} \times Q T$, ut Q T hoc est, ob datam rationem Q T, ad S P, erit $\frac{Q T^2}{Q R}$, ut S P, mutetur jam utcum-

que angulus P S Q, et manebit $\frac{Q T^2}{Q R}$, ut S P.

Nam Q R, ubi angulus P S R constans est, dicatur a, et Q T dicatur b; ubi verò angulus P S R utcum-

que mutatur, Q R dicatur x, et Q T dicatur y,

et erit per Lem XI. $a : x = b^2 : y^2$, adeoque $\frac{b^2}{a} = \frac{y^2}{x}$ hoc est $\frac{y^2}{x}$ seu $\frac{Q T^2}{Q R}$ eadem manet quæ prius, nimirum ut S P. Quoniam autem evanescente angulo P S R, sive coeuntibus punctis Q, P, recta S R, rectæ S P parallela evadit, erit per Coroll. 1. et V. Prop. VI. vis centripeta reciprocè ut $\frac{Q T^2 \times S P^2}{Q R}$,

ac proindè substituendo S P, loco $\frac{Q T^2}{Q R}$, vis

centripeta erit reciprocè ut S P³.

(^t) 226. Sit circuli spiralem osculantis in P

centricè secantis chorda P V sunt ad altitudinem S P in datis rationibus; ideoque S P cub. est ut S Y q \times P V, hoc est (per Corol. 3. et 5. Prop. VI.) reciproce ut vis centripeta.

LEMMA XII.

Parallelogramma omnia circa data ellipseos vel hyperbolæ diametros quasvis conjugatas descripta esse inter se æqualia.

Constat ex conicis. (y)

PROPOSITIO X. PROBLEMA V.

Gyretur corpus in ellipsi: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad centrum ellipseos. (z)

Sunto C A, C B semiaxes ellipseos; G P, D K diametri aliæ conjugatæ; P F, Q T perpendiculara ad diametros; Q v ordinatim applicata ad diametrum G P; et si compleatur parallelogrammum Q v P R, erit ([^a] ex conicis) rectangulum P v G ad Q v quad. ut P C quad. ad C D quad. et

chorda per centrum virium S ducta P V, demissumque in tangentem perpendicularum S Y, et ob angulum S Y P, rectum, et S P Y, datum, dabitur specie triangulum S P Y. Ergo datur ratio S Y ad S P, et in virium centripetarum formulis S P scribi potest pro S Y. Prætereà datur ratio P V ad S P, nam (210) S Y \times Q P = S P \times Q T, adeoque Q P = $\frac{S P \times Q T}{S Y}$;

undè ob rationem $\frac{S P}{S Y}$ datam, Q P scribi potest

pro Q T. Verùm (211) P V = $\frac{Q P^2}{Q R}$, ergò

P V, est ut $\frac{Q T^2}{Q R}$. Cùm igitur ex demonstrationis Prop. IX. $\frac{Q T^2}{Q R}$, sit ut S P, erit etiam P V, ut S P, et propterea S P, loco P V, substitui potest in formulis.

227. *Scholion.* Propositio IX. facillè demonstratur etiam per formulam Hermannii (214), $v = d p : p^3 d z$; est enim in hoc casu S P = z, S Y = p; et si ratio $\frac{S Y}{S P}$ data dicatur

$\frac{a}{b}$, erit $\frac{a}{b} = \frac{p}{z}$ ergo a z = b p, et (160) a d z

= b d p, et $\frac{d p}{d z} = \frac{a}{b}$; undè $v = \frac{a}{b p^3}$; hoc est, ob datam $\frac{a}{b}$ vis centripeta v, est directè ut $\frac{1}{p^3}$, hoc est reciproce ut p³, aut quia p = $\frac{z a}{b}$, v erit ut $\frac{1}{z^3}$ directè, reciproce autem ut z³, deletis nimirum constantibus.

(y) Demonstratio hujus Lemmatis inferius tradetur ubi nempe NEWTONUS eo Lemmate ad solutionem proximi Problematis utetur.

(z) 228. Gyretur corpus in Hyperbolâ, invenietur Lex vis centralis spectantis centrum Hyperbolæ simili modo, nisi quod vis illa ejus centri respectu sit centrifuga, quoniam centrum Hyperbolæ non est intra Hyperbolam constitutum, sed Hyperbola versus illud convexitatem obvertit; Legatur, si lubet, utraque solutio hujus Problematis et ad figuram infra positam in quâ Hyperbola descripta est referatur, liquebit verè dici de Hyperbolâ ea quæ NEWTONUS de Ellipsi statuit.

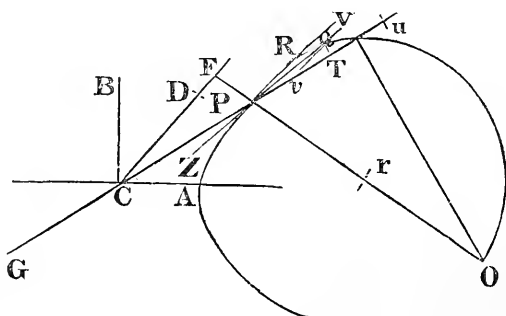
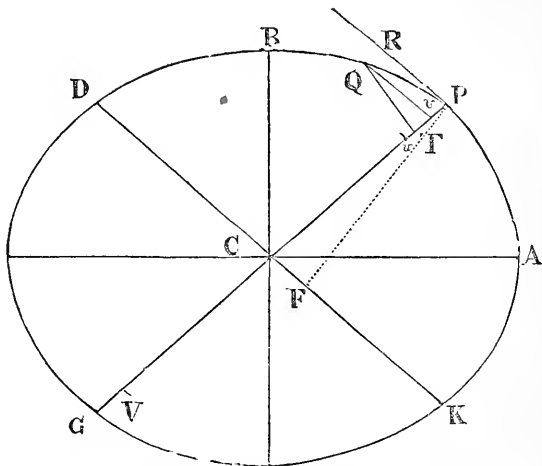
(^a) Ex Conicis, per 21. 1. lib. Apoll. Vide sup. Lemma IV. de Conicis.

(ob similia triangu-
 Q v T, P C F) Q v
 quad. est ad Q T quad.
 ut P C quad. ad P F
 quad. et conjunctis rati-
 onibus, rectangulum
 P v G ad Q T quad.
 ut P C quad. ad C D
 quad. et P C quad. ad
 P F quad. id est, v G ad
 Q T quad.

$$\frac{P v}{P C} \text{ ut } P C$$

$$\text{quad. ad } \frac{C D q \times P F q}{P C q}.$$

Scribe Q R pro P v, et (per Lemma XII. [6]) $BC \times CA$ pro $CD \times PF$



nec non (punctis P et Q coëuntibus) $2 P C$ pro v G, et ductis extremis
 et mediis in se mutuo fiet $\frac{Q T \text{ quad.} \times P C q}{Q R}$ æquale $\frac{2 B C q \times C A q}{P C}$

Est ergo (per Corol. 5. Prop. VI.) vis centripeta reciproce ut $\frac{2 B C q \times C A q}{P C}$;

id est (ob datum $2 B C q \times C A q$) reciproce ut $\frac{1}{P C}$, hoc est, directe
 ut distantia P C Q. e. i.

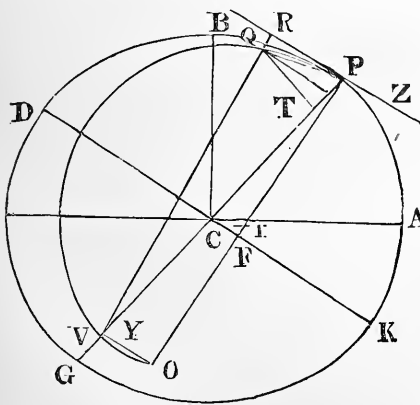
(b) 229. Parallelogramma omnia circa data jugatas descripta sunt inter se æqualia.
 Ellipseos vel Hyperbolæ Diametros quasvis con-

inde vis, quâ corpus P in ellipsi revolvitur, erit reciprocè ut $\frac{2 D C q}{P C}$ in P F q (per Corol. 3. Prop. VI.) hoc est (ob datum $2 D C q$ in P F q) directè ut P C. Q. e. i.

Corol. 1. Est igitur vis ut distantia corporis a centro ellipseos: (*) et vicissim, si vis sit ut distantia, movebitur corpus in ellipsi centrum habente in centro virium, aut forte in circulo, in quem utique ellipsis migrare potest

Quarè datis diametris conjugatis eorumque angulo P C D, faciliè invenitur radius circuli sectionem conicam osculantis in diametri cujusvis extremo.

251. *Coroll. 2.* Datis radio osculi P r, semidiametro sectionis conicæ P C, et positione tangentis P R, seu angulo P C D, diametrorum conjugatarum, datur altera semidiameter conjugata D C, et describi potest sectio. His enim quæ diximus datis, datur quoque perpendicularis P F, ac proinde D C, media proportionalis inter P r, et P F, (230) datas. Datis autem diametris conjugatis earumque angulo, sectio conica describi potest; ut notum est ex Sectionum Conicarum elementis.



252. *Coroll. 3.* Hinc etiam problema V. aliter solvitur. Cum enim sit vis centralis (212) ut $\frac{C P}{P r \times P F^3}$, sitque $P F = \frac{B C \times C A}{C D}$, (per Lem. XII.) et $P r = \frac{D C^2}{P F}$ (230). His valoribus in formulâ $\frac{C P}{P r \times P F^3}$, substitutis, ea sit $\frac{C P}{B C^2 \times C A^2}$ hoc est, ob constantem quantitatem $B C^2 \times C A^2$, vis est directè ut P C.

(*) Et vicissim si vis sit ut distantia, movebitur corpus in Ellipsi centrum habente in Centro Virium, etc., ut hæc conversâ demonstretur sequentia sunt præmittenda.

253. *Lemma I.* Ducatur in puncto contactus perpendicularis in Tangentem, ad axem terminatam, et a Centro ducatur ipsi Parallela ad Tangentem usque, harum linearum factum erit æquale quadrato semi-Axis.

Ex P ducatur perpendicularis in Tangentem P K, ducatur ordinata P O perpendicularis in axem, et in C, ducatur C Q, Parallela, P K, et C V, parallela P O, triangua P O K, C Q V, erunt similia, ergo erit P O : P K = C Q : C V, ergo P K \times C Q = P O \times C V similia etiam sunt Triangua C M V, O M P, erit ergo C M : M O = C V : P O; sed (per

Cor. 2. Lem. V. de Conicis) est C M = $\frac{C A^2}{C O}$

et (per Cor. 3. ejusdem Lem.) M O = $\frac{A O \times D O}{C O}$ et (per Theor. II. tam de Hyp.

quàm de Ellip.) est C A² : A O \times D O =

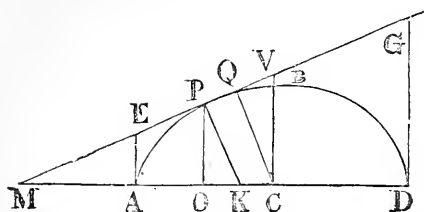
C B² : P O² ergo est C M : M O = $\frac{C A^2}{C O}$:

A $\frac{A O \times D O}{C O} = C A^2 : A O \times D O =$

C B² : P O² = C V : P O, ideoque C B² \times P O = P O² \times C V utrumque vero dividendo per P O est C B² = P O \times C V, erat verò P K \times C Q = P O \times C V. Ergo P K \times C Q = C B². Q. e. d.

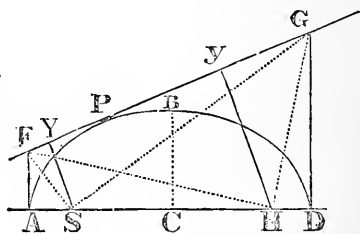
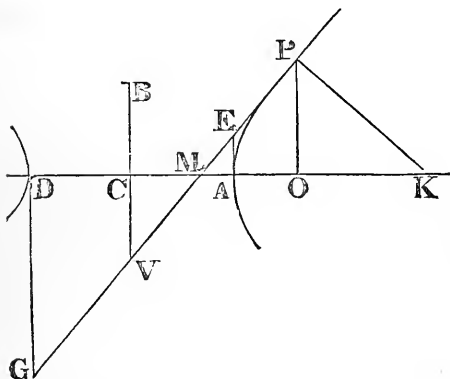
254. *Lemma II.* Sit P M, Sectionis Conicæ Tangens, C A axis, C B ejus conjugatus, in utroque axeos primæ Vertice erigantur perpendiculares A E, D G, ad Tangentem usque, factum earum A E \times D G, erit æquale quadrato semi-Axis.

Demonst. Ducta P O ordinata ad axem et C V ad Tangentem usque ipsi Parallela, erit (per Cor. 2. Lemma V. De Conicis) C O : C A = C A : C M. Dividendo verò, est C A — C O vel C O — C A, sive A O ad C A sive C D, sicut C M — C A vel C A — C M, sive M A ad C M, hoc est A O : C D = M A : M C, jungendo terminos primæ rationis terminis secundæ næc non mutatur, estque M A : M C = M A + A O (sive M O) :



$C B^2$, et per naturam focorum (et per
5. vel *6.* II. Elem.) est $A S \times S D$
 $= C B^2$ ergo est $E A \times D G =$
 $A S \times S D$ ideoque $E A :$
 $A S = S D : D G$; Eadem ratione
 probatur Triangula $G D H$, $H A E$
 esse similia, ob latera proportionalia
 $G D$ et $T H$, $H A$ et $E A$ circa an-
 gulos rectos A et D posita, est enim
 ut prius $E A \times D G = C B^2 =$
 $D H \times H A$ ideoque $D G : D H =$
 $H A : E A$.

Secundo, Triangula $S D G$, $E G H$ sunt similia, latera enim $G H$ et $H E$, $G D$ et $D S$ circa angulos $S D G$ et $E H G$ posita sunt proportionalia, nam ob triangula similia $G D H$,



$MC \perp DC$, (sive MD) hoc est a^1 .
 ternando $MA : MO = MC \cdot MD$
 sed ob parallelas $MA : MO =$
 $AE : PO$ et $MC : MD = CV :$
 DG ergo est $AE : PO = CV :$
 DG et est $AE \times DG = PO \times$
 CV sed per Lemma præcedens est
 $PO \times CV = CB^2$, ergo et
 $AE \times DG = CB^2$. Q. e. d.

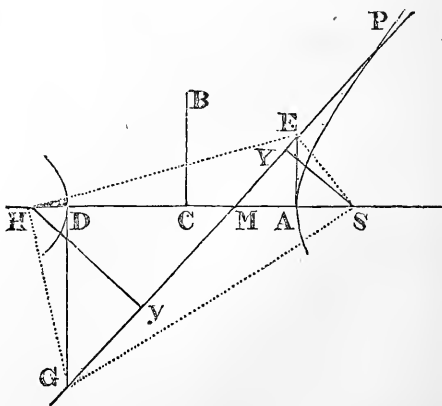
235. *Lemma III.* Ducantur a focus perpendicularares in tangentem Sectionis Conicæ, earum factum erit æquale quadrato semi-Axis.

Demonst. Sint illæ perpendiculares $S Y, H y$, ducantur in utroque vertice axeos transversæ lineæ $A E, D G$, perpendiculares axi usque ad tangentem, et ducantur a focis S et H , ad earum extremitates lineæ $S E, S G$ et $H G, H E$.

Triangula E A S, S D G, E H G,
G H y similia inter se, ut et Triangu-
la G D H, H A E, G S E, E S Y:

primò, similia sunt Triangula $E A S$, $S D G$ quia latera $E A$ et $A S$, $S D$ et $D G$ circa angulos rectos A et D posita proportionalia sunt, nam (per Lemma præced.) est $E A \propto D G =$

H A E, est $G H : H E = G D : H A$, sed
 $H A = D S$, ergo est $G H : H E = G D : D S$; Præterea anguli $S D G$ et $E H G$ sunt
 ambo recti, $S D G$ quidem per constructionem,

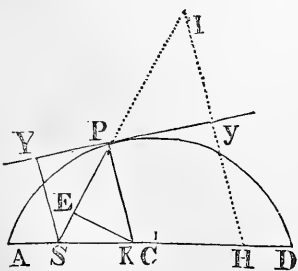


angulus verò $E H G$ est in Ellipsi complementum ad duos rectos angularum $G H D$ et $E H A$, in Hyperbolâ eorum summa, cum autem illi duo anguli $G H D$ et $E H A$ pertineant ad Triangula Rectangula similia, simul sumpti faciunt Rectum, eorumque complementum ad duos rectos est recto æquale, ergo Angulus $E H G$ est rectus; eodem modo probatur Triangula $H A E$, $G S E$ esse similia, ob latera proportionalia $S E$ et $G S$, $A E$ et $H A$, circa angulos $H A E$ et $G S E$ rectos posita; nam ob Triangula similia $E A S$, $S D G$ est $E S : G S = A E : D S$ sive $H A$; et $H A E$ est rectus per constructionem et $G S E$ in Ellipsi est complementum ad duos rectos angularum $G S D$ et $E A S$, et in Hyperbola eorum summa, illi verò Anguli pertinent ad Triangula Rectangula similia, etc.

Tertio, $E G H$ est simile $G H y$ (per 8. VI. EL.) et eadem ratione est $G S E$ simile $E S Y$.

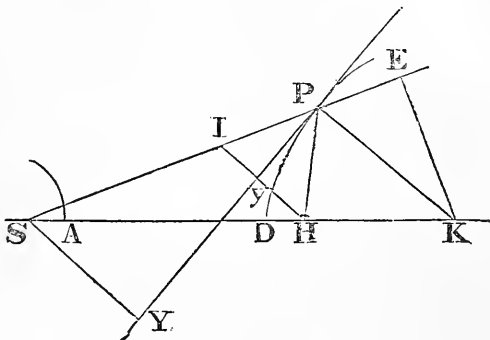
Ex quibus liquet Triangula $E A S$, $G H y$ esse similia ut et Triangula $G S E$, $E S Y$; ex similitudine Triangulorum $E A S$, $G H y$ est $E S : G H = E A : H y$, et ex similitudine Triangulorum $G D H$ et $E S Y$ est $E S : G H = S Y : G D$ ergo est $E A : H y = S Y : G D$ et $E A \times G D = H y \times S Y$ sed $E A \times G D = C B^2$ (per Lemma præcedens,) ergo etiam $H y \times S Y = C B^2$. Q. e. d.

256. Lem. IV. Ducatur a foco S linea $S P$ ad punctum contactûs et ex puncto P contactus ducatur perpendicularis in Tangentem quæ secet axem in K , et ex puncto K ducatur in lineam $S P$ perpendicularis $K E$, pars $P E$ lineæ $P S$ erit æqualis semilateri recto.



237. Producat vel secetur $S P$ in I ut sit $S I = A D$ sive Axi ducaturque ex altero foco linea $H I$ quæ dividitur bifariam et perpendiculariter per Tangentem in y (per Theor. III. de Hyp. et IV. de Ellip.) ergo $H I = 2 H y$ et est $H I$ parallela $P K$, ergo Triangula $P S K$, $I S H$ sunt similia, estque $P S : P K = S I : I H$ sive $2 H y$, sed ob Parallelas $S Y$, $P K$, et angulos rectos Y et E

similia sunt Triangula $P S Y$, $P K E$, ergo est $P S : P K = S Y : P E$, est ideo $S I : 2 H y = S Y : P E$ et $P E = \frac{2 H y \times S Y}{S I}$

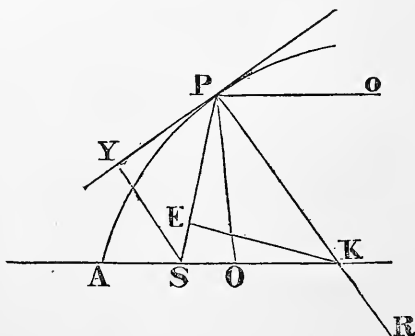


sed $H y \times S Y = C B^2$ et $S I = 2 A C$, ergo $P E = \frac{2 C B^2}{2 A C}$ et $2 P E = \frac{4 C B^2}{2 A C}$ sed

Latus Rectum L est $\frac{4 C B^2}{2 A C}$, ergo $2 P E = L$, sive $P E$ est dimidium lateris recti.

237. 1. Corol. Ex eo quod est $P S : P K = S Y : P E$ sive $\frac{1}{2} L$, est $S Y = \frac{L \times P S}{2 P K}$ et $P K = \frac{L \times P S}{2 S Y}$.

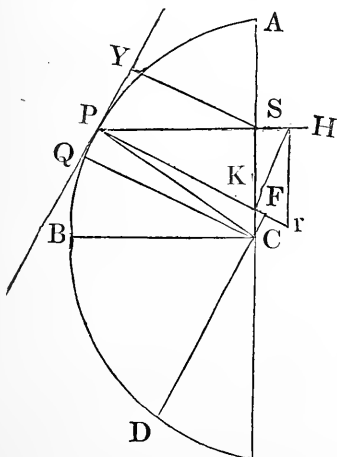
238. 2. Corol. Hoc Lemma cum suo Corollario de Parabola etiam verum est, sed aliter demonstratur, ducta ordinata $P O$ Triangula



$P K O$, $P K E$ sunt æqualia, propter Angulos rectos in O et E ; latus $P K$ commune, et angulum $P K O$ angulo $K P E$ æqualem, ducto

enim Diametro P o, erit o P K æqualis P K O ob Parallelas A K et P o sed o P K est etiam æqualis angulo K P E quia perpendicularis dividit bifariam angulum S P o (per Theor. III. de Parab.) ergo angulus P K O = K P E, et (per 26. 1. Elem.) Triangulum P K O est æquale Triangulo P K E ideoque P E = K O, sed K O est æqualis semilateri recto (per Theor. III. de Parab.) ergo et P E.

239. Lemma V. In omni sectione conicâ cujus focus S, P Y, tangens in P, S Y et P K, tangenti perpendicularis. L, latus rectum, est radius osculi $P r = \frac{4 P K^3}{L^2} = \frac{L \times S P^3}{2 S Y^3}$.



Dem. Sit A P B ellipsis cujus semiaxes A C, B C, semidiametri conjugatæ P C, D C, ac proinde D F, tangenti P Y parallela, atque adeo P F, Q C, tangenti perpendicularis æquales sunt. Est (per Lem. XII. Newt.) C D : B C = A C : P F, et C D² : B C² =

$$C^2 : P F^2, \text{ ideoque est } C D^2 = \frac{B C^2 \times A C^2}{P F^2}.$$

Et quia B C² = C Q × P K sive P F × P K (233.) est C D² = $\frac{P F \times P K}{P F^2} \times A C^2 = \frac{P K \times A C^2}{P F}$; sed est P r = $\frac{C D^2}{P F}$ (230.) ergo

$$\text{est } P r = \frac{P K \times A C^2}{P F^2}; \text{ est autem } A C : B C$$

$$= B C : \frac{1}{2} L, \text{ ergo } B C^2 = \frac{1}{2} L \times A C, \text{ ideoque } P F \times P K = \frac{1}{2} L \times A C, \text{ ergo } P F = \frac{L \times A C}{2 P K} \text{ et } P F^2 = \frac{L^2 \times A C^2}{4 P K^2} \text{ idque sub-}$$

$$\text{stituatur in valore } P r \text{ mox reperto erit } P r = \frac{4 P K^3}{L^2}, \text{ et quia } P K = \frac{L \times S P}{2 S Y} \text{ (237.) erit}$$

$$\frac{4 P K^3}{L^2} = \frac{L \times S P^3}{2 S Y^3} = P r. \text{ Q. e. 1}^{um}.$$

Idem eodem prorsus modo demonstratur in hyperbolâ. Q. e. 2^{um}.

In Ellipsi crescente focorum distantia manet $P r = \frac{4 P K^3}{L^2} = \frac{L \times S P^3}{2 S Y^3}$, adeoque idem

etiam verum est cum focorum distantia infinita evadit, seu cùm Ellipsis in Parabolam mutatur. Q. e. 3^{um}.

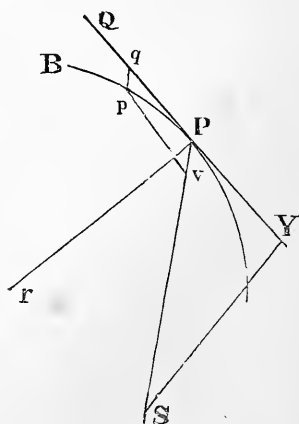
240. Corol. 1. Ex his facillima oritur constructio pro determinando radio curvaturæ in quavis sectione conicâ. Ex K, enim super P K, erigatur perpendicularis K H, cum P S concurrans in H, ex H erigatur super P H perpendicularis H r, erit P r, radius curvaturæ. Nam ob angulos rectos P K H, P H r, et lineas P K, S Y, parallelas est S P : S Y = P r : P H = P H : P K, atque inde S Y² : S P² = P K : P r; adeoque P r = $\frac{P K \times S P^2}{S Y^2}$ sed S Y = $\frac{L \times S P}{2 P K}$ (237), ergo

$$P r = \frac{4 P K^3}{L^2}, \text{ ac proinde } P r \text{ est radius osculi (239).}$$

241. Corol. 2. Quoniam in verticibus sectionum conicarum principalibus S P = S Y, erit ibi $P r = \frac{L \times S P^3}{2 S Y^3} = \frac{L}{2}$, seu radius osculi æqualis dimidio lateris recti principalis.

242. Theor. Datis in puncto P, vis centripetæ quâ corpus curvam P p describit quantitate absolutâ, vis illius directione P S, velocitate corporis, et positione tangentis P Q, datur curvæ P p B curvatura in P, seu radius osculi P r.

Dem. Sit curvæ P p B, et circuli osculatoris arcus infinitesimus P p, et quoniam velocitas corporis P revolvantis finita supponitur, vis centripeta constans est, et illius directio sibi parallela per arcum P p, adeoque arcus ille est



portio parabolæ cujus tangens P Q, et diameter

P S (ex notā 404.) Quoniam autem vis centripetæ quantitas absoluta in P, data est, datumque proinde spatium quod corpus v illā constante, dato tempore percurreret, et præterea corporis P velocitas, ac tangens P Q positio data sunt, data est ratio q p sive P v ad P q sive p v, data ergo est parabola quam corpus P describeret, si vis centripetæ eadem maneret et directionem haberet lineæ P S perpetuò parallelam. Cùm igitur datus sit radius circuli parabolam datam in dato puncto osculantis (259.) datur P r, radius osculi in puncto P. Q. e. d.

243. *Corol.* Hinc datis in puncto P, curvaturā seu radio osculi P r, positione tangentis P Q, velocitate corporis, et vis centripetā directione P S, datur vis illius quantitas absoluta in P; nam propter datas positionem Tangentis, et vis directionem, datur ratio S P ad S Y et $\frac{S P^3}{S Y^3}$ ad S Y³, sive $\frac{S P^3}{S Y^3}$ et propter datum

$$P_r = \frac{L \times S P^3}{2 S Y^2} \text{ datur } \frac{L}{2} \text{ sive } L \text{ latus rectum}$$

principale Parabolæ cujus arcus Pp est portio,
 PS Diameter et PQ Tangens unde datur tota
Parabola et Latus rectum Diametri PS ; de-
nique cum data sit velocitas corporis in P datur
lineola Pq , vel p v dato tempore descripta, da-
tur ergo abscissa Pv sive q p quæ est vis cen-
tripetæ quantitas absoluta,

Datis verò in P , vis centripetæ quantitate absolutâ, vis illius directione PS , positioe tangentis PQ , radio oculi PR , sive datâ curvaturâ, datur velocitas corporis in P ; et generatim si ex his quinque, nimirum, vis centripetæ quantitate absolutâ, illius directione, velocitate corporis, positioe tangentis et curvaturâ, quatuor data fuerint, quintum determinatum est.

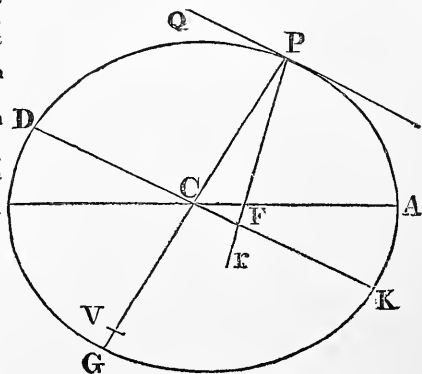
244. *Theor.* Corpus P, circa centrum virium S datum revolvendo, curvam P p B describat, sintque data, vis centripetæ quantitas absoluta in puncto P, data lex secundum quam in variis a centro S distantis vis centripeta agit, positio tangentis P Q, et curvatura in P, determinata ac unica est curva P p B, quam corpus P, circa centrum virium S, potest describere.—*Dem.* Quoniam datur centrum virium S et punctum P, datur quoque positio rectæ P S, hoc est, directio vis centripetæ, ac proinde ex cæteris etiam datis (243.) datur velocitas quâ corpus in puncto P movetur; sed datis in puncto P, vis centripetæ quantitate absoluta, positione tangentis seu rectæ secundum quam projicitur corpus, velocitate projectionis determinatur proximum punctum p, tangens in eo puncto p positio, corporis P in eo velocitas, ut et nova distantia a centro p S, sed datâ lege vis centripetæ in variis a Centro distantis, datur iterum in puncto novo p, vis centripetæ, unde proximum punctum etiam determinabitur, ex his ergo datis omnia puncta curvæ P p B, successive determinantur; ergo data ac unica est curva quam corpus P, his datis describere potest. Q. e. d.

Corol. Iisdem manentibus, si describatur nova curva quæ curvam PpB quam corpus P des-

VOL. I. I

cribit osculetur in P , quæque proinde eandem
habet tangentem PQ , ut potè radio osculi P r ,
perpendiculari, impossibile est ut datis iis quæ
numero 244. posuimus, corpus P , hanc novam
curvam a priori diversam describat, hoc est, ver-
ba NEWTONI ferè usurpando, orbis duo se mutuò
osculantes eandem vi centripetâ describi non
possunt.

245. Hisce positis tandem probabimus quòd si vis centripeta sit ut distantia a centro, movebitur corpus in Ellipsi centrum habente in centro virium, aut fortè in circulo in quem Ellipsis migrat focus coeuntibus.



Data sint centrum virium C, et vis centripetæ quantitas absoluta, data a centro distantia C P, et corpus datâ cum velocitate secundum directionem datam rectæ P Q projiciatur, erit P Q tangens curvæ describendæ. Si fuerit C P a tangente P Q normalis, et velocitas quâ corpus P, projicitur æqualis velocitati quam idem corpus solâ vi centripetâ, ut est in P, constante sollicitutum acquireret, cadendo per dimidium radium P C, curva describenda erit circulus cujus centrum C, et radius C P (201.) si verò talis non fuerit velocitas projectionis, corpus P, aliam curvam describet, in quâ tangens P Q, non semper erit ad radium vectorem C P perpendicularis, cùm hæc sit solius circuli proprietas, ut notum est. Sit ergo P Q ad radium vectorem C P obliqua, per centrum C ducatur recta C K, ipsi P Q parallela, et radio osculi P R data (242.) describatur circulus rectam P C intersecans in V; tùm sumatur C K, media proportionalis inter C P, et $\frac{1}{2}$ P V, et semidiametris conjugatis, C P, C K, describatur ellipsis P D G A, ea erit orbita quam corpus P, describet.—*Dem.* Ellipsis P D G A, describi potest per corpus aliquod A sollicitutum vi aliquâ centripetâ ad centrum C tendente, quæque sit semper ut distantia ab illo centro C P, (Prop. X.) ponamus

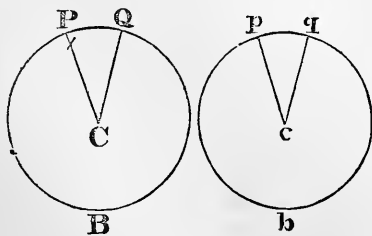
$= FC : EC$; ergo ultima summa rectangulorum evanescentium ut NL , ad summam rectangulorum, evanescentium ut NO , hoc est, area circuli ad aream Ellipsis (per Lem. IV.) rationem habet semiaxis FC , ad alterum semiaxem EC . Q. e. d.

248. *Corol. 1.* Idem eodem prorsus modo demonstratur, si AFB fuerit Ellipsis communem axem AB , habens cum Ellipsi AEB . Et generatim duæ quævis figuræ AFB , AEB , quarum semiordinatæ QN , TN , sunt in datâ ratione et quarum est communis diameter AB , sunt inter se in ratione datâ ordinarum QN , TN .

249. *Corol. 2.* Area circuli cujus diameter est medius proportionalis inter duos Ellipsis axes æqualis est aræ Ellipsis. Nam sit $EC : R = R : FC$, et radio R , describatur circulus, illius circuli area, erit ad aream circuli AFB , ut R^2 ad FC^2 , adeoque ut EC ad FC ; Quare cum Ellipsis AEB , eandem habeat rationem ad circulum AFB (247), manifestum est aream circuli radio R , descripti æqualem esse aræ Ellipsis AEB .

250. *Corol. 3.* Quoniam $R^2 = FC \times EC$, et aræ circulorum sunt ut radorum quadrata, erunt aræ Ellipsium ut axium rectangula.

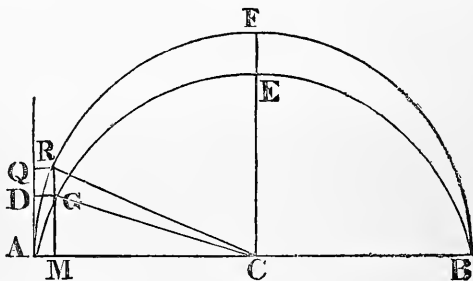
251. *Corol. 4.* Patet etiam in Ellipsis vel ellipsi et circulo aut etiam in quibuslibet curvis quarum ordinatæ QN , TN , datam habent rationem, et quarum est diameter communis AB , aream MRB , esse ad aream correspondentem MPB , ut est EC , ad FC , seu ut RM ad PM ; sed ductis ex quocumque diametri puncto S , rectis SP , SR , est etiam triangulum SMR , ad triangulum SPM , ut MR ad MP , ob communem utriusque trianguli altitudinem MS ; ergo sector SRB , est ad sectorem SPB , in ratione datâ EC , ad FC .



252. *Theor.* Corpora duo P, p , circa virium centra C, c , revolvendo, orbitas PQB , pqb , describant; tempus periodicum in orbitâ PQB , est ad tempus periodicum in alterâ orbitâ

pqb , ut area PQB , ad aream pqb , directè et sectores PCQ , pcq , simul descripti inversè.—*Dem.* Ob æquabilem arearum circa centra C, c , descriptionem (Prop. I.) tempus periodicum T , in orbe PQB , est ad tempus t , quo describitur sector PCQ , ut area PQB , ad sectorem PCQ , et similiter tempus t , quo describitur sector pcq , est ad tempus periodicum t , in orbe pqb , ut sector pcq , ad aream pqb , hoc est $T : t = PQB : Parea : PCQ$, et $t : \ell = pcq : pqb$ area, unde per compositionem rationum et ex æquo $T : \ell = PQB : Parea \times pcq : pqb \times PCQ$. Q. e. d.

253. Si corpora duo Ellipses AEB , AFB , quarum est axis communis AB , describant, viribus ad centrum Ellipsium C tendentibus, tempora periodica erunt æqualia.—*Dem.* Sint arcus AR , AG , infinitesimi eodem tempore descripti, AQ tangens ad verticem A , QR ,



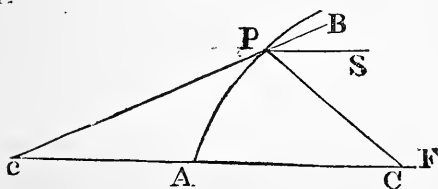
DG , axi AB , parallelæ, et quoniam vires centrales sunt ut QR , DG (Prop. VI.) et ob eorum distantiam a centro A , æquales sunt vires, seu eadem vis (Prop. X.) erit $QR = DG$, sectores verò ACG , ACR , sunt ut GM , RM , seu EC , FC , (251), et aræ Ellipsium AEB , AFB , sunt etiam ut EC , FC , (247, 248.) quare cum tempora periodica in illis Ellipsis sint ut aræ AEB , AFB directè et sectores ACG , ACR , inversè (252.) erunt eadem ut EC ad FC directè, et EC ad FC inversè, hoc est, ut $EC \times FC$ ad $FC \times EC$, ac proinde in ratione æqualitatis. Q. e. d.

254. His positis facillè demonstratur æqualia esse revolutionum in Ellipsis universis circum centrum idem factarum periodica tempora. Nam duæ quævis ellipses circa idem centrum descriptæ dicantur A , et B , describatur tertia Ellipsis C , similis Ellipsi A , et axem unum communem habens cum Ellipsi B , tempora periodica in Ellipsis similibus A et C , sunt æqualia (per Corol. 3. et 8. Prop. IV. Newt.) et tempora periodica in ellipsis C , et B , axem alterum communem habentibus sunt etiam æqua-

evadet æqualis. Hoc est theorema *Galilæi*. ^(e) Et si conī sectio parabolica (inclinazione plani ad conum sectum mutata) vertatur in hyperbolam, movebitur corpus in hujus perimetro vi centripetâ in centrifugam versâ. Et quemadmodum in circulo vel ellipsi si vires tendunt ad centrum figuræ in abscissâ positum, hæ vires augendo vel diminuendo ordinatas in ratione quâcunque datâ, vel etiam mutando angulum inclinationis ordinarum ad abscissam, semper augentur vel diminuuntur in ratione distantiarum a centro, si modo tempora periodica maneant æqualia; ^(f) sic etiam in figuris universis si ordinatæ augeantur vel diminuuntur in ratione quâcunque

lia (253.) tempora igitur periodica in Ellipsis quibusvis A et B sunt æqualia. Q. e. d.

^(e) 255. Et si conī sectio parabolica (inclinazione plani ad conum sectum mutata), vertatur in hyperbolam movebitur corpus in hujus perimetro



vi centripetâ in centrifugam versâ. Cum enim Ellipsis centrum C, a vertice A, in plagam F abit, vis centripetæ directio est per lineas P C, P F, a puncto P, ad centrum, et ubi infinita evadit distantia P C, atque P S, ad centrum ducta axi parallela fit, Ellipsi in parabolam mutatâ, directio est a puncto P, ad S, secundum lineam P S; mutatâ in Hyperbolam parabolâ, et centro ad alteram verticem A partem translato in c, vis centralis directio est, secundum lineam P B, a P ad B, hoc est, a centro c ad P, adeoque in centrifugam versa (228.).

256. Ex quibus sequitur hæc generalis lex; Si corpus revolvatur in sectione conicâ, et vis centralis tendat ad sectionis centrum, aut a centro, vis illa erit directè ut distantia a centro, et contrâ si vis fuerit ut distantia a centro, corpus movebitur in sectione conicâ. (245, 246.)

^(f) 257. In figuris universis, si ordinatæ augeantur vel diminuuntur in ratione datâ vel angulus ordinationis mutetur, manente tempore periodico, vires augentur vel minuuntur in ra-

tionem distantiarum a centro. Hujus veritas sequentium Lemmatum ope patebit.

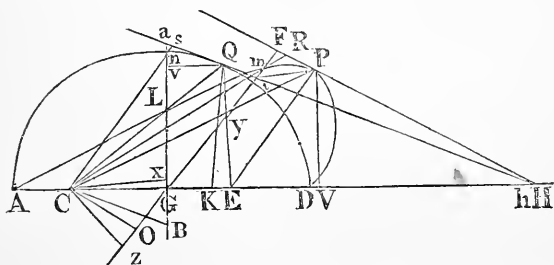
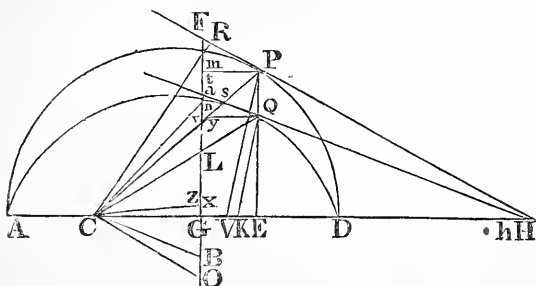
Lemma. In figurâ quâvis A Q D, cujus diametrum A D, ad hanc diametrum ordinatæ Q E, n G, augeantur vel minuuntur in ratione datâ Q E, ad P E, vel ad angulum quemvis datum P E D, inclinentur, novaque describatur curva A P D, per novarum ordinarum extrema transiens, sitque centrum virium C, in diametro positum utrique curvæ commune, rectæ P H, Q h, quæ curvas in punctis correspondentibus Q, P, tangunt, ad idem diametri punctum H convergunt.—*Dem.* Ductis rectis P t, Q v, diametro A D parallelis, erit Q v = G E = P t, et (per hypothesim) n v : m t = E Q : E P, unde et alternando n v : Q E = m t : E P, et cōiunctis punctis n et Q, m et P, erit propter similitudinem triangulorum n v Q et Q E h, m t P et P E H

$$n v : E Q = Q v (G E) : E h$$

$$m t : E P = P t (G E) : E H$$
Cum ergo sit n v : E Q = m t : E P, erit G E : E h = G E : E H, ideoque E H = E h, ac proinde tangentes ad idem diametri punctum H convergunt. Q. e. d.

258. *Lemma.* Iisdem manentibus sector evanescens, C Q n, est ad sectorem C P m, in alterâ curvâ correspondentem ut area A Q D, ad aream A P D.—*Dem.* ob parallelas G m et E P, G n, et E Q, est G y : C G = E P : C E et C G : G L = C E : E Q unde ex æquo G y : G L = E P : E Q = G m : G n (per const.) et hinc G m — G y : G n — G L = y m : L n = G m : G n = E P : Q E. Ex puncto C, demittantur in G m, et G n, perpendiculares C z, C x; et ex punctis P et Q, in diametrum A D, perpendiculares P V, Q K, et erit triangulum C y m : triang. C L n = y m × C z : L n × C x = G m × C z : G n × C x. Verum ob similia triangula C z G, et P V E, C x G et Q K E, est C z : C G = P V : P E, et C G : C x = Q E : Q K : atque adeo per compositionem rationum C z : C x = P V × Q E : Q K × P E = P V × G n : Q K × G m (per constr.) cum ergo sit triangulum C y m :

datâ, vel angulus ordinationis utcunque mutetur, manente tempore periodico; vires ad centrum quodcunque in abscissâ positum tendentes in singulis ordinatis augentur vel diminuuntur in ratione distantiarum a centro.



triang. $CLn = Gm \times Cz : Gn \times Cx$
 $= Gm \times PV \times Qn : Gn \times QK \times$
 $Gm = PV : QK$, et P vis ad QK ,
 ut parallelogrammum $GEPm$, ad pa-
 rallelogrammum $GEQn$, hoc est, (per Lem.
 IV.) et per construct. ut area APD , ad aream
 AQD ; ergò triangula Cym , CLn , sunt in
 ratione arearum APD , AQD ; at punctis
 m et P , n et Q cōiunctis, sector CPm ,
 æquatur triangulo Cym , et sector CQn trian-
 gulo CLn ; sunt igitur sectores illi evanes-
 centes ut areæ APD , AQD , directè. $Q. e. d.$

259. *Theor.* Iisdem manentibus, si tempora periodica in curvis APD , AQD fuerint æqualia, vires centripetæ in punctis correspondentibus P et Q erunt inter se ut distantie a centro C P , C Q .

Demonst. Figura A Q D rectis ex centro C ductis in sectores innumeros inter se æquales, ut C Q n, et figura A P d, in totidem sectores correspondentes, ac proinde etiam inter se æquales (258), ut C P m divisæ intelligantur; et ob eundem sectorum in utraq[ue] figurâ numerum, æquabilem illorum descriptionem (Prop. I.) et æqualia tempora periodica, sectores C P m, C Q n, æquali tempore describentur. Quare (per Prop VI). Vires centripetæ in punctis

P et Q, sunt inter se ut rectæ m R, s n punctis
m et P, n et Q coëuntibus; verum propter
Parallelas Q E, a et C et P E, F G, est, a G :
F G = Q E : P E, (257) et quia n G et m G in
eadem sunt ratione, iis ex a G et F G subductis
manent a n ad F m sicut Q E ad P E; ductis
autem ex C, Parallelis C B, C O ad tangentes
a H, F H, Triangula B C G et O G C sunt
similia triangulis a G H, F G H unde est

$BG : a = G : G = GC : GH$
 et $O G : FG = GC : GH$ ideo-
 que $BG : O G = G : FG = QE : PE =$
 $n G : m G$ et jungendo terminos primæ et sec-
 undæ rationis terminis ultimæ est $B n : O m$
 $= QE : PE = a : F m$. Denique quia ob
 CB, CO , Tangentibus a H , FH Parallelas,
 similia etiam sunt Triangula, $a n s$ et $n C B$,
 $F m R$ et $m CO$, est

B n : n a = C n : s n
et est F m : m O = R m : m C, et Composi-
tus Rationibus est B n × F m : n a × m O
= C n × R m : s n × m C, sed quia B n :
O m = a : F m, est B n × F m = a n ×
O m, ergo etiam C n × R m = s n × m C,
ideoque C n : C m = R m : s n; sive dis-
tantiæ a Centro in eâdem sunt ratione ac vires
Centrales.

et $L \times P v$ ad $G v P$ ut L ad $G v$; et ^(k) $G v P$ ad $Q v$ quad. ut $P C$ quad. ad $C D$ quad. et (per Corol. 2. Lem. VII.) $Q v$ quad. ad $Q x$ quad. punctis Q et P coëuntibus est ratio æqualitatis; et $Q x$ quad. seu $Q v$ quad. est ad $Q T$ quad. ut $E P$ quad. ad $P F$ quad. ^(l) id est, ut $C A$ quad. ad $P F$ quad. sive (per Lem. XII.) ut $C D$ quad. ad $C B$ quad. ^(m) Et conjunctis his omnibus rationibus, $L \times Q R$ fit ad $Q T$ quad. ut $A C \times L \times P C q \times C D q$, seu $2 C B q \times P C q \times C D q$ ad $P C \times G v \times C D q \times C B q$, sive ut $2 P C$ ad $G v$. Sed punctis Q et P coëuntibus æquantur $2 P C$ et $G v$. Ergo et his proportionalia $L \times Q R$ et $Q T$ quad. æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{S P q}{Q R}$, et fiet $L \times S P q$ æquale $\frac{S P q \times Q T q}{Q R}$. Ergo (per Corol. 1. et 5. Prop. VI.) vis centripeta reciprocè est ut $L \times S P q$, id est, reciprocè in ratione duplicata distantie $S P$. Q. e. i.

Idem aliter.

Cum vis ad centrum ellipseos tendens, quâ corpus P in ellipsi illâ revolvitur potest, sit (per Corol. 1. Prop. X.) ut $C P$ distantia corporis ab ellipseos centro C ; ducatur $C E$ parallela ellipseos tangenti $P R$; et vis, quâ corpus idem P circum aliud quodvis ellipseos punctum S revolvitur potest, si $C E$ et $P S$ concurrant in E , ⁽ⁿ⁾ erit ut $\frac{P E \text{ cub.}}{S P q}$ (per Corol. 3. Prop. VII.) hoc est, si punctum S sit umbilicus ellipseos, ideoque $P E$ detur, ut $S P q$ reciprocè. Q. e. i.

^(k) Per naturam Conicorum, facta partium Diametri sunt ad quadrata Ordinarum ut Diametri transversæ quadratum ad quadratum ejus conjugatæ. (Vide superius de Conicis Theor. II. de Ellipsi et de Hyperbolâ.)

^(l) Est $C A^2 : P F^2 = C D^2 : C B^2$; nam per Lem. XII. $P F \times C D = A C \times B C$, adeoque $P F^2 \times C D^2 = C A^2 \times B C^2$, ac proinde $C A^2 : P F^2 = C D^2 : C B^2$.

^(m) 262. Scriptis seorsim analogiis res clara sit.

$$L \times Q R : L \times P v = A C : P C$$

$$L \times P v : G v P = L : G v$$

$$G v P : Q v^2 = P C^2 : C D^2$$

$$Q v^2 : Q T^2 = C D^2 : C B^2.$$

Unde conjunctis his omnibus rationibus $L \times Q R : Q T^2 = A C \times L \times P C^2 \times C D^2 : P C \times G v \times C D^2 \times C B^2$, hoc est, ob $A C \times L = 2 B C^2$, $L \times Q R : Q T^2 = 2 P C : G v$, et ob $2 P C = G v$, $L \times Q R$

$$= Q T^2, \text{ et } L = \frac{Q T^2}{Q R}.$$

⁽ⁿ⁾ Nam (per Corol. 3. Prop. VII.) vis tendens ad centrum C , quam exponat recta $C P$, est ad vim tendentem ad aliud punctum S , quam exponat recta A , ut $C P \times S P^2$ ad cubum rectæ quæ a centro A ad Tangentem $R P Z$ duceretur parallela ad lineam $S P$ a secundo virium centro ad punctum P curvæ ductam, quæ quidem recta æqualis foret $P E$, quoniam ipsi esset Parallela et inter easdem Parallelas $D C$, $R P Z$, adeoque $C P \times S P^2 : P E^3 = C P : A = \frac{P E^3}{S P^2}$; hoc est, si punctum S sit umbilicus Ellipseos, adeoque $P E = A C$ (260) detur, erit vis ut $S P^2$ reciprocè; hic autem supponitur talem esse vim ad centrum C tendentem ut tempora periodica circa centra C , et S , æqualia sint, quod supponi potest.

Eâdem brevitate, quâ traduximus problema quintum ad parabolam, et hyperbolam, liceret idem hic facere: verum ob dignitatem problematis, et usum ejus in sequentibus non pigebit casus cæteros demonstratione confirmare.

PROPOSITIO XII. PROBLEMA VII.

Moveatur corpus in hyperbolâ: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum figuræ.

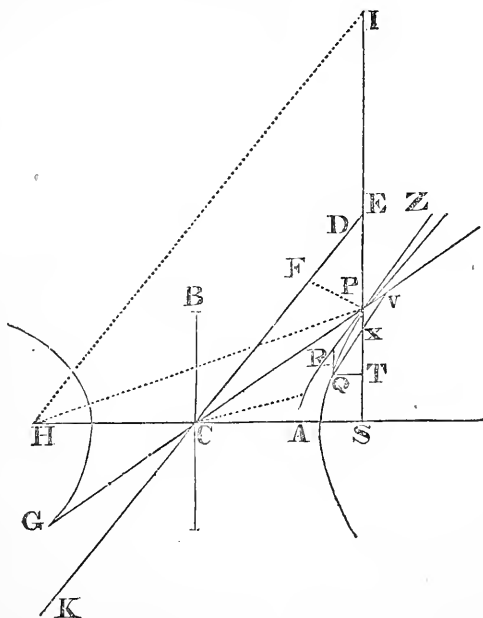
Sunto C A, C B semiaxes hyperbolæ; P G, K D, diametri aliæ conjugatæ; P F perpendiculum ad diametrum K D; et Q v ordinatim applicata ad diametrum G P. Agatur S P secans cum diametrum D K in E, tum ordinatim applicatam Q v in x, et compleatur parallelogrammum Q R P x. (°) Patet E P æqualem esse semiaxi transverso A C, eo quod, actâ ab altero hyperbolæ umbilico H lineâ H I, ipsi E C parallelâ, ob æquales C S, C H æquantur E S, E I; adeo ut E P semidifferentia sit ipsarum P S, P I, id est (ob parallelas I H, P R et angulos æquales I P R, H P Z) ipsarum P S, P H, quarum differentia axem totum 2 A C adæquat. Ad S P demittatur perpendicularis Q T. Et hyperbolæ latere recto principali (seu $\frac{2 B C q}{A C}$) dicto L, erit $L \times Q R$ ad $L \times P v$ ut $Q R$ ad $P v$, seu $P x$ ad $P v$, id est (ob similia triângula P x v, P E C) ut P E ad P C, seu A C ad P C. Erit etiam $L \times P v$ ad $G v \times P v$ ut L ad G v; et (ex naturâ conicorum) rectangulum G v P ad Q v quad. ut P C q ad C D q; et (per Corol. 2. Lem. VII.) Q v quad. ad Q x quad. punctis Q et P coëuntibus sit ratio æqualitatis; et Q x quad. seu Q v quad. est ad Q T q ut E P q ad P F q, id est, ut C A q ad P F q, sive (per Lem. XII.) ut C D q ad C B q; et conjunctis his omnibus rationibus $L \times Q R$ fit ad Q T q ut A C \times L \times P C q \times C D q, seu 2 C B q \times P C q \times C D q ad P C \times G v \times C D q \times C B q, sive ut 2 P C ad G v. Sed punctis P et Q coëuntibus æquantur 2 P C et G v. Ergo et his proportionalia $L \times Q R$ et Q T q (P) æquantur. Ducantur hæc

(°) 263. Est $SE = SP + PE$ et ob æquales E S, E I, est $PI = EI + PE = ES + PE = SP + 2 PE$, ac proinde $PI - SP = 2 PE$, ac P E est semidifferentia ipsarum P S, P I; sed angulus H P R = R P S, angulus enim interceptus inter lineas a focus ad punctum Hyperbolæ ductas bifariam dividitur per Tangentem (per Prop. 48. Lib. 3. Conic. Apoll. vide Theor. V. de Hyp.) et R P S =

E P Z (per 15. 1. Elem.) adeoque I P R = H P Z, et ob parallelas I H, P R, angulus P H I = H P R = I P Z = H I P, unde H P = P I, adeoque E P, est semidifferentia ipsarum P S P H, et quia differentia rectarum P S, P H, axem totum 2 A C, adæquat (per Prop. 51. Lib. 3. Conic. Apoll. Vide sup. Theor. IV. de Hyberb.) est E P = A C.

(P) 264. Notandum est quod hyperbola

æqualia in $\frac{S P q}{Q R}$, et fiet $L \times S P q$ æquale $\frac{S P q \times Q T q}{Q R}$. Ergo (per



Corol. 1. et 5. Prop. VI.) vis centripeta reciprocè est ut $L \times S P^q$, id est, reciprocè in ratione duplicatâ distantiae $S P$. Q. e. i.

Idem aliter.

Inveniatur vis, quæ tendit ab hyperbolæ centro C. Prohibet hæc distantia C P proportionalis. Inde vero (per Corol. 3. Prop. VII.) vis ad umbilicum S tendens erit ut $\frac{P E \text{ cub.}}{S P q}$, hoc est, ob datam P E reciprocè ut S P q. Q. e. i.

Eodem modo demonstratur, quod corpus (^q) hac vi centripetâ in centrifugam versâ movebitur in hyperbolâ oppositâ.

sicut in Ellipsi, (ut liquet ex demonstratione Prop. X. et XI.) latus rectum principale sive

$$L = \frac{Q \cdot T^2}{Q \cdot R}.$$

(^q) 265. Nam ex centro C, in tangentem **P R** productam ducta intelligatur recta ipsi **H P** parallela, et ea æqualis erit lineæ **P E**; Ete-

sicut in Ellipsi, (ut liquet ex demonstratione Prop. X. et XI.) latus rectum principale sive $L = \frac{Q \cdot T^2}{Q \cdot R}$.

^(q) 265. Nam ex centro C, in tangentem **P** R productam ducta intelligitur recta ipsi **H** P parallela, et ea æqualis erit lineæ **P** E; Etenim ob parallelas **P** R, **C** E, et **H** I, angulus quem linea ipsi **H** P, parallela efficit cum **C** E, æqualis erit angulo **P** H I = **H** I P = **C** E P; lineæ autem intrâ duas parallelas æqualiter inclinatæ sunt æquales. Est igitur, (per Corol. 3. Prop. VII.) vis centrifuga à Centro **C**, tendens quâ corpus **P**, hyperbolam **A** Q **P**,

LEMMA XIII.

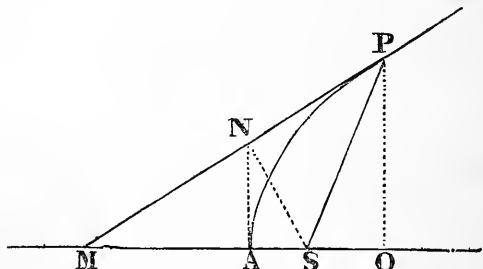
(^r) *Latus rectum parabolæ ad verticem quemvis pertinens est quadruplum distantie verticis illius ab umbilico figuræ.*

Patet ex conicis.

LEMMA XIV.

Perpendiculum, quod ab umbilico parabolæ ad tangentem ejus demittitur, medium est proportionale inter distantias umbilici a puncto contactus et a vertice principali figuræ.

Sit enim A P parabola, S umbilicus ejus, A vertex principalis, P punctum contactus, P O ordinatim applicata ad diametrum principalem, P M tangens diametro principali occurrens in M, et S N linea perpendicularis ab umbilico in tangentem. Jungatur A N et ob æquales M S et S P, M N et N P, M A et A O parallelæ erunt rectæ A N et O P; et inde triangulum S A N rectangulum erit ad A, et simile triangulis æqualibus S N M, S N P: ergo P S est ad S N ut S N ad S A. Q. d. e.



Corol. 1. P S q est ad S N q ut P S ad S A.

(^s) *Corol. 2.* Et ob datam S A est S N q ut P S.

Corol. 3. Et concursus tangentis cujusvis P M cum recta S N, quæ ab umbilico in ipsam perpendicularis est, incidit in rectam A N quæ parabolam tangit in vertice principali.

describit ad vim centrifugam a foco H tendentem quâ eandem hyperbolam percurrit ut $CP \propto HP^2$ ad PE^3 . Vim a centro C, tendentem quæ est ut C P, exponat recta C P, et alteram vim à foco H directam exponat recta A, et erit $CP \propto HP^2$; $PE^3 = CP : A = \frac{PE^3}{HP^2}$, hoc est, ob P E æqualem datæ A C, vis a foco H tendens est reciprocè ut HP^2 .

(^r) 266. *Dem.* Illius demonstrationem jam superius in Compendio de Conicis, Theor. IV. de Parabolâ dedimus.

(^s) Cum sit (per Coroll. 1.) $SA \times PS = SN^2 \times PS$, adeoque $SA \times PS = SN^2$; erit ob datam S A, SN^2 ut P S, id est, variationes quadrati SN^2 , in eâdem parabolâ erunt ut variationes rectæ S P sive ut distantie a foco.

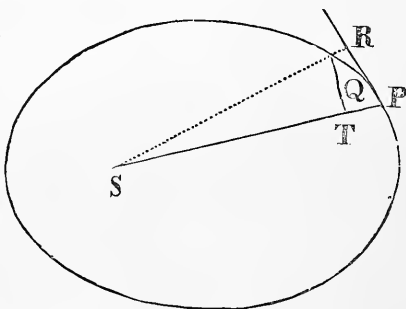
lineola P R in minimâ aliquâ temporis particulâ describi possit; et vis centripeta potis sit eodem tempore corpus idem movere per spatium Q R movebitur hoc corpus in conicâ aliquâ sectione; cujus latus rectum principale est quantitas illa $(y) \frac{Q T q}{Q R}$, quæ ultimo fit, ubi lineolæ P R, Q R in infinitum diminuuntur. Circulum in his Corollariis refero ad ellipsin; et casum excipio, ubi corpus rectâ descendit ad centrum.

PROPOSITIO XIV. THEOREMA VI.

Si corpora plura revolvantur circa centrum commune, et vis centripeta sit reciproce in duplicatâ ratione distantie locorum a centro; dico quod orbium latera recta principalia sunt in duplicatâ ratione arearum, quas corpora radiis ad centrum ductis eodem tempore describunt.

(z) Nam (per Corol. 2. Prop. XIII.) latus rectum L æquale est quantitati $\frac{Q T q}{Q R}$, quæ ultimo fit, ubi coeunt puncta P et Q. Sed linea minima Q R dato tempore est ut vis centripeta generans, hoc est (per hypothesin) reciproce ut S P q. Ergo $\frac{Q T q}{Q R}$ est ut Q T q \times S P q, hoc est, latus rectum L in duplicatâ ratione areæ Q T \times S P. Q. e. d.

Corol. (a) Hinc ellipseos area tota, eique proportionale rectangulum sub axibus est in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione lateris recti, et



(y) * Patet ex notâ 267.

(z) 269. Sint in Hypothesi propositionis xiv. duarum sectionum conicarum arcus quam minimi P Q, p q, simul descripti, L, l, earumdem latera recta, (et per Prop. VI. et Hyp.) $Q R : q r = S P^2 : S p^2$. Sed $(267.) \frac{Q T^2}{Q R} : \frac{q t^2}{q r} = L : l = \frac{Q T^2}{S p^2} : \frac{q t^2}{S P^2}$ $= Q T^2 \times S P^2 : q t^2 \times S p^2$. Sunt autem Q T \times S P, q t \times S p, ut sectores evanescentes

S Q P, S q p, ergò latera recta L, l, sunt in duplicatâ ratione arearum simul descriptarum. nam areæ quævis simul descriptæ sunt semper ut sectores S Q P, S q p, simul descripti, ob æquabilem circâ centrum virium S arearum descriptionem in utrâque sectione conicâ. Hinc in analogiis loco quadrati areæ dato tempore descriptæ substitui potest sectionis latus rectum et contrâ, dummodo id fiat in Hypothesi propositionis.

(a) 270. Hinc Ellipseos area tota eique proportionale rectangulum sub axibus (250.) est in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione lateris recti et ratione temporis periodici. Namque tempus periodicum (252.) est ut area tota directè et area tempore dato descripta inversè, adeoque area tota est ut area Q T \times S P quæ dato tempore describitur (hoc est, (269.) ut radix quadrata lateris recti) ducta in tempus periodicum.

ratione temporis periodici. Namque area tota est ut area $Q T \times S P$, quæ dato tempore describitur, ducta in tempus periodicum.

PROPOSITIO XV. THEOREMA VII.

Isdem positis, dico quod tempora periodica in ellipsis sunt in ratione sesquiplicatâ majorum axium.

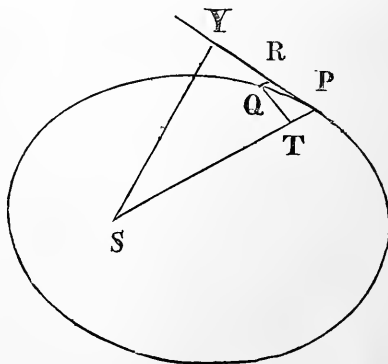
(b) Namque axis minor est medius proportionalis inter axem majorem et latus rectum, atque ideo rectangulum sub axibus est in ratione composita ex subduplicatâ ratione lateris recti et sesquiplicatâ ratione axis majoris. Sed hoc rectangulum (per Corol. Prop. XIV.) est in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione lateris recti et ratione periodici temporis. Dematur utrobique subduplicata ratio lateris recti, et manebit sesquiplicata ratio majoris axis eadem cum ratione periodici temporis. Q. e. d.

(c) Corol. Sunt igitur tempora periodica in ellipsis eadem ac in circulis, quorum diametri æquantur majoribus axibus ellipseon.

PROPOSITIO XVI. THEOREMA VIII.

Isdem positis, et actis ad corpora lineis rectis, quæ ibidem tangant orbitas, demissisque ab umbilico communi ad has tangentes perpendicularibus: dico quod velocitates corporum sunt in ratione compositâ ex ratione perpendicularium inversè, et subduplicatâ ratione laterum rectorum principalium directè.

Ab umbilico S ad tangentem $P R$ demitte perpendicularum $S Y$, et velocitas corporis P erit reciproce in subduplicatâ ratione quantitatis $\frac{S Y q}{L}$. Nam velocitas illa est ut arcus quam minimus $P Q$ in datâ temporis particulâ descriptus, hoc est (per Lem. VII.) ut tangens ^(d) $P R$, id est, ob proportionales $P R$ ad $Q T$ et $S P$ ad $S Y$, ut $\frac{S P \times Q T}{S Y}$,



(b) 271. Sit Ellipsis axis major A , minor B , Latus rectum L , tempus periodicum T ; et quoniam $A : B = B : L$, erit $B^2 = A \times L$, $B = A^{\frac{1}{2}} \times L^{\frac{1}{2}}$, $A \times B = A^{\frac{3}{2}} \times L^{\frac{1}{2}}$, sed rectangulum $A \times B$, (270.) est ut $T \times L^{\frac{3}{2}}$, ergo $A^{\frac{3}{2}} \times L^{\frac{1}{2}}$ est ut $T \times L^{\frac{3}{2}}$, et dividendo utrumque terminum per $L^{\frac{1}{2}}$ erit $A^{\frac{3}{2}}$ ut T .

(c) 272. Circulus est species ellipsis cujus foci cum centro coincidunt et Latus rectum cum diametro; sed tempora periodica in Ellipsis quæ axem majorem æqualem habent sunt æqualia (271.) ergo in Ellipsi et circulo cujus diameter seu axis æquatur axi majori ellipsis, tempora periodica æquantur.

(d) • Velocitas est ut tangens $P R$, sed ob an-

sive ut $S Y$ reciprochè et $S P \times Q T$ directè; estque $S P \times Q T$ ut area dato tempore descripta, id est (per Prop. XIV.) in subduplicatâ ratione lateris recti. Q. e. d.

Corol. 1. ^(e) Latera recta principalia sunt in ratione compositâ ex duplicatâ ratione perpendicularorum, et duplicatâ ratione velocitatum.

Corol. 2. Velocitates corporum, in ^(f) maximis et minimis ab umbilico communi distantiiis, sunt in ratione compositâ ex ratione distantiarum inversè, et subduplicatâ ratione laterum rectorum principalium directè. Nam perpendiculara jam sunt ipsæ distantiae.

Corol. 3. ^(g) Ideoque velocitas in conicâ sectione, in maximâ vel minimâ ab umbilico distantia, est ad velocitatem in circulo in eadem a centro distantia in subduplicatâ ratione lateris recti principalis ad duplam illam distantiam.

Corol. 4. ^(h) Corporum in ellipsis gyrantium velocitates in mediocribus distantiiis ab umbilico communi sunt eadem, quæ corporum gyrantium in circulis ad easdem distantias; hoc est (per Corol. 6. Prop. IV.) reciprochè in subduplicatâ ratione distantiarum. Nam perpendiculara jam sunt semiaxes minores, et hi sunt ut mediæ proportionales inter distantias et latera recta. Componatur hæc ratio inversè cum subduplicatâ ratione laterum rectorum directè, et fiet ratio subduplicata distantiarum inversè.

Corol. 5. In eadem figurâ, vel etiam in figuris diversis, quarum latera recta principalia sunt æqualia, velocitas corporis est reciprochè ut perpendicularum demissum ab umbilico ad tangentem.

Corol. 6. ⁽ⁱ⁾ In parabolâ velocitas est reciprochè in subduplicatâ rati-

gulos ad T et Y rectos et angulos Q P T, Y P S, punctis P, Q, coeuntibus æquales, triangulum evanescens Q P T, simile erit triangulo P S Y, adeoque Q P (P R) : Q T = S P : S Y, et P R = $\frac{S P \times Q T}{S Y}$.

^(e) * Velocitatis quadratum c^2 , est directè ut $\frac{L}{S Y^2}$ (Prop. XVI.). ergò L est ut $c^2 \times S Y^2$.

^(f) * Maximæ et minimæ distantiae sunt axis partes ab umbilico ad vertices principales contentae, adeoque cum illic axis sit perpendicularis tangenti, ipsa perpendiculara ad tangentem in maximis et minimis distantiiis sunt ipsæ distantiae; mediocres distantiae sunt distantiae ab umbilico ad vertices axis minoris Ellipseos, adeoque semiaxi majori æquantur.

^(g) * Nam circulus ille (272.) est ellipsis cujus latus rectum est ipsa diameter, ideoque est ipsa dupla distantia ab umbilico seu centro, quare cum eadem ponatur distantia tam in conicâ sectione quàm in circulo, velocitates sunt in sub-

duplicatâ ratione laterum rectorum, hoc est in subduplicatâ ratione lateris recti sectionis conicæ, ad duplam illam distantiam quæ est latus rectum circuli.

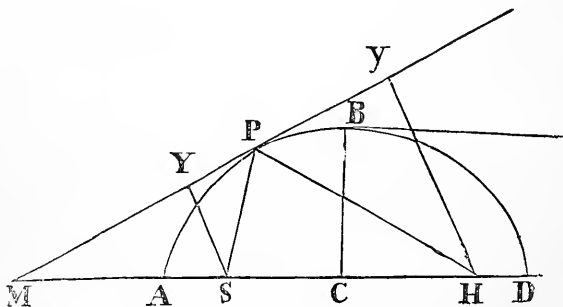
^(h) * Sit A corporis in Ellipsi gyrantis mediocris distantia ab umbilico, sit etiam circuli radius A; semiaxis minor, seu perpendicularis demissa ex umbilico in tangentem axi majori parallelam sit B, latus rectum L, et circuli latus rectum (272.) erit 2 A, velocitas in Ellipsi sit C, in circulo c, et erit (per Prop.

XVI.) $C^2 : c^2 = \frac{L}{B^2} : \frac{2A}{A^2} = L \times A : 2 B^2$; sed ex Conicis distantia a foco ad extremitatem semiaxis minoris (quæ est mediocris distantia) est æqualis semiaxi majori, est ergo distantia A semiaxis major, ideoque cum ex conicis sit $A : B = 2 B : L$, est $2 B^2 = A \times L$, ergò $C^2 = c^2$, et $C = c$.

⁽ⁱ⁾ In Parabolâ velocitas est reciprochè in subduplicatâ ratione distantiae corporis ab umbilico figuræ; cum enim velocitas sit reciprochè ut per-

one distantiae corporis ab umbilico figurae; in ellipsi magis variatur, in hyperbolâ minus quam in hac ratione. Nam (per Corol. 2. Lem. XIV.) perpendiculum demissum ab umbilico ad tangentem parabolæ est in subduplicatâ ratione distantiae. In hyperbolâ perpendiculum minus variatur, in ellipsi magis.

Corol. 7. (*) In parabolâ velocitas corporis ad quamvis ab umbilico distantiam est ad velocitatem corporis revolvantis in circulo ad eandem a



pendiculum demissum ab umbilico ad Tangentem, per præced. Coroll. et (per Cor. 2. Lem. XIV.) quadratum ejus perpendiculi sit semper in Parabolâ ut distantia a foco, erit velocitas reciproce ut radix quadrata illius distantiae a foco, sive in subduplicatâ ratione distantiae, &c.

276. Lemma. Sit Ellipsis A P B, cujus axis major A D, foci S et H, semiaxis minor B C; M y tangens in P, S Y et H y in tangentem perpendiculares; ob angulos Y P S. H P y, aequales (Prop. 48. Lib. 5. Conic. Apoll. sup. Theor. IV. de Ellip.) similia sunt triangula S P Y, H P y, undè S P : S Y = H P : H y = S Y × H P

$\frac{S P}{S Y} = \frac{H P}{H y}$, ac proindè S Y × H y = $\frac{S Y^2 \times H P}{S P}$ = B C² (ex conicis. Vid. sup.

n. 236.) sed H P + S P = A D (Prop. 52. Lib. 5. Conic. Apoll. sup. Theor. III. de Ellipsi)

unde est H P = A D - S P ergò $\frac{S Y^2 \times A D - S P}{S P}$

= B C²; et S Y² = $\frac{B C^2 \times S P}{A D - S P}$. Ergò

in Ellipsi, S Y variatur in ratione $\frac{B C^2 \times S P}{A D - S P}$

sive ob quantitatem B C², constantem in ratione $\frac{A D - S P}{S P}$.

Crescat distantia S P, minor fiet A D - S P, si non mutaretur denominator fractionis

$\frac{S P}{A D - S P} = S Y^2$, cresceret S Y² sicut

S P, cum autem minuatür denominator S P crescente, eo ipso major fit valor fractionis $\frac{S P}{A D - S P}$ ergo crescente S P, S Y² magis

crescit quam in solâ ratione S P, ergo perpendiculum in ellipsi magis variatur quam in subduplicatâ ratione distantiae S P.

In Hyperbolâ verò, quoniam H P - S P = A D (Prop. 51. Lib. 3. Conic. Apoll. Theor. III. de Hyp.) et H P = A D + S P,

eodem modo reperitur S Y² = $\frac{B C^2 \times S P}{A D + S P}$,

et crescente S P, crescit etiam A D + S P, si idem maneret denominator cresceret S Y² si-

cut S P, denominatore aucto, fractio $\frac{S P}{A D + S P}$

fit minor quam eo manente, sed ea exprimit valorem quadrati perpendiculi S Y, ergo S Y² minus crescit quàm S P sive perpendiculum in Hyperbolâ minus variatur quam in subduplicatâ ratione distantiae S P.

(*) 277. Sit latus rectum parabolæ L, adeoque distantia foci a vertice $\frac{1}{2}$ L, et ex umbilico tanquam centro ac radio $\frac{1}{2}$ L, describatur circulus, ejus latus rectum seu diameter erit $\frac{1}{2}$ L: unde velocitas corporis in vertice parabolæ erit ad velocitatem corporis in illo circulo revolvantis ut \sqrt{L} ad $\sqrt{\frac{1}{2} L}$, hoc est, ut $\sqrt{2}$ ad 1. (Corol. 2. hujusce Prop.) sed per Corol. 6. velocitas in vertice parabolæ est ad velocitatem in aliâ quâvis ab umbilico distantia S P, ut $\sqrt{S P}$ ad $\sqrt{\frac{1}{2} L}$, et (per Corol. 6. Prop. IV.) velocitas in circulo cujus radius $\frac{1}{2}$ L, est etiam ad

centro distantiam in subduplicatâ ratione numeri binarii ad unitatem ; (¹) in ellipsi minor est, in hyperbolâ major quàm in hac ratione. Nam per hujus corollarium secundum velocitas in vertice parabolæ est in hac ratione, et per corollaria sexta hujus et propositionis quartæ servatur eadem proportio in omnibus distantiiis. Hinc etiam in parabolâ velocitas ubique æqualis est velocitati corporis revolvantis in circulo ad dimidiam distantiam, in ellipsi minor est, in hyperbolâ major.

Corol. 8. Velocitas gyrantis in sectione quâvis conicâ est ad velocitatem gyrantis in circulo in distantîâ dimidii lateris recti principalis sectionis, ut distantia illa ad perpendicularum ab umbilico in tangentem sectionis demissum. (^m) Patet per corollarium quintum.

Corol. 9. (ⁿ) Unde cum (per Corol. 6. Prop. IV.) velocitas gyran-

velocitatem in alio circulo cujus radius S P, ut $\sqrt{S P}$, ad $\sqrt{\frac{1}{2} L}$; quare velocitas in vertice parabolæ est ad velocitatem in eadem parabolâ ad distantiam S P, ut velocitas in circulo cujus radius $\frac{1}{2} L$, ad velocitatem in circulo cujus radius est S P, ac proinde alternando velocitas in vertice parabolæ est ad velocitatem in circulo radio $\frac{1}{2} L$ descripto, hoc est, $\sqrt{2}$ ad 1, ut velocitas in parabolâ in distantîâ S P, ad velocitatem in circulo ad eandem a centro seu umbilico distantiam descripto.

278. Hinc etiam in parabolâ velocitas ubique æqualis est velocitati corporis revolvantis in circulo ad dimidiam distantiam; nam velocitas in circulo cujus radius $\frac{1}{2} S P$ est ad velocitatem in circulo cujus radius S P, ut $\sqrt{2}$ ad 1, (per Corol. 6. Prop. IV.) sed velocitas in parabolâ ad distantiam S P, est ad velocitatem in circulo cujus radius S P, etiam ut $\sqrt{2}$ ad 1, velocitas igitur in parabolâ ad distantiam S P, æquatur velocitati in circulo cujus radius $\frac{1}{2} S P$.

(^l) 279. In Ellipsi velocitas corporis ad quamvis ab umbilico distantiam est ad velocitatem corporis revolvantis in circulo ad eandem a centro distantiam in minore ratione quam $\sqrt{2}$ ad 1; in Hyperbolâ in ratione majore. Sit enim Ellipsis vel hyperbolâ latus rectum L, distantia ab umbilico S P, perpendicularum ad tangentem sectionis in puncto P demissum S Y; S P, sit radius circuli, c sit velocitas in Ellipsi vel hyperbolâ ad distantiam S P; C, velocitas in circulo, et erit (per Prop. XVI.) $c^2 : C^2 =$

$$\frac{L}{S Y^2} : \frac{2 S P}{S P^2} = L \times S P : 2 S Y^2; \text{ sed (276) } \\ 2 S Y^2 = \frac{2 B C^2 \times S P}{A D \mp S P}, \text{ ergo } c^2 : C^2 = L \\ \times S P : \frac{2 B C^2 \times S P}{A D \mp S P} = L \times \frac{A D \mp S P}{A D \mp S P} : \\ 2 B C^2; \text{ et ob } L \times A D = 4 B C^2 \text{ seu } 2 B C^2 \\ = \frac{L \times A D}{2}, \text{ est } c^2 : C^2 = 2 A D \mp$$

$$2 S P : A D; \text{ undè in Ellipsi in quâ } 2 S P$$

Vol. I.

habet signum —, ratio c^2 ad C^2 , minor est quam ratio 2, ad 1, et ratio c ad C, minor quam ratio $\sqrt{2}$, ad 1; in hyperbolâ major ob $\mp 2 S P$ (276.)

280. *Corol.* Quoniam distantia, ab altero sectionis foco H P = A D \mp S P, erit c^2 . $C^2 = 2 H P : A D = H P : \frac{1}{2} A D$, hoc est, velocitas in Ellipsi et hyperbolâ ad quamvis ab umbilico seu centro virum distantiam S P est ad velocitatem in circulo ad eandem distantiam in ratione subduplicatâ distantîæ H P ab altero umbilico ad semiaxem majorem.

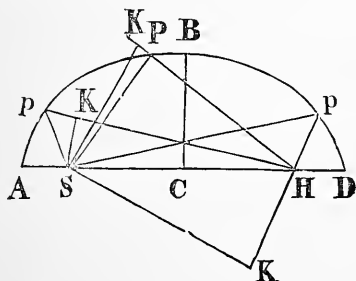
(^m) * Nam iste circulus et sectio Conica idem latus rectum habent, quia in circulo distantia a Centro semi-diametro æquatur et tota diameter est latus Rectum, ideo velocitates sunt reciproce ut perpendiculara in Tangentem demissa (per Cor. 5 hujusce) sed in circulo semidiameter perpendicularo æquatur, ergo velocitates in sectione et in circulo sunt ut semi-diameter circuli ad Perpendicularum, &c.

(ⁿ) 281. Sit C velocitas corporis gyrantis in circulo ad distantiam dimidii lateris recti $\frac{1}{2} L$, c velocitas in sectione conicâ ad distantiam S P, K velocitas in circulo ad eandem distantiam S P, et erit (per Corol. 8.) $c^2 : C^2 = \frac{1}{2} L^2 : S Y^2$ (et per Cor. 6. Prop. IV.) $C^2 : K^2 = S P : \frac{1}{2} L$, undè, ex æquo, $c^2 : K^2 = S P \times \frac{1}{2} L^2 : S Y^2 \times \frac{1}{2} L = S P \times \frac{1}{2} L : S Y^2$ Fiat S P : m = m : $\frac{1}{2} L$, et erit $m^2 = S P \times \frac{1}{2} L$, ac proinde $c^2 : K^2 = m^2 : S Y^2$ et c : K = m : S Y.

282. Sit C, centrum Ellipsis, C B semiaxis minor, foci S et H, tendatque vis centripeta ad focum S; velocitas in P erit ad velocitatem in B, in subduplicatâ ratione distantîæ H P a foco H, ad distantiam S P ab altero foco seu centro virum S; Nam velocitas in P dicatur C, velocitas in B dicatur c, et erit (per Cor. 5. Prop. XVI.) C : c = C B : S Y, adeoque $C^2 : c^2 = C B^2 : S Y^2$, hoc est, ob $C B^2 = S Y \times H y$ (235.) $C^2 : c^2 = S Y \times H y : S Y^2 = H y : S Y$; sed ob similia

gatus B C, ^(b) et erit $SPq - 2KPH + PHq = SHq = 4CHq = 4BHq - 4BCq = \overline{SP + PH}$: quad. — $L \times \overline{SP + PH}$ ^(c) = $SPq + 2SPH + PHq - L \times \overline{SP + PH}$. Addantur utrobique $2KPH - SPq - PHq + L \times \overline{SP + PH}$, et fiet $L \times \overline{SP + PH} = 2SPH + 2KPH$, seu $SP + PH$ ad PH ut $2SP + 2KP$ ad L . Unde datur PH tam longitudine quam positione. Nimirum si ea sit corporis in P velocitas, ut latus rectum L minus fuerit quam $2SP + 2KP$, jacebit PH ad eandem partem tangentis PR cum linea PS ; ideoque figura erit ellipsis, et ex datis umbilicis S, H , et axe principali $SP + PH$, dabitur. Sin tanta sit corporis velocitas ut latus rectum

^(b) Erit $SP^2 - 2KP \times PH + PH^2 = SH^2$, Etenim (per 12. et 13. 2. Elem.) in omni triangulo SPH , quadratum lateris SH

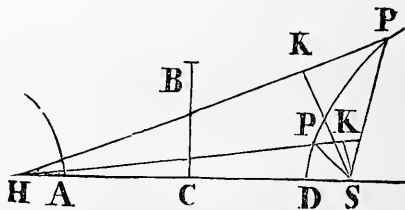


quod consideratur ut hypothenusa anguli P , æquatur quadratis aliorum laterum SP, PH dempto duplo rectanguli lateris PH in quod cadit perpendicularum, ducti in partem PK ab angulo P ad perpendicularum usque interceptam, quæ quidem PK sumitur cum signo $+$ si sit ab eadem parte tangentis ac S et cum signo $-$ si sit in parte oppositâ.

^(c) 287. $SH^2 = 4CH^2 = 4BH^2 - 4BC^2$, &c. Ex naturâ ellipseos est $2BH$ æqualis axi majori $2AC$ ideoque æqualis $SP + PH$ et $4BH^2 = \overline{SP + PH}^2$, pariter est $2AC : 2BC = 2BC : L$ est ergo $4BC^2 = L \times 2AC$ sive $L \times \overline{SP + PH}$ unde est $4BH^2 - 4BC^2 = \overline{SP + PH}^2 - L \times \overline{SP + PH}$.

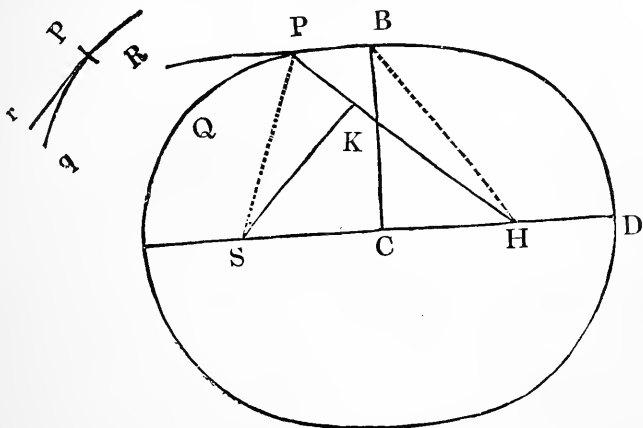
Collatis itaque valoribus ejusdem quantitatis SH^2 , est $SP^2 - 2KP \times PH + PH^2 = \overline{SP + PH}^2 - L \times \overline{SP + PH}$, utrinque detractis æqualibus manet $-2KP \times PH = 2SP \times PH - L \times \overline{SP + PH}$ transpositisque partibus negativis est $L \times \overline{SP + PH} = 2SP \times PH + 2KP \times PH$ sive $2\overline{SP + KP} \times PH$

unde est $2SP + 2KP : L = SP + PH : PH$ et dividendo $2SP + 2KP - L : L = SP : PH$ unde quo magis accedit valor lateris recti L ad quantitatem $2SP + 2KP$, eo major est PH respectu SP , si $L = 2SP + 2KP$, infinitum est SP respectu PH , hoc est, ellipsis abit in parabolam, si L sit majus quam $2SP + 2KP$, primus terminus proportionis fit negativus, ideoque PH in partem oppositam tangentis cadet et sectio fiet hyperbola; manentibus autem cæteris crescit latus rectum cum velocitate in puncto P datâ: Unde quo major fit velocitas respectu vis centripetæ eo magis elongatur ellipsis quam describit corpus propositum vel etiam in parabolâ movetur, et tandem in hyperbolâ.



288. Demonstratio pro hyperbolâ ita instituitur: Quia PK non est in eadem parte tangentis ac S , sumitur PK cum signo $-$ ideoque est $SH^2 = SP^2 + 2KP \times PH + PH^2$, et per naturam hyperbolæ $SH^2 = 4CH^2 = 4CA^2 + 4CB^2$ sive quia $2CA = PH - SP$ et $4CB^2 = L \times 2CA$ est $SH^2 = PH^2 - 2SP \times PH + SP^2 + L \times PH - SP$ unde collatis valoribus SH^2 et detractis quantitatibus communibus est $2KP \times PH = -2SP \times PH + L \times PH - SP$ et transpositis quantitatibus negativis est $2KP \times PH + 2SP \times PH = L \times PH - SP$ unde est $2SP + 2KP : L = PH - SP : PH$, et convertendo $L - 2SP - 2KP : L = SP : PH$.

L æquale fuerit $2 SP + 2 KP$, longitudo PH infinita erit; et propterea figura erit parabola axem habens SH parallelum lineæ PK , et inde dabitur. Quod si corpus majori adhuc cum velocitate de loco suo



P exeat, capienda erit longitudo PH ad alteram partem tangentis; ideoque tangente inter umbilicos pergente, figura erit hyperbola axem habens principalem æqualem differentiæ linearum SP et PH , et inde dabitur. Nam si corpus in his casibus revolvatur in conicâ sectione sic inventâ, demonstratum est in Prop. XI, XII, et XIII, quod vis centripeta erit ut quadratum distantiae corporis a centro virium S reciprocè; ideoque linea PQ rectè exhibetur, quam corpus tali vi describet, de loco dato P , cum datâ velocitate, secundum rectam positione datam PR egrediens. Q. e. f.

Corol. 1. Hinc in omni conicâ sectione ex dato vertice principali D , latere recto L , et umbilico S , datur umbilicus alter H capiendo DH ad DS ut est latus rectum ad differentiam inter latus rectum et $4 DS$.^(d) Nam proportio $SP + PH$ ad PH ut $2SP + 2KP$ ad L in casu hujus corollarii, fit $DS + DH$ ad DH ut $4 DS$ ad L , et divisim DS ad DH ut $4 DS - L$ ad L .

Corol. 2. Unde si datur corporis velocitas in vertice principali D , invenietur orbita expeditè, capiendo scilicet latus rectum ejus ad duplam distantiam DS , in duplicatâ ratione velocitatis hujus datæ ad velocitatem corporis in circulo ad distantiam DS gyrantis (per Corol. 3. Prop. XVI.);

^(d) 289. In casu hujus corollarii punctum P omni sectione conicâ est DH , ad DS , ut latus cadit in D , punctum K cadit in S , fitque PK rectum ad differentiam inter latus rectum et $= DS = SP$, et $PH = DH$. Quare in $4 DS$.

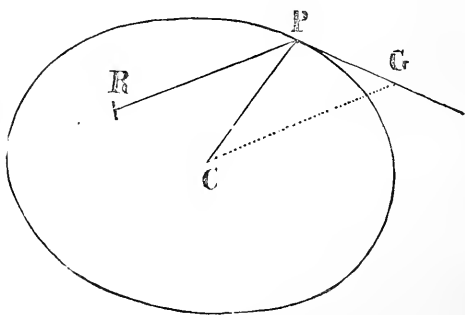
dein D H ad D S ut latus rectum ad differentiam inter latus rectum et 4 D S.

Corol. 3. Hinc etiam si corpus moveatur in sectione quâcunque conicâ, et ex orbe suo impulsu quocunque exturbetur; cognosci potest orbis, in quo postea cursum suum peraget. Nam componendo proprium corporis motum cum motu illo, quem impulsus solus generaret, habebitur motus quocum corpus de dato impulsus loco, secundum rectam positione datam, exibat.

Corol. 4. Et si corpus illud vi aliquâ extrinsecus impressâ continuo perturbetur, innoscet cursus quam proximè, colligendo mutationes quas vis illa in punctis quibusdam inducit, et ex seriei analogiâ mutationes continuas in locis intermediis æstimando.

Scholium.

Si corpus P vi centripetâ ad punctum quodcunque datum R tendente moveatur in perimetro datæ cujuscunque sectionis conicæ, cujus centrum sit C; et requiratur lex vis centripetæ: ducatur C G radio R P parallela, et orbis tangenti P G occurrens in G; et (^e) vis illa (per Corol. 1. et Schol.



Prop. X. et Corol. 3. Prop. VII.) erit ut $\frac{C G \text{ cub.}}{R P \text{ quad.}}$

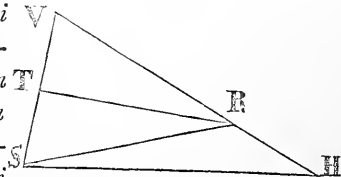
(^e) 290. Vis ad centrum vel a centro C, per lineam A, et (per Corol. 3. Prop. VII.) tendens est ut C P, (per Corol. 1. Prop. X. erit $C P \times R P^2 : C G^3 = C P : A =$ et Not. 232.) adeoque exponatur per lineam $\frac{C G^3}{R P^2}$ C P; vis ad punctum R, tendens exponatur

SECTIO IV.

De inventione orbium ellipticorum, parabolicorum et hyperbolicorum ex umbilico dato.

LEMMA XV.

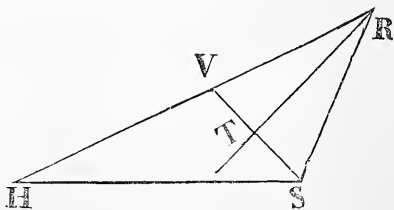
Si ab ellipseos vel hyperbolæ cujusvis umbilicis duobus S, H, ad punctum quodvis tertium V inflectantur rectæ duæ S V, H V, quarum una H V æqualis sit axi principali figuræ, id est, axi V in quo umbilici jacent, altera S V a perpendiculari T R in se demisso bisecetur in T; perpendicularum illud T R sectionem conicam alicubi tanget: et contra, si tangit, erit H V æqualis axi principali figuræ.



Secet enim perpendicularum T R rectam H V productam, si opus fuerit, in R; et jungatur S R. Ob æquales T S, T V, æquales erunt et rectæ S R, V R et anguli T R S, T R V. (f) Unde punctum R erit ad sectionem conicam, et perpendicularum T R tanget eandem et contra. Q. e. d.

(f) * Si fuerint S, et H, Ellipseos umbilici, erit $SR + RH = HV =$ axi majori, ac proinde R punctum perimetri Ellipsis quam T R tangit in R, ob angulos T R S, T R V, æquales (per Prop. 52. et 46. Lib. 5. Conic. Apollon. Theor. III. et IV. de El.) et contra si T R tangat Ellipsim in R, et ducatur S V, ad T R perpendicularis, erit ob angulos T R S, T R V, æquales $VR = SR$, et $VH = SR + RH =$ axi majori.

* Si fuerint S, et H, Hyperbolæ umbilici ob æquales T S, T V, erit $SR = VR$, et $HR - SR = HV$ æqualis axi majori, et R punctum Hyperbolæ quam tangit in R recta T R ob angulos V R T, T R S, æquales (per Prop. 51. et 46. Lib. 5. Conic. Apoll. Theor. III. et IV. de Hyperb.) et contra si T R tangat Hyperbolam in R, et agatur S V ad T R perpendicularis erit $VR = SR$, et $HV = HR - SR$, æqualis axi majori, ut patet.

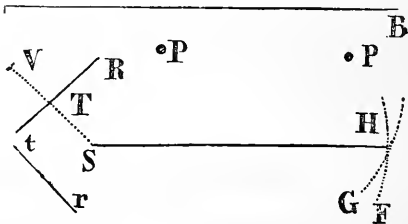


PROPOSITIO XVIII. PROBLEMA X.

Datis umbilico et axibus principalibus describere trajectoryas ellipticas et hyperbolicas, quæ transibunt per puncta data, et rectas positione datas contingent.

Sit S communis umbilicus figurarum; A B longitudo axis principalis trajectoryæ cujusvis; P punctum per quod trajectorya debet transire; et T R recta quam debet tangere.

Centro P intervallo A B—S P, si orbita sit ellipsis, vel A B + S P, si ea sit hyperbola, describatur circulus H G. Ad tangentem T R demittatur perpendiculum S T, et producatur idem ad V, ut sit T V æqualis



S T; centroque V et intervallo A B describatur circulus F H. Hæc methodo sive dentur duo puncta P, p, sive duæ tangentes T R, t r, sive punctum P et tangens T R, describendi sunt circuli duo. Sit H eorum intersectio communis, et umbilicis S, H, axe illo dato describatur trajectorya. Dico factum. Nam trajectorya descripta (eo quod P H + S P in ellipsi, et P H — S P in hyperbola æquatur axi) transibit per punctum P, et (per Lemma superius) tanget rectam T R. Et eodem argumento vel transibit eadem per puncta duo P, p, vel tanget rectas duas. T R, t r. (s) Q. e. f.

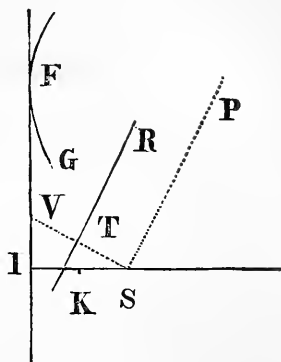
PROPOSITIO XIX. PROBLEMA XI.

Circa datum umbilicum trajectoryam parabolicam describere, quæ transibit per puncta data, et rectas positione datas contingent.

Sit S umbilicus, P punctum et T R tangens trajectoryæ describendæ. Centro P intervallo P S describe circulum F G. Ab umbilico ad tangentem demitte perpendicularem S T, et produc eam ad V, ut sit T V æqualis S T. Eodem modò describendus est alter circulus f g, si datur alterum punctum p; vel inveniendum alterum punctum v, si datur altera tangens

• (s) Si orbita sit Hyperbola, focus H, erit in rectâ H S, ultra S, productâ.

$t r$; dein ducenda recta $I F$ quæ tangat duos circulos $F G$, $f g$ si dantur duo puncta P , p , vel transeat per duo puncta V , v , si dantur quæ tangentes $T R$, $t r$, vel tangat circulum $F G$ et transeat per punctum V , si datur punctum P et tangens $T R$. Ad $F I$ demitte perpendicularem $S I$, eamque biseca in K ; et axe $S K$, vertice principali K describatur parabola. Dico factum. ^(h) Nam parabola, ob æquales $S K$ et $I K$, $S P$ et $F P$, transibit per punctum P ; et (per Lem. XIV. Corol. 3.) ob æquales $S T$ et $T V$ et angulum rectum $S T R$, tanget rectam $T R$. Q. e. f.



PROPOSITIO XX. PROBLEMA XII.

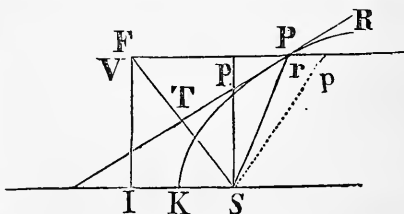
Circa datum umbilicum trajectoriam quamvis specie ⁽¹⁾ datam describere, quæ per data puncta transibit et rectas tanget positione datas.

Cas. 1. Dato umbilico S , describenda sit trajectoria $A B C$ per puncta duo B , C . Quoniam trajectoria datur specie, dabitur ratio axis principalis

^(h) 291. Nam Parabola ob æquales $S K$ et $I K$, $S P$ et $F P$, transibit per punctum P scilicet Parabola descripta ob æquales $S K$ et $I K$ habet pro directrice lineam $I F$ (per Theor. II. de Parab. n. 224. de Conicis), cum verò distantia puncti cujusvis Parabolæ a Directrice sit æqualis distantia ejus puncti a foco, vice versâ, punctum quod æqualiter a foco et a Directrice distabit, pertinebit ad Parabolam. Finge enim lineam $F P$ Directrici perpendicularem occurrere quidem Parabolæ in puncto P , ita ut sit $F P = S P$, sed in eâ posse sumi aliud punctum p ita ut sit etiam $S p = F p = F P \pm P p$, erit ob $F P = S P$, $S p = S P \pm P p$ sed cum $S P p$ sit Triangulum, absurdum est (per 20. 1. Elem.) esse $S p = S P \pm P p$ ergo absurdum est fingere aliud Punctum præter id quod ad Parabolam pertinet tale ut ejus distantia a directrice sit æqualis ejus distantia a foco, ergo ob æquales $S P$ et $F P$, Parabola cujus directrix est $I F$ et umbilicus S transibit per punctum P .

2^{us}. Casus. Parabola descripta ob æquales $S T$, $T V$, ob angulum Rectum $S T R$ tanget rectam $T R$, ejus enim Parabolæ descriptæ directrix est $V I$. Jam verò ducatur ex V perpendicularis in directricem quæ rectæ $T R$ occurrat in r et ab r ducatur ad focum linea $r S$, ob æquales $S T$, $T V$ et angulum rectum $S T R$ erit $V r = r S$ et punctum r ad Parabolam pertinebit per superio-

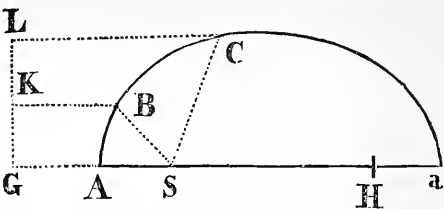
rem demonstrationis partem, eâdem ratione probabitur angulum $V r T$ æqualem esse angulo



$T r S$, ideoque linea $T r$ bifariam dividit angulum $V r S$, sed ea linea Parabolæ Tangens est quæ bifariam dividit angulum quem faciunt duæ lineæ ductæ a puncto quovis Parabolæ una ad focum altera perpendiculariter ad directricem (per Theor. III. de Parabola n. 224.) ergo linea $T R$ tangit Parabolam descriptam sive Parabola descripta tanget Rectam $T R$.

⁽¹⁾ 292. Sectiones conicæ sunt ejusdem speciei, seu similes, quarum axes duo, vel quod idem est, axis major et focorum distantia sunt inter se in datâ ratione; Ex hac enim ratione unicè pendent partium sectionis ratio ac respectiva positio, atque hinc fit ut parabolæ omnes similes sint quod in omnibus focorum distantia infinita majori axi æqualis sit.

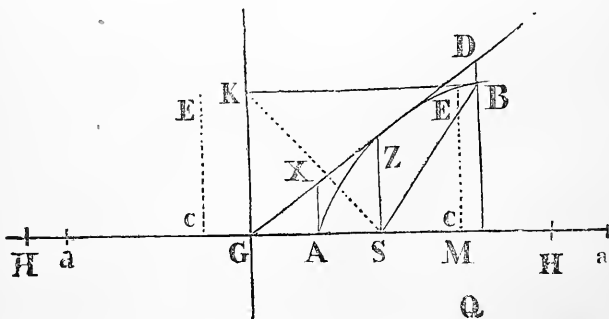
ad distantiam umbilicorum. In **L**
 ea ratione cape **K B** ad **B S**, et
L C ad **C S**. Centris **B, C**, in-
 intervallis **B K, C L**, describe cir-
 culos duos, et ad rectam **K L**,
 quæ tangat eosdem in **K** et **L**,
 demitte perpendiculum **S G**,
 idemque seca in **A** et **a**, ita ut sit **G A** ad **A S** et **G a** ad **a S** ut est **K B** ad
B S et axe **A a**, verticibus **A, a**, describatur trajectorya. Dico factum.
 Sit enim **H** umbilicus alter figuræ descriptæ, et cum sit **G A** ad **A S** ut
G a ad **a S**, erit divisim $G a - G A$ seu $A a$ ad $a S - A S$ seu **S H** in
 eâdem ratione, ideoque in ratione quam habet axis principalis figuræ des-
 cribendæ ad distantiam umbilicorum ejus; ^(k) et propterea figura descrip-
 ta est ejusdem speciei cum describenda. ⁽¹⁾ Cumque sint **K B** ad **B S**
 et **L C** ad **C S** in eâdem ratione, transibit hæc figura per puncta **B, C**, ut
 ex conicis manifestum est.



^(*) * Si describenda sit hyperbola, punctum
a, sumi debet in perpendiculo **S G**, ad alteram
 partem lineæ **G L**, producto ut sit **G**, inter **A**,
 et **a**, tumque erit $G a \perp G A$, seu $A a$ ad $a S$
 $\perp A S$, seu **S H**, in ratione **G A** ad **A S**, adeo-
 que in ratione quam habet axis principalis hy-
 perbolæ describendæ ad distantiam umbilicorum
 ejus, et propterea hyperbola descripta similis est
 hyperbolæ describendæ.

recto, (per Theor. III. de Ell. et Hyp. et Cor. 2
 Theor. I. de Parab. n. 224.)

294. 2^o. Erit **G A** ad **A S** sicut axis major
 ad distantiam focorum, hoc est $G A : A S =$
 $A a : S H$; nam cum **G** sit punctum in quo Tan-
 gens secat Diametrum, ejus distantie **G A, G a**,
 ab utroque vertice sunt inter se sicut abscissæ
A S, S a ab utroque vertice Diametri sumptæ,
 sive est (per Lem. V. de Conic. n. 224.)



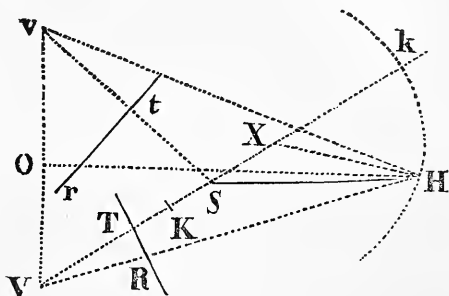
⁽¹⁾ Ut demonstretur puncta **B** et **C** ad sec-
 tionem conicam descriptam pertinere quædam
 prævia ex conicis sunt usurpanda.

293. Lemma. Sit sectionis conicæ **A Z B**,
 axis major **A a**, foci **S, H**, semiaxis minor **c E**,
 erectâ ad axem perpendiculari **S Z** per punctum
Z, ducatur tangens **D Z G** quæ axi occurrat in
G; tum ex punctis **G, A**, et quovis alio axis
 puncto **M**, erigantur ad axem perpendiculares
G K, A X, M B D, et ex puncto sectionis **B**,
 ducatur ad **G K**, perpendicularis **B K**, erit
 1^o. $S Z = \frac{1}{2} L$, seu dimidio lateri recto, etenim
 ordinata in focis est semper æqualis semilateri

$G A : G a = A S : S a$ et convertendo $G A : A a = A S : S a - A S$ sive **S H** (quia $A S = H a$) ergo alternando $G A : A S = A a : S H$.

295. 5^o. Erit factum $G S \times S c$ æquale qua-
 drato semiaxis minoris, nam quia est $G A : A S = A a : S H$, est componendo $G S : A S = S H \perp A a : S H$, et sumendo dimidium terminorum ultimæ rationis est $G S : A S = S c \perp c a$ (sive $S a$) : $S c$, est ergo $G S \times S c = A S \times S a$, sed factum $A S \times S a$, (partium ab uno foco ad utrumque axis majoris verticem sumptarum) est semper æquale quadrato semiaxis mi-

Cas. 2. Dato umbilico S, describenda sit trajectory quæ rectas duas TR, t r alicubi contingat. Ab umbilico in tangentes demitte perpendiculara ST, St et produc eadem ad V, v, ut sint TV, tv, æquales TS, tS. Biseca Vv in O, et erige perpendicularum infinitum OH, rectamque VS infinite productam secans in K et k, ita ut sit VK ad KS et Vk ad kS ut est trajectory describendæ axis principalis ad umbilicorum distantiam. Super diametro Kk des-



cribatur circulus secans OH in H, et umbilicis S, H, axe principali ipsam VH æquante, describatur trajectory. Dico factum. Nam biseca Kk in X, et junge HX, HS, HV, H v. Quoniam est VK ad KS ut Vk ad

noris, nam id factum æquatur in Ellipsi $c A^2 - c S^2$ (per 5. 2. Elem.) et in Hyperbola $c S^2 - c A^2$ (per 6. 2. Elem.) utrumque verò æquatur quadrato semi-axis minoris per naturam focorum (Theor. III. de Hyper. et Ellip. 224.) est ergo $G S \times S c = c E^2$.

296. 4^o. Perpendicularis AX in axis Vertice A erecta et terminata ad Tangentem in extremitate Z ordinatæ quæ insitit foco S est æqualis AS distantia foci a Vertice. Nam cum ob Triangula similia XGA, ZGS sit $G A : A X = G S : S Z$ sive $\frac{1}{2} L = \frac{2 c E^2}{2 c A}$ et sit $c E^2 = G S$

$\times S c$ est $G A : A X = G S : \frac{G S \times S c}{c A} = c A : S c$ (et duplicando hos terminos) $= A a : S H$, sed in eadem ratione est $G A$ ad $A X$ (294) ergo $G A : A X = G A : A S$ et $A X = A S$.

In Parabola idem verum est, in ea enim est $G A = A S$, $G S = 2 A S$ et $S Z = \frac{1}{2} L = 2 A S$ (Cor. 1. Lem. V. de Coni. 224.) Ergo hæc proportio $G A : A X = G S : S Z$ in hanc mutatur $A S : A X = 2 A S : 2 A S$ ergo $A S = A X$.

297. 5^o. Linea a foco S, ad curvæ punctum quodvis B ducta est æqualis lineæ DM, quæ per id punctum transit, et perpendiculariter ad axim ducitur, terminaturque hinc ab axi, illinc a Tangente GZ. Produc enim DM ad Q ubi iterum occurrit Sectioni Conicæ sitque MQ = B M, erit (per Cor. 2. Lem. III. de Conic. n. 224.) $Z X^2 : Z D^2 = A X^2 : D M \times D B$ (sive $D M^2 - B M^2$ per 6. 2. Elem.) sed ob Parallelas AX, SZ, MD est $Z X : Z D = A S : S M$ et $Z X^2 : Z D^2 = A S^2 : S M^2$. Ergo est $A S^2 : S M^2 = A X^2$ (sive $A S^2$ per 296) : $D M^2 - B M^2$ unde est $S M^2 =$

$D M^2 - B M^2$ et addendo utrinque $B M^2$, $S M^2 + B M^2$ (sive $S B^2$ per 47. 1. Elem.) $= D M^2$ et $S B = D M$.

298. 6^o. Si ex sectionis quovis puncto B, ducatur perpendicularis BK ad lineam GK, et linea BS ad focum, erit semper $K B : B S = G A : A S$, nam propter Triangula similia GMD, GAX, est GM (sive KB ob Parallelas GM et KB, GK et MB) : MD (sive BS per 297) $= G A : A X$ (sive A S per 296) hoc est $K B : B S = G A : A S$ idoeque $K B : B S = A a : S H$ quoniam $G A : A S = A a : S H$ (per 294).

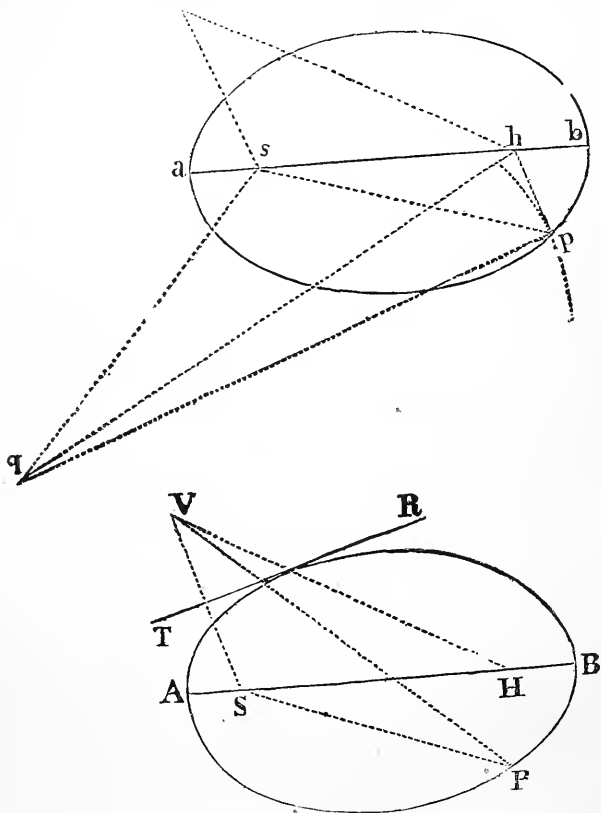
299. Conversa etiam vera est si ducatur perpendicularis in lineam GK, et in ea sumatur B, ita ut sit $K B : B S = G A : A S = A a : S H$ punctum B est in Sectione Conicâ descriptâ.

Sit enim Sectio Hyperbola aut Parabola, illa in unico puncto B secabitur per lineam KB, eritque (per 298) $K B : B S = A a : S H$, dico autem nullum aliud punctum β sumi posse in ea linea KB producta si lubet, ita ut sit $K B : B S = A a : S H$, fingatur enim dari illud punctum β , subtrahanturque termini duarum priorum rationum a se mutuo, erit $K B - K \beta$ (sive $B \beta$) : $B S - \beta S = A a : S H$ sed quia in Hyperbola est A a, minor quam S H, et in Parabola ei est æqualis, erit $B \beta$ minor aut æqualis differentiæ $S B - S \beta$, sed $S B \beta$ est Triangulum, ergo absurdum est (per 20. 1. Elem.) unum ejus latus ut B β esse minus aut æquale differentiæ aliorum, non datur ergo punctum illud β .

2^o. Sectio sit Ellipsis; Ducatur SK; si GK sit æqualis semi-axi minori, erit $S K : G K = A a : S H$ nam (per 295) est $G S : c E$ (sive $G K$ ex Hyp.) $= c E : S c$ et $G S^2 : G K^2 = c E^2 : S c^2$, et componendo $G S^2 + G K$ (sive $S K^2$ per 47. 1. Elem.) : $G K^2 = c E$

(^o) * Centro circuli litterâ X, notato, jungantur H X, H S, H V, et eadem est demonstratio quæ casus 2^o pro ellipsi, et si producaturs R V, S V, versûs V, ut punctum V, situm sit inter K et k, eadem quoque erit demonstratio pro hyperbolâ.

erit ad $p q$ ut est $s h$ ad $s q$, id est (ob similia triangula $V S P$, $h s q$) ut est $V S$ ad $S P$ seu $a b$ ad $p q$. Æquantur ergo $v h$ et $a b$. Porro (^p) ob similia triangula $V S H$, $v s h$, est $V H$ ad $S H$ ut $v h$ ad $s h$, id est,



axis conicæ sectionis jam descriptæ ad illius umbilicorum intervallum, ut axis $a b$ ad umbilicorum intervallum $s h$; et propterea figura jam descripta similis est figuræ $a p h$. Transit autem hæc figura per punctum P , (^q) eo quod triangulum $P S H$ simile sit triangulo $p s h$; et quia $V H$ æquatur ipsius axi et $V S$ bisecatur perpendiculariter a recta $T R$, tangit eadem rectam $T R$. (^r) Q. e. f.

* (^p) Similia sunt triangula $V S H$, $v s h$, nam (per constr.) angulus $V S P = h s q = v s p$, et angulus $H S P = h s p$, adeoque angulus $V S H = v s h$; et præterea $s p : s h = S P : S H$, et $s v : s p = s h : s q = S V : S P$, ob similia triangula $V S P$, $h s q$; quare ex æquo $s v : s h = S V : S H$, triangula igitur $V S H$, $v s h$, quorum latera proportionalia æquales angulos complectuntur sunt similia.

* (^q) Nam æquatur recta $S P$, perimetro

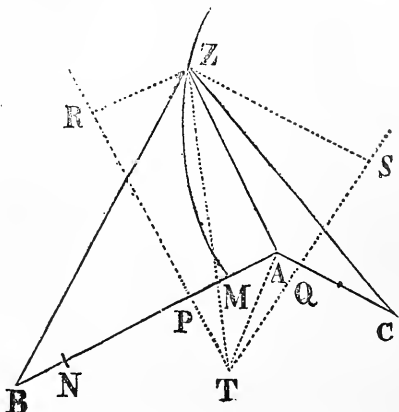
figuræ occurrens in P , et angulum $P S H$, æqualem faciens angulo $p s h$, patet ob similitudinem sectionum conicarum, triangula duo $P S H$, $p s h$, fore similia; undè vicissim manifestum est punctum P , esse in perimetro figuræ, si triangulum $P S H$, simile sit triangulo $p s h$.

* (^r) Eadem est constructio ac demonstratio pro hyperbolâ, si foci H , h , et vertices B , b , ad contrariam partem transferantur.

LEMMA XVI.

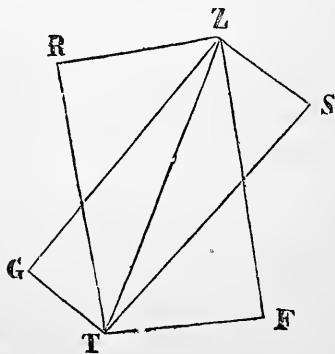
A datis tribus punctis ad quantum non datum inflectere tres rectas quarum differentia vel dantur vel nullæ sunt.

Cas. 1. Sunt puncta illa data A, B, C et punctum quantum Z, quod invenire oportet; ob datam differentiam linearum A Z, B Z, locabitur punctum Z in hyperbola cujus umbilici sunt A et B, et principalis axis differentia illa data. Sit axis ille M N. Cape P M ad M A ut est M N ad A B, et erecta P R perpendiculari ad A B, demissaque Z R perpendiculari ad P R; erit, (*) ex naturâ hujus hyperbolæ, Z R ad A Z ut est M N ad A B. Simili discursu punctum Z locabitur in aliâ hyperbolâ, cujus umbilici sunt A, C et principalis axis differentia inter A Z et C Z, ducique potest Q S ipsi A C perpendicularis, ad quam si ab hyperbolæ hujus puncto quovis Z demittatur normalis Z S, hæc fuerit ad A Z ut est differentia inter A Z et C Z ad A C. Dantur ergo rationes ipsarum Z R et Z S ad A Z, et idcirco datur earundem Z R et Z S ratio ad invicem; ideoque si rectæ R P, S Q concurrant in T, et agantur T Z et T A, figura T R Z S dabitur specie, et recta T Z in qua punctum Z alicubi locatur, dabitur positione. Dabitur etiam recta T A, ut et angulus A T Z; et ob datas rationes ipsarum A Z ac (†) T Z ad Z S dabitur earundem ratio ad invicem; et inde dabitur triangulum A T Z, cujus vertex est punctum Z. Q. e. i.



* (*) Erit ex naturâ hujus hyperbolæ Z R, ad A Z, ut est M N, ad A B, (298).

(†) 300. Et recta T Z, in qua punctum Z, alicubi locatur, dabitur positione; ductis enim T F ad R T, et T G ad S T perpendicularibus, quæ sint in ratione datâ R Z ad Z S, agantur G Z, F Z, ipsis T S, R T parallelæ et se mutuò intersecantes in puncto aliquo Z, juncta T Z, habebit positionem quæsitam; patet enim perpendiculari Z S, Z R, ex puncto Z, in rectas T S, T R, demissa, esse lineis T G, T F æqualia adeoque in datâ ratione.



Cas. 2. Si duæ ex tribus lineis, puta AZ et BZ , æquantur, ita age rectam TZ , ut bisecet rectam AB ; dein quære triangulum ATZ ut supra.

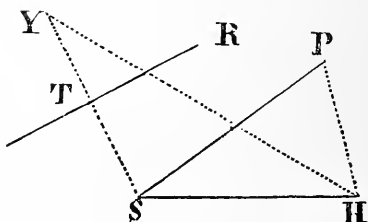
Cas. 3. Si omnes tres æquantur, locabitur punctum Z in centro circuli per puncta A, B, C transeuntis. Q. e. i.

Solvitur etiam hoc lemma problematicum per librum Tactionum *Apolonii* a *Vieta* restitutum.

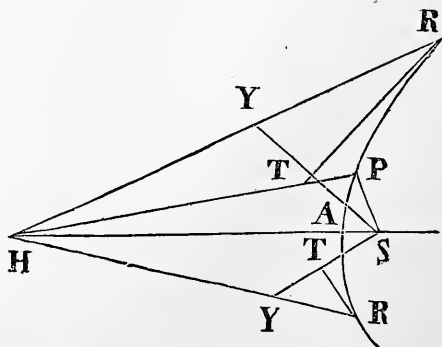
PROPOSITIO XXI. THEOREMA XIII.

Trajectoriam circa datum umbilicum describere, quæ transibit per puncta data et rectas positione datas continget.

Detur umbilicus S , punctum P , et tangens TR , et inveniendus sit umbilicus alter H . Ad tangentem demitte perpendicularum ST , et produc idem ad Y , ut sit TY æqualis ST , et erit YH æqualis axi principali. Junge SP , HP , et erit SP differentia inter HP et axem principalem. ^(u) Hoc modo si dentur plures tangentes TR , vel plura puncta P , devenietur semper ad lineas totidem YH , vel PH , a dictis punctis Y vel P ad umbilicum H ductas, quæ vel æquantur axibus, vel datis longitudinibus SP differunt ab iisdem, atque ideò quæ vel æquantur sibi invicem, vel datas habent differentias; et inde, per lemma superius, datur umbilicus ille alter H . Habitis autem umbilicis una cum axis longitudine (quæ vel est YH ; vel, si trajectoria ellipsis est, $PH + SP$; sin hyperbola, $PH - SP$) habetur trajectoria. Q. e. i.



^(u) 301. Si dentur tres tangentes, dabuntur tria puncta ut Y , ex quibus ad umbilicum H , inflectendæ erunt tres rectæ æquales ut YH , quod fit per *Cas. 3*. Lemmatis superioris. Si duæ dentur tangentes et punctum perimetri sectionis P , dabuntur duo puncta ut Y , ex quibus ad umbilicum H , inflectendæ erunt duæ rectæ æquales, et 3^{um} punctum P , ex quo ducenda PH , cujus differentia a lineâ YH , est data SP . Nam in ellipsi $PH + SP = YH$, adeoque $YH - PH = SP$; in hyperbolâ $PH - SP = YH$, undè $PH - YH = SP$, estque *Casus 2^{us} Lem. XVI*. Tandem si dentur tria perimetri puncta ut P , locum habet *Casus 1^{us} ejusdem Lemmatis*.

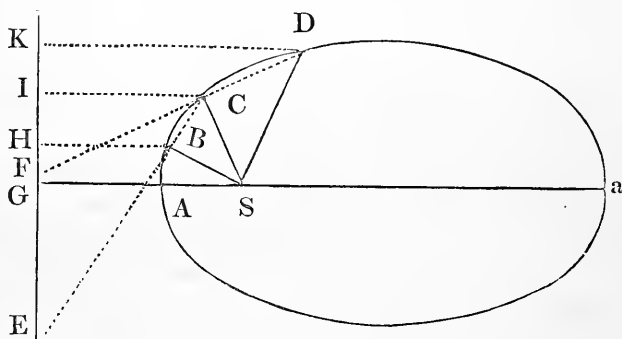


Scholium.

Ubi trajectory est hyperbola, sub nomine hujus trajectorye oppositam hyperbolam non comprehendo. Corpus enim pergendo in motu suo in oppositam hyperbolam transire non potest.

Casus ubi dantur tria puncta sic solvitur expeditius. Dentur puncta B, C, D. Junctas B C, C D produc ad E, F, ut sit E B ad E C ut S B ad S C, et F C ad F D ut S C ad S D. Ad E F ductam et productam demitte normales S G, B H, inque G S infinite productâ cape G A ad A S et G a ad a S ut est H B ad B S; et erit A vertex, et A a axis principalis trajectorye: quæ, perinde ut G A major, æqualis, vel minor fuerit quam A S,

erit ellipsis, parabola vel hyperbola; puncto a in primo casu cadente ad eandem partem lineæ G F cum puncto A; in secundo casu abeunte in infinitum; in tertio cadente ad con-



trariam partem lineæ G F. Nam si demittantur ad G F perpendiculara C I, D K; erit I C ad H B ut E C ad E B, hoc est, ut S C ad S B; et vicissim I C ad S C ut H B ad S B sive ut G A ad S A. Et simili argumento probabitur esse K D ad S D in eâdem ratione. (*) Jacent ergo puncta B, C, D in conic sectione circa umbilicum S ita descripta, ut rectæ omnes, ab umbilico S ad singula sectionis puncta ductæ, sint ad perpendiculara a punctis iisdem ad rectam G F demissa in datâ illâ ratione.

Methodo haud multum dissimili hujus problematis solutionem tradit clarissimus Geometra *de la Hire*, Conicorum suorum Lib. VIII. Prop. XXV.

(*) * Jacent ergo puncta B, C, D, in conic sectione (vide n. 298.)

SECTIO V.

Inventio orbium ubi umbilicus neuter datur.

LEMMA XVII.

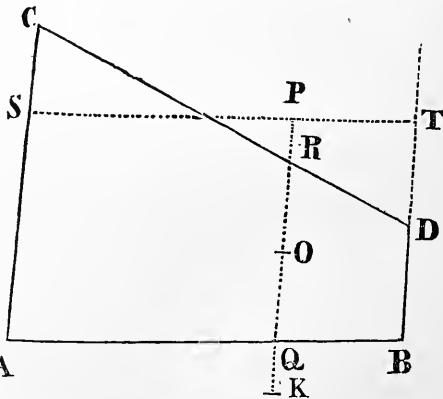
Si a datæ conicæ sectionis puncto quovis P ad trapezii alicujus A B C D, in conicâ illâ sectione inscripti, latera quatuor infinitè producta A B, C D, A C, D B totidem rectæ P Q, P R, P S, P T in datis angulis ducantur, singulæ ad singula: rectangulum ductarum ad opposita duo latera $PQ \times PR$, erit ad rectangulum ductarum ad alia duo latera opposita $PS \times PT$ in datâ ratione.

Cas. 1. Ponamus primò lineas ad opposita latera ductas parallelas esse alterutri reliquorum laterum, putà P Q et P R lateri A C, et P S ac P T lateri A B. Sintque insuper latera duo ex oppositis, putà A C et B D, sibi invicem parallela. Et recta, quæ bisecat parallela illa latera, erit una ex diametris conicæ sectionis, et bisecabit etiam R Q. Sit O punctum in quo R Q bisecatur, et erit P O

ordinatim applicata ad diametrum illam. Produc P O ad K, ut sit O K æqualis P O, et erit O K ordinatim applicata ad contrarias partes diametri. Cum igitur puncta A, B, P et K sint ad conicam sectionem, et P K secet A B in dato angulo, erit (per Prop. 17, 19, 21 et 23. Lib.

III. Conicorum Apollonii) rectangulum P Q K ad rectangulum

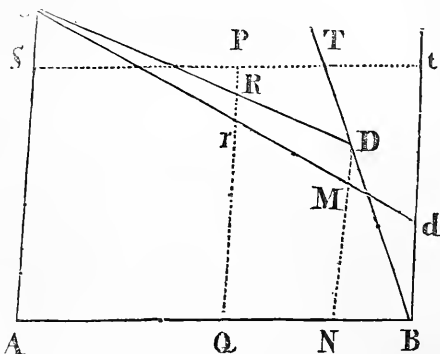
A Q B in datâ ratione. (*) Sed Q K et P R æquales sunt, utpote æqualium O K, O P. et O Q, O R differentiarum, et inde etiam rectangula P Q K et $PQ \times PR$ æqualia sunt; atque ideo rectangulum $PQ \times PR$ est ad rectangulum A Q B, hoc est ad rectangulum $PS \times PT$ in datâ ratione. Q. e. d.



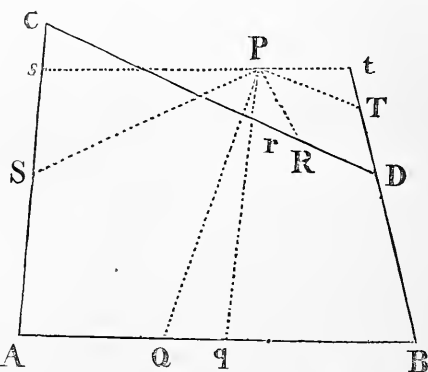
(*) *Erit rectangulum P Q K ad rectangulum A Q B in datâ ratione.* Liquet (per Lem. III. de Conic.) quod si linea quævis in Sectione Conicâ terminata ut P K secet aliam lineam etiam in Sectione Conicâ terminatam ut A B, rectangulum partium lineæ P K erit ad

rectangulum partium lineæ A B ut rectangulum partium lineæ cujusvis alius Parallele lineæ P K et ad sectionem terminatâ, ad rectangulum partium quas hæc nova linea secet in lineâ A B: ideo ubicumque sit punctum P rectangula P Q K et A Q B erunt in eadem datâ ratione.

Cas. 2. Ponamus jam trapezii latera opposita AC et BD non esse parallela. Age Bd parallelam AC et occurrentem tum rectæ ST in t , tum conicæ sectioni in d . Junge Cd secantem PQ in r , et ipsi PQ parallelam age DM secantem Cd in M et AB in N . Jam ob similia triangu-
la BTt , DBN ; est Bt seu PQ ad Tt ut DN ad NB . Sic et ^(z) Rr est ad AQ seu PS ut DM ad AN . Ergo ducendo antecedentes in anteceden-
tes et consequentes in conse-
quentes, ut rectangulum PQ in Rr est ad rectangulum PS in Tt , ita rectangulum NDM est ad rectan-
gulum ANB , et (per *Cas. 1.*) ita rectangulum PQ in Pr est ad rectan-
gulum PS in Pt , (+) ac divisim ita rectangulum $PQ \times PR$ est ad rec-
tangulum $PS \times PT$. Q. e. d.



Cas. 3. Ponamus denique li-
neas quatuor PQ , PR , PS ,
 PT non esse parallelas lateribus
 AC , AB , sed ad ea utcunque in-
clinatas. Earum vice age Pq ,
 Pr parallelas ipsi AC ; et Ps ,
 Pt parallelas ipsi AB ; et
propter datos angulos triangu-
lorum PQq , PRr , PSs , PTt ,
dabuntur rationes PQ ad
 Pq , PR ad Pr , PS ad Ps , PT
ad Pt ; atque ideo rationes composi-
tæ $PQ \times PR$ ad $Pq \times Pr$,
et $PS \times PT$ ad $Ps \times Pt$. Sed, per
superius demonstrata, ratio
 $PQ \times PR$ ad $PS \times PT$ data est:
ergo et ratio $Pq \times Pr$ ad $Ps \times Pt$.
Q. e. d.



(z) * $Rr : AQ$ seu $PS = DM : AN$.
Sunt enim propter parallelas Rr , DM , trian-
gula CRM , CDM similia, ideóque $Rr : DM$
 $= Cr : CM$; sed est $Cr : CM = AQ$ vel
 $PS : AN$; ergó $Rr : DM = QA$ vel $PS :$
 AN et $Rr : PS = DM : AN$.

(†) * *Ac divisim.* Ex demonstratis NDM :

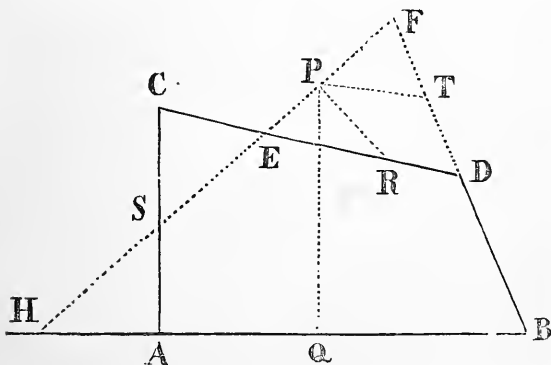
$ANB = PQ \times Rr : PS \times Tt = PQ$
 $\times Pr : PS \times Pt$, et divisim $NDM : ANB$
 $= PQ \times Pr - PQ \times Rr : PS \times Pt$
 $- PS \times Tt = PQ \times PR : PS \times PT$,
sed ratio NDM ad ANB data est, ergó et
ratio $PQ \times PR$ ad $PS \times PT$.

Corol. Hinc si rectæ tres PQ, PR, PS , a puncto communi P ad alias totidem positione datas rectas AB, CD , singulæ ad singulas, in datis angulis ducantur, sitque rectangulum sub duabus ductis $(^c) PQ \times PR$ ad quadratum tertiæ PS in datâ ratione: punctum P , a quibus rectæ ducuntur, locabitur in sectione conicâ quæ tangit lineas AB, CD in A et C ; et contra. Nam coeat linea BD cum lineâ AC , manente positione trium AB, CD, AC ; dein coeat etiam linea PT cum linea PS : et rectangulum $PS \times PT$ evadet PS quad. rectæque AB, CD , quæ

singulis trapezii lateribus occurrat in F, E, S, H , ob datos omnes angulos figuræ, data erit ratio laterum quibussingula triangula $FPT, FED, PER, ECS, SHA, PHQ$, clauduntur.

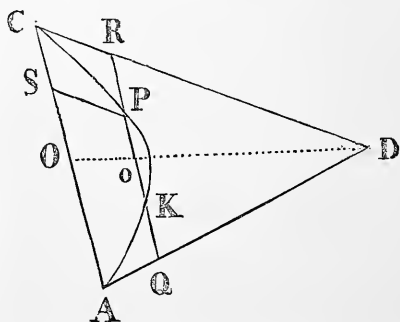
punctum P , cadit in C , si ponatur $CE = C D$, invenietur quoque valor unus $PE = o$, ac proindè punctum P , cum puncto D , coincidit; idem pari argumento respectu punctorum A, B , reperitur, si ponatur $AQ = o$ vel $AQ = AB$.

$(^c)$ Hinc si rectæ tres, &c. Sint tres lineæ AB, CD, AC positione datæ, et lineæ AB, CD tangent sectionem conicam in A et C , et a puncto communi P ducantur tres rectæ PQ, PR, PS in datis angulis ad singulas AB, CD, AC erit $PQ \times PR$ in ratione datâ ad quadratum tertiæ PS : Sit enim PS parallela lineæ DC , et sint RP, PQ parallele lineæ CA sitque PK chorda sectionis, sumatur medium O chordæ AC ducaturque



Assumptis igitur CE , tanquam abscissâ et PE tanquam ordinatâ loci punctorum P , data erit ratio PE , ad PR , adeoque PE , in datam quantitatem ducta æquabitur ipsi PR ; ob datam CD , invenietur ED , ut potè æqualis $CD - CE$, et per triangulum FED specie datum invenietur EF , ac proindè $PF = EF - EP$, et inde per triangulum FPT , invenietur PT , omnesque illæ lineæ exprimentur per lineas CE, PE , unius dimensionis, et alias datas quantitates. Similiter ES et CS et $SA = CA - CS$, atquè HS , per triangulum SAH , specie datum, et hinc $PH = HS + SE + EP$, adeoque PQ , per triangulum PHQ , invenietur in lineis CE et PE , unius dimensionis et aliis datis quantitatibus. Quare in rectangulis $PQ \times PR, PS \times PT$, rectæ variabiles CE, PE , non plures quam duas dimensiones obtinebunt, undè æquatio quæ ex rectangulorum illorum ratione datâ reperitur secundum gradum non superabit; Cùm igitur, ut vulgè notum est, æquationis quadraticæ locus sit sectio conica, patet locum punctorum P , esse ad sectionem conicam. Quod autem sectio illa per puncta C, D, P, A , transeat inito calculo facillè ostenditur, nam si in æquatione loci ponatur $CE = o$ invenietur valor unus ipsius $PE = o$, adeoque

per punctum D, DO , quæ secabit tam chordam PK quam totam RQ in medio (vide Lem. IV. de Conic. n. 224.) hinc erit $RK = PQ$,



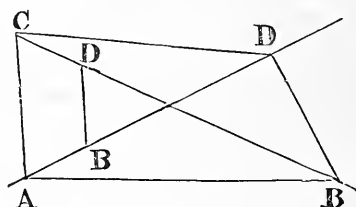
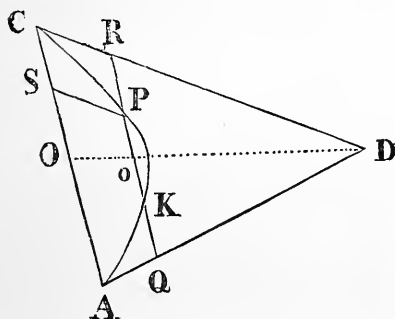
sed est (per Cor. 2. Lem. III. de Conic. n. 224.) CR^2 ad $RP \times RK$ in datâ ratione, ideoque est CR^2 ad $RP \times PQ$ in datâ ratione, sed ob parallelas CR, SP et CS, RP est $PS = CR$, ergo PS^2 est ad $RP \times PQ$ in datâ ratione.

curvam in punctis A et B, C et D secabant, jam (+) curvam in punctis illis coeuntibus non amplius secare possunt, sed tantum tangent.

Scholium.

Nomen conicæ sectionis in hoc lemmate latè sumitur, ita ut sectio tam rectilinea per verticem coni transiens, quam circularis basi parallela includatur. (d) Nam si punctum p incidit in rectam, quâ puncta A et D vel C et B junguntur, conica sectio vertetur in geminas rectas, quarum una est recta illa in quam punctum p incidit, et altera est recta quâ alia duo ex punctis quatuor junguntur. Si trapezii anguli duo oppositi simul sumpti æquantur duobus rectis, et lineæ quatuor P Q, P R, P S, P T ducantur ad latera ejus vel perpendiculariter vel in angulis quibusvis æqualibus, sitque rectangulum sub duabus ductis P Q \times P R æquale rectangulo sub duabus aliis P S \times P T, sectio conica evadet circulus. (e) Idem fiet,

Si lineæ P S, R P, P Q in aliis sed datis angulis ad lineas A C, C D, A D inclinentur, dabuntur earum rationes ad has priores, unde



incidit in rectam quâ quævis ex punctis quatuor A, B, C, D, junguntur et conica sectio vertitur in geminas rectas quarum una est recta illa in quâ punctum P incidit et altera est recta quâ alia duo ex punctis quatuor junguntur.

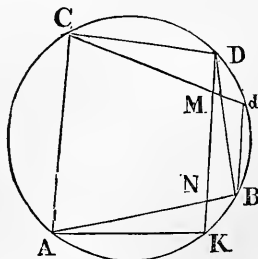
(e) 304. Sectio conica evadet circulus. Si ex trapezii A B D C circulo inscripti angulo quovis D, agatur recta D N, lateri A C parallela, et lateri A B occurrens in N, deinde ex

deducetur eodem modo ac in Lemmate XVII. in isto etiam casu fore S P² ad R P \times P Q in datâ ratione.

Pariter et conversa demonstrabitur ut Lemma XVIII.

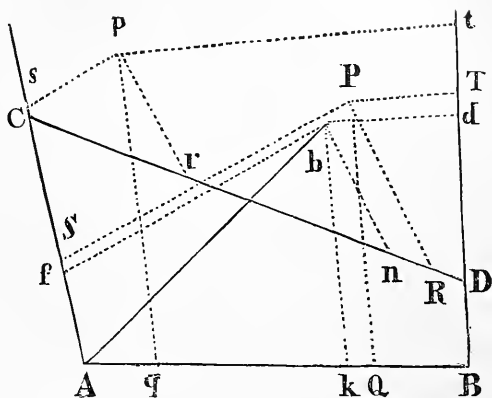
(+) * Jam curvam in punctis illis coeuntibus non amplius secare possunt, sed tantum tangent; puncta enim A et B, C et D, semper supponuntur in conicæ sectionis perimetro posita; quare evanescentibus distantis A B et C D, lineæ A B et C D, ultimò coincidunt cum tangentibus sectionem in punctis A et C. Vid. Lem. VI. Newt.

(d) 303. Puncta quatuor A, B, D, C, sint in perimetro hyperbolæ vel in perimetris duarum hyperbolarum oppositarum, planum sectionis quo hyperbola in cono generatur accedat ad coni verticem; hyperbolæ in triangula rectilinea mutantur quæ erunt loca punctorum P, et quorum latera vel coincidunt cum duobus trapezii lateribus vel sunt ipsius diagonales, ac proinde punctum P,



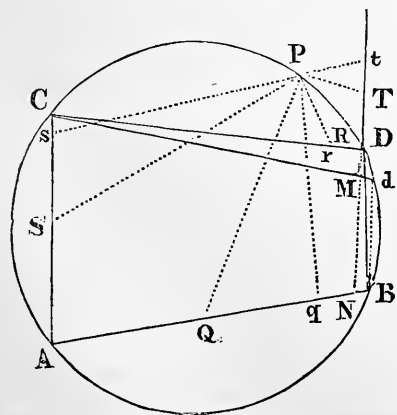
altero angulo B, ducatur B d, lateri A C parallela circulo occurrens in d, jungaturque C d rectam D N, secans in M, erit D N \times D M = A N \times N B. Nam jungatur A K, et quoniam arcus C D, et A K, D d, et K B, inter easdem parallelas intercepti æquales sunt, anguli D C d, et B A K, C D K et A K D, iis arcubus insistentes et æqualium

si lineæ quatuor ducantur in angulis quibusvis, et rectangulum sub duabus ductis $PQ \times PR$ sit ad rectangulum sub aliis duabus $PS \times PT$ ut rectangulum sub sinibus angulorum S, T , in quibus duæ ultimæ PS, PT ducuntur, ad rectangulum sub sinibus angulorum Q, R , in quibus duæ primæ PQ, PR , ducuntur. ^(f) Cæteris in casibus locus puncti P erit aliqua trium figurarum, quæ vulgo nominantur sectiones conicæ. ^(g) Vice autem trapezii $ABCD$ substitui potest quadrilaterum, cujus latera duo opposita se mutuo instar diagonalium decussant. Sed et è punctis quatuor A, B, C, D possunt unum vel duo abire ad infi-



arcuum chordæ CD, AK , æquantur; quare triangula AKN, CDM , similia et æqualia sunt; est igitur $DM = NK$; sed ex naturâ circuli $AN \times NB = KN \times DN$, ergo $AN \times NB = DM \times DN$.

305. Si ergo sectio conica trapezio circum-



ut in articulo superiori; et erit per demonstrationem casus 2ⁱ. Lem. XVII., $ND \times DM : AN \times NB = PQ \times PR : PS \times PT$, hoc est (504) $PQ \times PR = PS \times PT$. Jam verò angulorum sinibus litterâ S designatis erit $S. PQA = S. CAB$, et $S. PRC = S. ACD$, ob

parallelas Pq, AC , et $S. PsS = S. PsC = S. CAB$, et $S. PtT = S. ABD$, ob parallelas st, AB , et ob angulum ACD , complementum anguli ABD ad duos rectos, $S. PtT = S. ACD$.

Porrò

$PQ : Pq = S. PQA (S. CAB) : S. PQB$
 $Ps : PS = S. PSC : S. PsS (S. CAB)$
 $PR : Pr = S. PRC (S. ACD) : S. PRC$
 $Pt : PT = S. PTT : S. PtT (S. ACD)$.

Ergò per compositionem rationum

$PQ \times PR \times Ps \times Pt : PS \times PT \times Pq \times Pr = PQ \times PR : PS \times PT$
 $= S. PSC \times S. PTT : S. PQB \times S. PRC$. Q. e. d.

306. Corol. Eadem manente proportionem, si omnes anguli ad S, T, Q, R , fuerint æquales, rectangulum $PQ \times PR$, erit quoque æquale rectangulo $PS \times PT$.

^(f) * Nam vel punctum P , locabitur in sectione rectilineâ per verticem conî transeunte, vel in circulo, vel tandem in aliquâ trium sectionum conicarum, nullæ enim aliæ sunt sectiones conicæ, ut notum est.

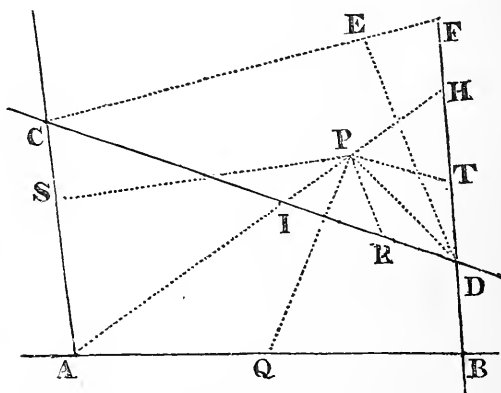
^(g) 307. Vice autem trapezii substitui potest quadrilaterum $ABDC$, cujus latera duo AB, CD , se mutuo instar diagonalium decussant; huic enim quadrilatero absque mu-

scripta vertatur in circulum, hoc est, si sectionis planum basi conî fiat parallelum, erit rectangulum $PQ \times PR$ ad rectangulum $PS \times PT$, ut rectangulum sub sinibus angulorum S, T , ad rectangulum sub sinibus angulorum Q, R . — Dem. factâ constructione Cas. 3ⁱ. Lem. XVII. agantur rectæ DN, Bd , lateri AC parallelae,

nitum, eoque pacto latera figuræ, quæ ad puncta illa convergunt, evadere parallela: quo in casu sectio conica transibit per cætera puncta, et in plagas parallelarum abibit in infinitum.

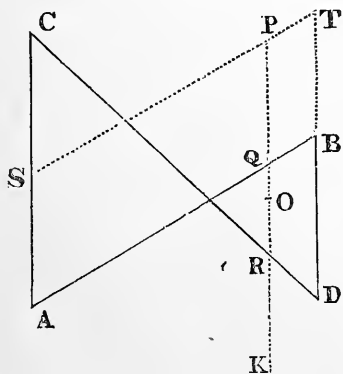
LEMMA XIX.

Invenire punctum P, a quo si rectæ quatuor P Q, P R, P S, P T ad alias totidem positione datas rectas A B, C D, A C, B D, singulæ ad singulas, in datis angulis ducantur, rectangulum sub duabus ductis, P Q \times P R, sit ad rectangulum sub aliis duabus, P S \times P T, in datâ ratione.



Lineæ A B, C D, ad quas rectæ duæ P Q, P R unum rectangulorum continentur ducuntur, convenient cum aliis duabus positione datis lineis in punctis A, B, C, D. Ab eorum aliquo A age rectam quamlibet A H, in quâ velis punctum P reperiri. Secet ea lineas oppositas B D, C D, nimirum B D in H et C D in I, et ob datos omnes angulos figuræ, dabuntur rationes P Q ad P A et P A ad P S, ideoque ratio P Q ad P S. Auferendo hanc a datâ ratione P Q \times P R ad P S \times P T, dabitur ratio P R ad P T, et addendo datas rationes P I ad P R, et P T ad P H dabitur ratio P I ad P H, atque ideo punctum P. Q. e. i.

Corol. 1. Hinc ^(h) etiâ ad loci punctorum infinitorum P punctum



demonstrationes Lemmatum XVII. et XVIII. Exemplum sit Cas. 1. Lem. XVII. ponamus lineas ex puncto P, ad opposita latera ductas parallelas esse alterutri reliquorum laterum, putâ P Q et P R, lateri A C et P S, ac P T, lateri A B; sintque insuper latera duo ex oppositis putâ A C et B D, sibi invicem parallela et recta quæ bisecat, &c. cæteræ omnes demonstrationis partes eodem modo transferuntur ad quadrilaterum C A B D.

^(h) 508. Minima sit punctorum P, D, distantia P D, agantur D s, D q, ad A C, A B, in angulis datis P S C, P Q A, et junctâ, A D, ex illius quovis puncto Y, ducantur Y r, lateri C D, parallela, et Y t, ad D B, in angulo dato P T H; tum ex puncto D, ad Y r, ducatur D r, in angulo dato P R I; punctis P, D, coeuntibus erit P Q : P A = D q : D A, et P A : P S = D A : D s, adeoque P Q : P S = D q : D s, et

tatione aptari possunt tam constructiones quam

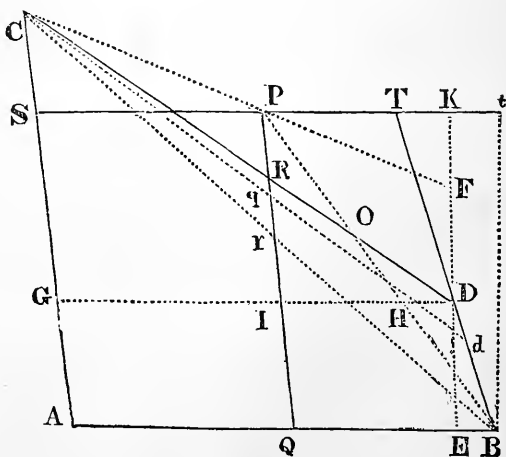
currit loco, lineâ A H existente infinitâ, locus erit parabola, et latus rectum ejus ad diametrum A G pertineans erit $\frac{B G q}{A G}$. Sin ea alicubi occurrat, locus hyperbola erit, ubi puncta A et H sita sunt ad easdem partes ipsius G : et ellipsis, ubi G intermedium est, nisi forte angulus A G B rectus sit, et insuper B G quad. æquale rectangulo A G H, quo in casu circulus habebitur.

Atque ita problematis veterum de quatuor lineis ab Euclide incepti et ab Apollonio continuati non calculus, sed compositio geometrica, qualem veteres quærebant in hoc corollario exhibetur. ⁽¹⁾

LEMMA XX.

Si parallelogrammum quodvis A S P Q angulis duobus oppositis A et P tangit sectionem quamvis conicam in punctis A et P ; et lateribus unius angulorum illorum infinitè productis A Q, A S occurrit eidem sectioni conicæ in B et C ; a punctis autem occursum B et C ad quintum quodvis sectionis conicæ punctum D agantur rectæ duæ B D, C D occurrentes alteris duobus infinitè productis parallelogrammi lateribus P S, P Q in T et R : erunt semper abscissæ laterum partes P R et P T ad invicem in datâ ratione. Et contra, si partes illæ abscissæ sunt ad invicem in datâ ratione, punctum D tanget sectionem conicam per puncta quatuor A, B, C, P transcurrentem.

Cas. 1. Jungantur B P, C P et a puncto D agantur rectæ duæ D G, D E, quarum prior D G ipsi A B parallela sit et occurrat P B, P Q, C A in H, I, G ; altera D E parallela sit ipsi A C et occurrat P C, P S, A B in F, K, E : et erit (per Lem. XVII.) rectangulum D E × D F ad rectangulum D G × D H in ratione datâ. Sed est P Q ad D E (seu I Q) ut P B ad H B,



bola. Porro datis sectionis conicæ vertice, diametro, hujus latere recto ac ordinatarum angulo sectio describi potest (per Prop. 52. 53. 54. 55.

Lib. 1. Conic. Apoll. sive ex iis quæ in notâ 224. de Conicis tradita fuere).

⁽¹⁾ * Hoc veterum problema primus in suâ

ideoque ut $P T$ ad $D H$; et vicissim $P Q$ ad $P T$ ut $D E$ ad $D H$. Est et $P R$ ad $D F$ ut $R C$ ad $D C$, ideoque ut $(I G \text{ vel}) P S$ ad $D G$, et vicissim $P R$ ad $P S$ ut $D F$ ad $D G$; et conjunctis rationibus fit rectangulum $P Q \times P R$ ad rectangulum $P S \times P T$ ut rectangulum $D E \times D F$ ad rectangulum $D G \times D H$, atque ideo in datâ ratione. Sed dantur $P Q$ et $P S$, et propterea ratio $P R$ ad $P T$ datur. Q. e. d.

Cas. 2. Quod si $P R$ et $P T$ ponantur in datâ ratione ad invicem, ^(m) tum simili ratiocinio regrediendo, sequetur esse rectangulum $D E \times D F$ ad rectangulum $D G \times D H$ in ratione datâ, ideoque punctum D (per Lem. XVIII.) contingere conicam sectionem transeuntem per puncta A, B, C, P . Q. e. d.

Corol. 1. Hinc si agatur $B C$ secans $P Q$ in r , et in $P T$ capiatur $P t$ in ratione ad $P r$ quam habet $P T$ ad $P R$: erit $B t$ tangens conicæ sectionis ad punctum B . Nam concipe punctum D coire cum puncto B , ita ut chordâ $B D$ evanescente, $B T$ tangens evadat; et $C D$ ac $B T$ coincident cum $C B$ et $B t$.

Corol. 2. Et vice versâ si $B t$ sit tangens, et ad quodvis conicæ sectionis punctum D convenient $B D, C D$; erit $P R$ ad $P T$ ut $P r$ ad $P t$. Eâ contra, si sit $P R$ ad $P T$ ut $P r$ ad $P t$: convenient, $B D, C D$ ad conicæ sectionis punctum aliquod D .

Corol. 3. Conica sectio non secat conicam sectionem in punctis pluribus quam quatuor. Nam, si fieri potest, transeant duæ conicæ sectiones per quinque puncta, A, B, C, P, O ; easque secet recta $B D$ in punctis D, d , et ipsam $P Q$ secet recta $C d$ in q . Ergo $P R$ est ad $P T$ ut $P q$ ad $P T$; ⁽ⁿ⁾ unde $P R$ et $P q$ sibi invicem æquantur, contra hypothesin.

LEMMA XXI.

Si rectæ duæ mobiles et infinitæ $B M, C M$ per data puncta B, C seu polos ductæ, concursu suo M describant tertiam positione datam rectam $M N$; et aliæ duæ infinitæ rectæ $B D, C D$, cum prioribus duabus ad puncta illæ

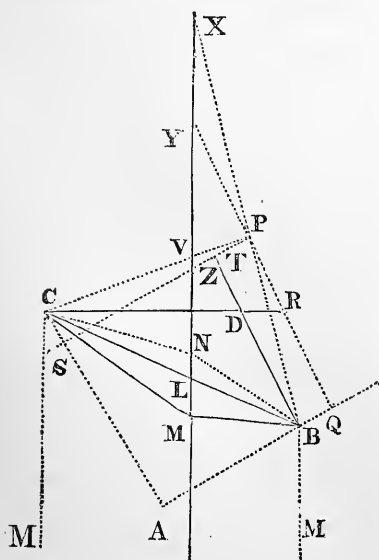
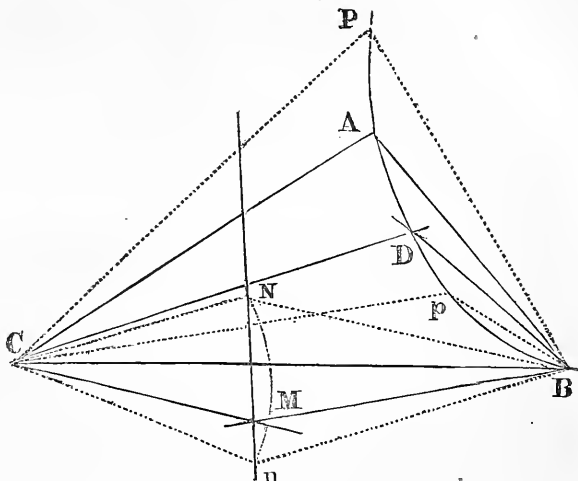
Geometriâ Cartesius per calculum analyticum generaliter resolvit.

^(m) * Nam si $P R$ et $P T$ ponantur in ratione datâ, erit quoque ob ætatis $P Q, P S$, rectangulum $P Q \times P R$, ad rectangulum $P S \times P T$, in ratione datâ; sed per demonstrata in 1^o casu $P Q \times P R : P S \times P T = D E \times D F : D H \times D G$; ergo $D E \times D F$ ad $D H \times D G$ in ratione datâ.

mutuò intersecant in punctis O et B , (per hyp.) duci poterit recta $B D$, quæ duos sectionum arcus in B et O convenientes secet in punctis duobus, eritque per Coroll. 1. Lem. XX. $P R : P T = P r : P t = P q : P T$, adeoque $P R : P T = P q : P T$, unde $P R$ et $P q$ sibi invicem æquantur, ac proinde $C d$, coincidit cum $C D$, et punctum d , cum puncto D , (contra hyp.).

⁽ⁿ⁾ * Cum enim duæ sectiones conicæ se

Et contra, si punctum mobile D contingat sectionem conicam transeuntem per data puncta B, C, A , et sit angulus DBM semper æqualis angulo dato ABC , et angulus DCM semper æqualis angulo dato ACB , et ubi punctum D incidit successivè in duo quævis sectionis puncta immobilia p, P , punctum mobile M incidat successivè in puncta duo immobilia n, N : per eadem n, N , agatur recta nN , et hæc erit locus perpetuus puncti illius mobilis M . Nam, si fieri potest, versetur punctum M in lineâ aliquâ curvâ. Tanget ergo punctum D sectionem conicam per puncta quinque B, C, A, p, P transeuntem, ubi punctum M perpetuò tangit lineam curvam. Sed et ex jam demonstratis tanget etiam punctum D sectionem conicam per eadem quinque puncta B, C, A, p, P , transeuntem, (^p) ubi punctum M perpetuò tangit lineam rectam. Ergo duæ sectiones



parallela, ergo per naturam Parallelarum, est lineæ PT parallela lineæ BA .

Eodem planè modo demonstrabitur lineam CA esse Parallelam lineæ PR . Quibus positis, sit sectio Conica per puncta B, C, P et A transiens, lineæ BD, CD juxta conditiones in Lemmate præscriptas ductæ, concursu suo D percurrent eam sectionem Conicam: Productis enim lineis PT, PR , donec secent lineas CA, BA , in S et Q fiet Parallelogrammum $AS PQ$, quod in Angulis suis oppositis A et P tangit sectionem conicam et lateribus anguli A productis occurrit eidem sectioni in B et C , et lineæ BD, CD a punctis occursum B et C ductæ (secundum conditiones Lemmatis hujusce XXI .) abscindunt a Parallelogrammi lateribus PS, PQ partes PT, PR quæ sunt ad invicem in datâ ratione (per demonstrationem Newtonianam hujusce) ergo (per 2. Casum Lem. XX .) punctum D tangit sectionem Conicam per puncta quatuor A, B, C, P transeuntem.

(^p) * Ubi punctum M , perpetuò tangit lineam rectam nN , &c. cum enim angulorum datorum ABC, ACB , latera duo coincidunt cum rectâ CB , punctum A , aliorum laterum BA, CA , intersectio, locatur in sectione conicâ per polos C, B , transeunte; dum

conicæ transibunt per eadem quinque puncta, contra Corol. 3. Lemmat. XX. Igitur punctum M versari in lineâ curvâ absurdum est. Q. e. d. ^(q)

verò latera duo B n, et C n, B N, et C N, sese intersectant in n, N, aliorum laterum B p, et C p, B P et C P intersectiones p, P, sunt in eadem sectione conicâ ex demonstratis.

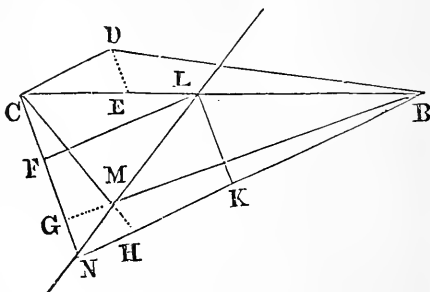
^(q) 310. In hac organicâ sectionum conicarum descriptione, angulorum circa polos mobilium crura utrinque producantur, ut cum duo crura v. gr. C P, B P suprà lineam C B divergant, infrâ eandem producta convergant.

Si recta N M, per polorum alterutrum C, vel B, transeat, aut si anguli B C D, C B D, simul evanescant, punctum D describet lineam rectam. Nam in 1^o. casu angulorum datorum unus immobilis manet, dum alter circa polum suum rotatur et crurum suorum cum immobilis anguli cruribus intersectione lineam rectam describit; Si enim recta N M cum anguli dati D C M crure altero C M coincidat, immobili manente angulo D C M, alterius D B M crura rectas M C, C D perpetuò intersecabunt; deinde si crure B M, coincidente cum C B, ut rectam C M positione datam perpetuò secet in C, immobilis maneat angulus D B M, alterius D C M circa polum C rotati crus C D rectam B D perpetuò intersecabit.

In 2^o casu anguli B C N, C B N circa polos C, B mobiles, crurum duorum C N, B N concursu, rectam N M L positione datam et aliorum crurum C B, B C seu C D, B D concursu D lineam quamlibet percurrant, sintque N punctum fixum M et D puncta mobilia; ductis ex puncto L dato ad latera data C N, B N perpendicularibus L F, L K ex puncto mobili M ad easdem perpendicularibus M G, M H et ex puncto D ad rectam C B, perpendiculari D E; sit C E = x, D E = y, C B = a, ac proinde E B = a - x, M N = z, L N = b, L F = c, F N = d, C N = e, L K = f, N K = h, N B = g; et ob triângula N M G, N F L similia, N L (b) : L F (c) = M N (z) : G M = $\frac{c z}{b}$, et L N (b) : F N (d) = M N

(z) : G N = $\frac{d z}{b}$, adeoque C G = C N - G N = $\frac{b e - d z}{b}$; porro ob angulos æquales D C E, M C G, et D E C, M G C, triângula D C E, M C G similia sunt; quare C G ($\frac{b e - d z}{b}$) :

G M ($\frac{c z}{b}$) = C E (x) : D E (y). Undè c z x = b e y - d z y, et z = $\frac{b e y}{c x + d y}$; ob triângula N L K, N M H, similia N L (b) : L K (f) = N M (z) : M H = $\frac{f z}{b}$, et N L (b) : N K (h) = M N (z) : N H = $\frac{h z}{b}$.



undè B H = $\frac{g b - h z}{b}$; ob similia triângula

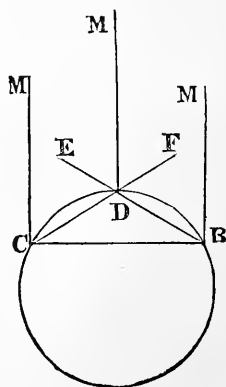
B E D, B H M, B H ($\frac{g b - h z}{b}$) : M H

($\frac{f z}{b}$) = B E (a - x) : D E (y) quare f a z

- f z x = g b y - h z y, et z = $\frac{g b y}{g b y - f z x}$

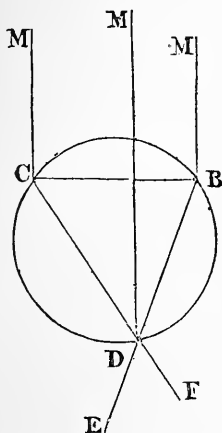
$\frac{f a + h y - f x}{c x + d y} = \frac{b e y}{c x + d y}$, adeoque g c x +

g d y = f a e + h e y - f e x. Cum igitur æquatio sit unius dimensionis, locus punctorum D, est linea recta.

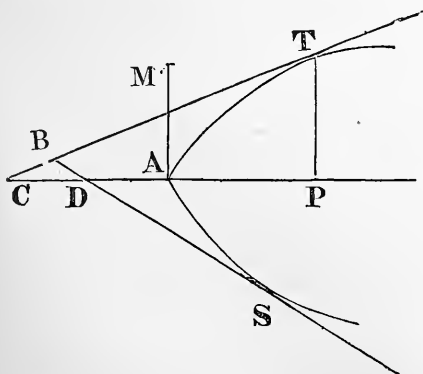


311. Si angulorum mobilium M C D, M B D crura C M, B M sibi invicem parallela maneant, seu, si recta N M ad distantiam infinitam abeat, crura alia C D, B D concursu suo D circulum describent, et contrâ. Concurrent enim C M, D M, B M ad distantiam infinitam, et angulus M C D æqualis erit angulo M D F, ac M B D æqualis M D E; quoniam igitur dati sunt anguli M C D, M B D dabuntur quoque anguli M D F, M D E ac etiam an-

gulus $E D F$ et ei æqualis $C D B$. quare cum curva concursu D descripta, necessariò transeat per puncta data C , et B , patet punctum D seu



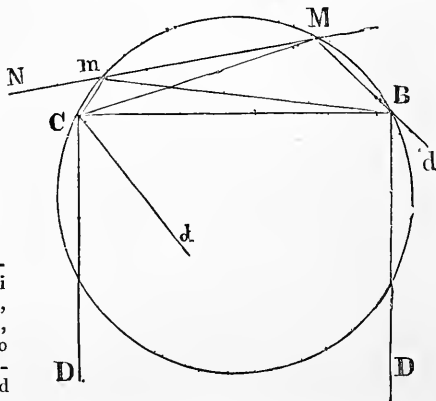
verticem anguli dati $C D B$ chordæ $C B$ insistentis esse in circuli peripheriâ. Et contrâ, si concursus D , tangat circulum per puncta C , et B transeuntem, dabuntur tres anguli $C D B$, $M C D$, $M B D$ atque adeò in quadrilatero $M C D B M$, cujus duo latera $C M$, $B M$ concurrunt in M , dabitur angulus $C M B$, quod fieri nequit, nisi recta $N M$ ad distantiam infinitam abeat, hoc est, nisi parallela fiant crura $C M$, $B M$.



312. *Lemma.* Si duæ rectæ parabolam tangent, et puncta contactuum in infinitum abeant, binæ tangentes se mutuò intersectant ad angulum infinitesimum et evadunt parallele axi parabolæ. Sit enim parabolæ axis $C P$, vertex A , $C T$ tangens in T et axem secans in C , $T P$ ad axem ordinata, $A M$ latus rectum axis, erit $C P = 2 A P$, et $A P \cdot P T = P T : A M$,

adeoque $2 A P (C P) : P T = 2 P T : A M$. Si punctum contactus T , in infinitum abeat, erit $2 P T$, infinita respectu $A M$, et proinde $C P$, infinita respectu $P T$, hoc est, sinus totus $C P$ infinitus evadit respectu tangentis $P T$ anguli $T C P$, quare angulus ille infinitesimus est, et tangens axi $C P$ parallela, altera tangens $B S$, axem secet in D , et tangentem $C T$ in B , et punctum contactus S in infinitum abeat; erit angulus $S D P$ infinitesimus et angulus $T B D$ duobus internis atque infinitesimis $B C D$, $B D C$ æqualis, erit quoque infinitesimus.

313. Super datâ rectâ $C B$, describatur segmentum circuli $B M m C$, quod capiat angulum $B M C$, datorum $M C D$, $M B D$ supplemen-



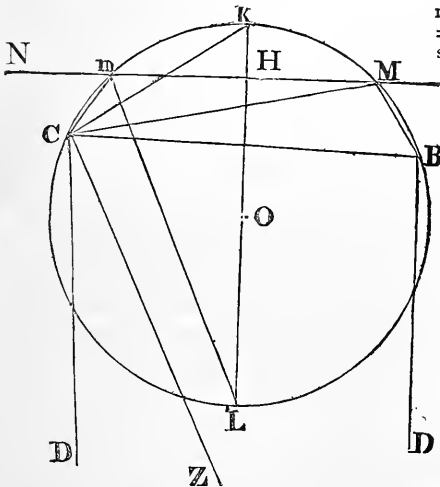
tum ad quatuor rectos et compleatur circulus. Si recta data $N M$, quam in descriptione sectionis conicæ percurrit crurum $B M$, $C M$ concursus M hunc circulum secet, describetur hyperbola; si recta $N M$ circulum contingat, describetur parabola; si recta $N M$ circulo nullibi si occurrat, describetur ellipsis.

Cas. 1. Recta $N M$ circulum secet in punctis m , M , et crura $C d$, $B d$, et $C D$, $B D$, sibi invicem parallela erunt sive concurrent ad distantiam infinitam; nam cum in quadrilatero $D C M B D d C m B d$ angulus M vel m sit complementum angulorum C et B ad quatuor Rectos, angulus ad D vel d , evanescit, ideoque lineæ $C D$, $B D$ erunt parallele. Cum verò in omni Sectione Conicâ inveniri possit Tangens parallela chordæ cuivis datæ (per Lemma IV. de Conicis pag. 129.) ductæ intelligantur Tangentes Sectionis chordis $C D$, $C d$ Parallele, illæ Tangentes facient inter se angulum æqualem angulo $D C d$ quem faciunt inter se illæ chordæ, et puncta contactuum erunt ad distantiam infinitam, nulla verò est sectio conica præter hyperbolam cujus ad infinitam distantiam tangentes angulum finitum communi intersectione faciant; in Ellipsi enim nulla est tangens ad distantiam infinitam, et in parabolâ hujusmodi tangentes angulum infinitesimum duntaxat, facerent (per Lemma superius 313). Si igitur recta $M N$ circulum secet, describetur hyperbola cujus asymp-

toti seu tangentes ad distantiam infinitam rectis $C D$, $C d$ parallelæ sunt et se mutuò intersecant in centro trajectoryæ. Q. e. i.

Cas. 2. Quoniam angulus $m C M$, in 1^o casu æqualis est asymptotorum angulo $D C d$, ob æquales $D C M$, $d C m$; si manentibus circulo et distantia polorum $C B$, puncta intersectionum m , M ad se mutuò accedant, decrescet angulus $D C d$, et tandem punctis m , M coëuntibus, hoc est, secante $M N$ in tangentem mutatâ angulus ille evanescet, dum rectæ $C D$, $B D$ manent parallelæ, et ad distantiam infinitam cum trajectoryâ conveniunt. In hoc igitur casu duæ rectæ, ipsæ $C D$, $C d$ parallelæ et trajectoryam ad distantiam infinitam tangentes, se mutuò intersecant in angulo infinitesimo, seu in unicam lineam coëunt axi trajectoryæ parallelam, et proinde hyperbola casus primi mutatur in parabolam (512). Q. e. 2.

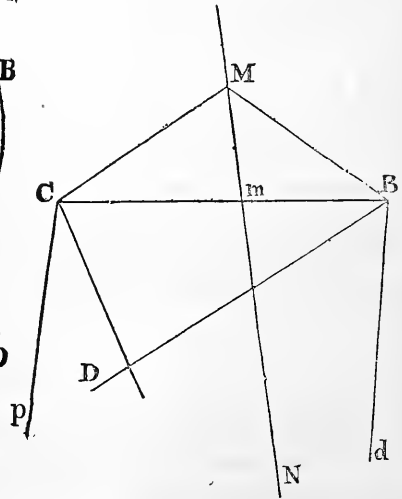
Cas. 3. Si recta $N M$ nullibi circulo occurrat, rectæ $B D$, $C D$ quarum concursus D sectio conica describitur nunquam possunt fieri parallelæ, et proinde curva non abit in infinitum, sed in se redit, estque adeo Ellipsis. Q. e. 3.



314. *Corol. 1* Ex his axes trajectoryæ facile determinantur. Sit O centrum circuli $C M B$ ut suprâ (513) descripti, ab hoc centro in rectam $N M$ cadat perpendicularis $O H$ circulo occurrens in punctis K et L , et rectæ $N M$ in H , jungatur $C K$, et fiat angulus $K C Z$ æqualis angulo mobili $M C D$, aut quod idem est, anguli $M C D$ crus $C M$ ducatur ad positionem $C K$, et alterum crus $C Z$ erit parallelum axi majori, et perpendicularare axi minori trajectoryæ, modo punctum K sit rectæ $M N$ propius quam punctum oppositum L ; nam arcus $K m$, $K M$ sunt æquales et angulus $K C m = K C M = \frac{1}{2} m C M = D C Z$; cumque $m C M$ æqualis sit angulo quo asymptoti se mutuò intersecant, erit $D C Z$ dimidium illius anguli,

adeoque $C Z$ parallela axi qui asymptotorum angulum bisecat; et si punctum K regulæ propius sit quam punctum oppositum L , erit angulus $m C M$ acutus, ac proinde axis major qui angulum asymptotorum acutum bisecat, erit rectæ $C Z$ parallelus, axis verò minor huic rectæ perpendicularis; unde si detur trajectoryæ centrum dabuntur axes, et si descripta sit trajectorya, invenitur axis positio, ductâ ad $C Z$ normali ad trajectoryam utrinque terminatâ quam axis perpendiculariter et bifariam dividit; inventâ autem axium positione, habetur centrum in eorum intersectione communi. Superior autem constructio non solum hyperbolæ convenit, sed et parabolæ in quam hyperbola mutatur, dum puncta m , M coëunt, atque etiam Ellipsi in quam vertitur parabola, dum recta $M N$, extrâ circumulum transit.

315. *Corol. 2.* Axiom trajectoryæ quadrata sunt ad invicem ut $K H$, ad $L H$; nam axes sunt inter se ut cosinus dimidii anguli asymptotorum ad sinum dimidii ejusdem anguli; est verò $K C m$ qui æqualis est dimidio anguli asymptotorum, etiam æqualis angulo $m L K$, adeoque $L H$ est ad $H m$ ut axis ad axem; sed $L H : m H = H m : K H$, ac proinde $L H : K H = L H^2 : H m^2$. Ergo quadrata axium sunt ad invicem ut $L H$ ad $K H$.

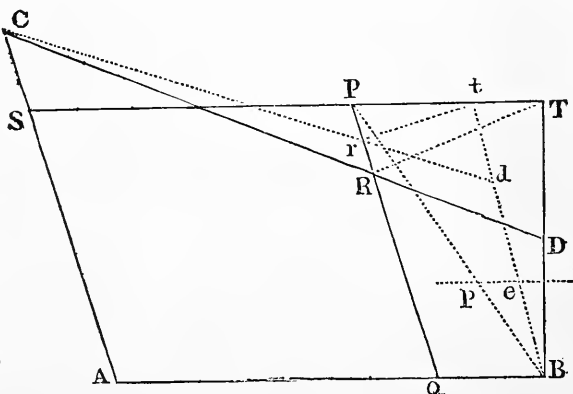


316. *Corol. 3.* Si angulorum mobilium summa duobus rectis æqualis fuerit, rectæ $B D$, $C D$ fiunt parallelæ, quando punctum M pervenit ad m , ubi recta $N M$ occurrat rectæ $C B$ productæ, si opus est, et quando M abit in infinitum, cum in utroque casu evanescat angulus $B M C$. Si itaque linea $M N$, in hac hypothesi alicubi occurrat rectæ $B C$ productæ, duæ rectæ trajectoryam in distantia infinitâ contingent, et se mutuò ad angulum datum intersecabunt, adeoque describetur hyperbola; at si $M N$ rectæ $C B$ non occurrat, sed

PROPOSITIO XXII. PROBLEMA XIV.

Trajectoriam per data quinque puncta describere.

Dentur puncta quinque A, B, C, P, D. Ab eorum aliquo A ad alia duo quævis B, C, quæ poli nominentur, age rectas A B, A C, hisque parallelas T P S, Q R P per punctum quartum P. Deinde a polis duobus B, C age per punctum quintum D, infinitas duas B D T, C R D, novissimè ductis T P S, P R Q (priorem priori et posteriorem posteriori) occurrentes in T et R. Denique de rec-



tis P T, P R, actâ rectâ t r ipsi T R parallelâ, abscinde quasvis P t, P r ipsis P T, P R porportionales; et si per earum terminos t, r et polos B, C actæ B t, C r concurrant in d, locabitur punctum illud d in trajectoriâ quæsità. Nam punctum illud d (per Lem. XX.) versatur in conicâ sectione per puncta quatuor A, B, C, P transeunte; et lineis R r, T t evanescentibus, coit punctum d cum puncto D. Transibit ergo sectio conica per puncta quinque A, B, C, P, D. Q. e. d.

Idem aliter.

E punctis datis junge tria quævis A, B, C; et circum duo eorum B, C, ceu polos, rotando angulos magnitudine datos A B C, A C B, applicentur crura B A, C A primò ad punctum D, deinde ad punctum P,

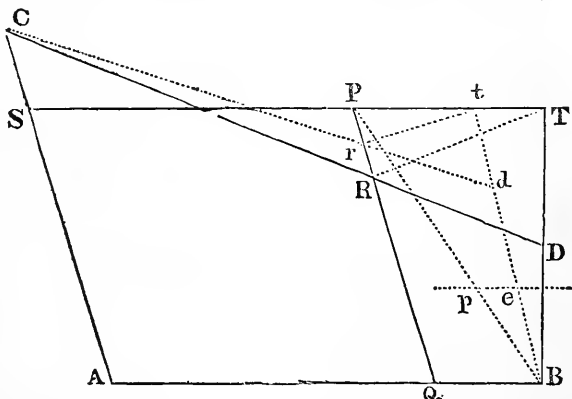
ipsi parallela sit, rectæ C D, B D non evadent parallelæ, nisi quando punctum M abit in infinitum, ac proindè trajectoria erit parabola. Quoniam igitur recta M N rectæ C B productæ occurrit, vel ipsi parallela est, patet nunquam posse Ellipsim describi, si angulorum mobilium summa, duobus rectis æqualis fuerit.

Scholium. Si crura C M, B M concursu suo M percurrant sectionem conicam per polum alterum C transeuntem, crura duo reliqua C D, B D concursu suo D describunt curvam se-

cundi generis per polum alterum B transeuntem, præterquam ubi anguli B C D, C B D simul evanescent, quo casu punctum D describet sectionem conicam per polum C transeuntem, et eâdem methodo curvas varias tertii, quarti, superiorum generum describere licet. Sed hæc ad præsens institutum non pertinent, qui plura desideraverit legat Geometriam Organicam Celeberrimi Matheseos Professoris Colini Mac Laurin, ex quo eximio opere non pauca excerptimus.

Scholium.

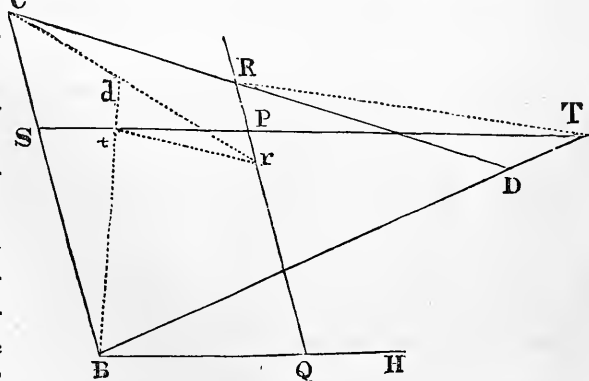
Constructio prior evadet paulo simplicior jungendo $B P$, et in eâ, si opus est, productâ capiendò $B p$ ad $B P$ ut est $P R$ ad $P T$; et per p agendò rectam infinitam $p e$ ipsi $S P T$ parallelam, et in eâ ^(t) capiendò semper $p e$ æqualem $P r$; et agendò rectas $B e$, $C r$ concurrentes in d . Nam cum sint $P r$ ad $P t$, $P R$ ad $P T$, $p B$ ad $P B$, $p e$ ad $P t$ in eâdem ratione; erunt $p e$ et $P r$ semper æquales. Hâc methodo puncta trajectorye inveniuntur expeditissimè, nisi mavis curvam, ut in constructione secundâ, describere mechanicè.



PROPOSITIO XXIII. PROBLEMA XV.

Trajectoriam describere, quæ per data quatuor puncta transibit, et rectam continget positione datam.

Cas. 1. Dentur C tangens $H B$, punctum contactus B , et alia tria puncta C, D, P . Junge $B C$, et agendò $P S$ parallelam rectæ $B H$, et $P Q$ parallelam rectæ $B C$, comple parallelogrammum $B S P Q$. Age $B D$ secantem $S P$



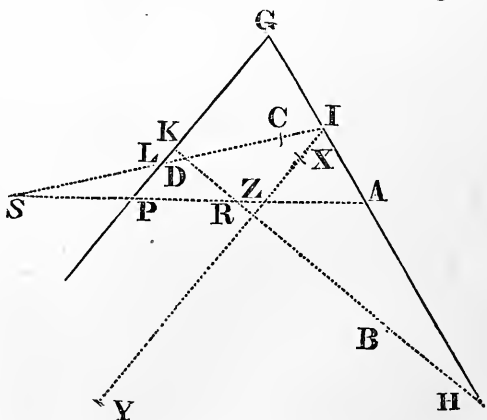
^(t) * Hoc est linearum $p e$, $P r$, alterutra ad fiat, aganturque rectæ $B e$, $C r$, concurrentes arbitrium capiatur, et altera assumptæ æqualis in d ; nam (per pricrem constr) $P r : P t =$

Capi autem potest punctum A vel inter puncta H et I, vel extra; et perinde trajectory dupliciter describi.

PROPOSITIO XXIV. PROBLEMA XVI.

Trajectoriam describere, quæ transibit per data tria puncta, et rectas duas positione datas continget.

Dentur tangentes H I, K L et puncta B, C, D. Per punctorum duo quævis B, D age rectam infinitam B D tangentibus occurrentem in punctis H, K. Deinde etiam per alia duo quævis C, D age infinitam C D tangentibus occurrentem in punctis I, L. Actas ita seca in R et S, ut sit H R ad K R ut est media proportionalis inter B H et H D ad mediam proportionalem inter B K et K D; et I S ad L S ut est media proportionalis inter C I et I D ad mediam proportionalem inter C L et L D. Seca autem pro lubitu vel inter puncta K et H, I et L, vel extra eadem; dein age R S secantem tangentes in A et P, et erunt A et P puncta contactuum. Nam si A et P supponantur esse puncta contactuum alicubi in tangentibus sita; et per punctorum H, I, K, L quodvis I, in tangente alterutra H I situm, agatur recta I Y tangenti alteri K L parallela, quæ occurrat curvæ in X et Y, et in ea sumatur I Z media proportionalis inter I X et I Y, erit ex conicis, ⁽²⁾ rectangulum XIY seu I Z quad. ad L P quad. ut rectangulum C I D ad rectangulum C L D, id est (per constructionem) ut S I quad. ad S L quad. atque ideo I Z ad L P ut S I ad S L. Jacent ergo puncta S, P, Z in unâ rectâ. Porro tangentibus concurrentibus in G, erit (ex conicis) rectangulum X I Y seu I Z quad. ad I A quad. ut G P quad. ad G A quad. ideoque I Z ad I A ut G P ad G A. Jacent ergo puncta P, Z et A in unâ rectâ, ideoque



patet demonstrationem constructionis universalem esse, quomodocumque rectæ G I, G H flectantur, adeoque etiam valere, ubi recta H X sectioni non occurrat.

321. *Corol. 2.* Coëuntibus punctis C, P, recta I G fit tangens in C et $GP = GC$, $CI = PI$, adeoque $CGP = GC^2$, et $PIC = CI^2$; unde

in hoc casu $HA^2 : AI^2 = GC^2 \times BHD : CI^2 \times DGB$. Coëuntibus quoque punctis B et D, et secante G H, in tangentem g h, mutatâ, erit $hA^2 : AI^2 = gC^2 \times dh^2 : CI^2 \times gd^2$, ac proinde $hA : AI = gC \times dh : CI \times gd$; et $hA \times CI \times gd = AI \times gC \times dh$. Quare si ducantur tres rectæ sec-

lineam ^(c) tertiū ordinis analytici, punctum *g* tanget lineam tertiū itidem ordinis; et sic de curvis lineis superiorum ordinum. Lineæ duæ erunt ejusdem semper ordinis analytici quas puncta *G*, *g* tangunt. ^(d) Etenim ut est *a d* ad *O A* ita sunt *O d* ad *O D*, *d g* ad *D G*, et *A B* ad *A D*; ideoque il *A D* æqualis est $\frac{O A \times A B}{a d}$, et *D G* æqualis est $\frac{O A \times d g}{a d}$.

Jam si punctum *G* tangit rectam lineam, atque ideo in æquatione quāvis, quā relatio inter abscissam *A D* et ordinatam *D G* habetur, indeterminatæ illæ *A D* et *D G* ad unicam tantum dimensionem ascendunt, scribendo in hâc æquatione $\frac{O A \times A B}{a d}$ pro *A D*, et $\frac{O A \times d g}{a d}$ pro *D G*, ^(e) producetur æquatio nova, in qua abscissa nova *a d* et ordinata nova *d g* ad unicam tantum dimensionem ascendent, atque ideo quæ designat lineam rectam. ^(f) Sin *A D* et *D G*, vel earum alterutra, ascendeant ad duas dimensiones in æquatione primâ, ascendent itidem *a d* et *d g* ad duas in æquatione secundâ. Et ^(g) sic de tribus vel pluribus dimensionibus.

^(c) 324. NEWTONUS lineas geometricas in ordinibus analyticis distinguit secundum numerum dimensionum æquationis quā relatio inter ordinatas et abscissas definitur, vel (quod proinde est) secundum numerum punctorum in quibus a lineâ rectâ secari possunt; tot enim dimensiones habet æquatio ad curvam quot possunt esse illius curvæ et rectæ intersectiones; nam si intersectiones illæ seorsim quærantur, quoniam eadem est omnium lex et conditio, idem erit calculus in casu unoquoque et propterea eadem semper conclusio, quæ igitur debet omnes intersectiones simul complecti et indifferenter exhibere, adeoque tot esse debent æquationis radices ac proinde dimensiones quot sunt intersectiones. Hinc linea primi ordinis erit recta sola, lineæ secundi sive quadratici ordinis erunt sectiones conicæ et circulus, et lineæ tertiū sive cubici ordinis parabola cubica, parabola Neiliana, Cissois veterum et aliae. Cum autem recta inter curvas non sit numeranda, curva primi generis eadem est cum lineâ secundi ordinis, et curva secundi generis eadem cum lineâ tertiū ordinis, et linea ordinis infinitesimi ea est quam recta in punctis infinitis secare potest, qualis est spiralis, cyclois, quadratrix et linea omnis quæ per radii vel rotæ revolutiones infinitas generatur.

^(d) 325. Etenim ob similia triangula, *a d O*, *A O D*, *a d : O A = O d : O D*, (et per constr.) *O d : O D = d g : D G*, et ob rectas *A O*, *B d* parallelas *O d : O D = A B : A D*; unde *a d : O A = d g : D G = A B : A D*, atque adeo *A D = \frac{O A \times A B}{a d}* et *D G = \frac{O A \times d g}{a d}*. Sit *O A = a*, *A B = b*, *A D*

$= x$, *D G = y*, *a d = z*, *d g = u*, et erit $x = \frac{b a}{z}$, $y = \frac{a u}{z}$.

^(e) * Sit *G I*, recta positione data et ad illam æquatio quævis $c x + d y + e f = 0$, in qua $+$, significat vel $+$, vel $-$, loco *x* et *y*, substituantur eorum valores (325.) $\frac{b a}{z}$, $\frac{a u}{z}$ et produ-

cetur $\frac{c b a}{z} + \frac{d a u}{z} + e f = 0$, hoc est, reductione ad communem denominatorem factâ $c b a + d a u + e f z = 0$ æquatio nova unius dimensionis ad rectam lineam *g i*.

^(f) * Sit *G I*, sectio conica et ad illam æquatio generalis, $c x x + d y y + e x y + g^2 x + m^2 y + n^3 = v$, loco *x*, *y*, substituantur $\frac{b a}{z}$, $\frac{a u}{z}$, et prodibit æquatio nova ad conicam

sectionem $\frac{c b^2 a^2}{z^2} + \frac{d a^2 u^2}{z^2} + \frac{e b a^2 u}{z^2} + \frac{b a g^2}{z} + \frac{m^2 a u}{z} + n^3 = 0$, hoc est, reductione factâ, $c b^2 a^2 + d a^2 u^2 + e b a^2 u + b a g^2 z + m^2 a u z + n^3 z^2 = 0$.

^(g) * Et sic de tribus vel pluribus dimensionibus, nam si in serie 1, *x*, *x*², *x*³, *x*⁴, &c. loco *x*, et dignitatum ejus substituantur $\frac{1}{z}$, et ipsius

dignitates prodibit series nova 1, $\frac{1}{z}$, $\frac{1}{z^2}$, $\frac{1}{z^3}$, $\frac{1}{z^4}$, &c. et reductione ad communem denominatorem factâ habebitur $\frac{z^4 + z^3 + z^2 + z^1 + 1}{z^4}$. Similiter si

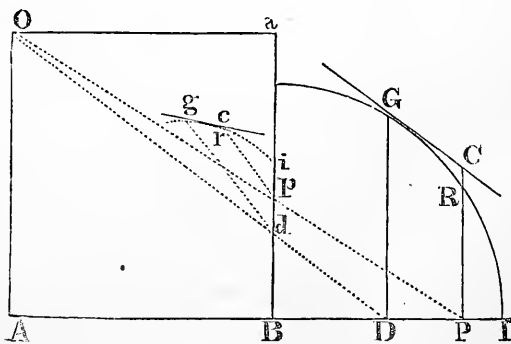
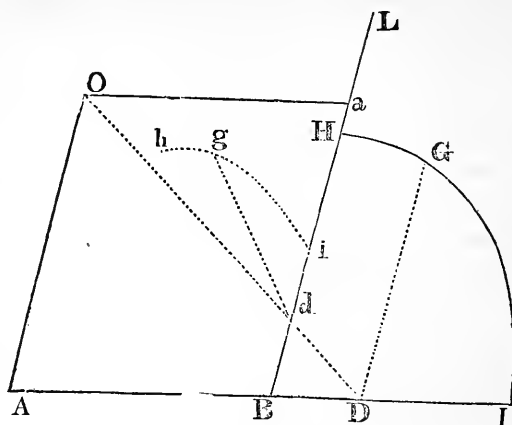
in serie *y*, *y*², *y*³, *y*⁴, &c. loco *y*, substituantur

Indeterminatæ a d, d g in æquatione secundâ, et A D, D G in primâ ascendent semper ad eundem dimensionum numerum, et propterea lineæ, quas puncta G, g tangunt, sunt ejusdem ordinis analytici.

(^h) Dico præterea, quod si recta aliqua tangat lineam curvam in figurâ primâ; hæc recta eodem modo cum curvâ in figuram novam translata tanget lineam illam curvam in figurâ novâ; et contra. Nam si curvæ puncta quævis duo accedunt ad invicem et coeunt in figurâ primâ, puncta

$\frac{u}{z}$, prodibit series nova $\frac{u}{z}, \frac{u^2}{z^2}, \frac{u^3}{z^3}, \frac{u^4}{z^4}$, &c. et per reductionem ad denominatorem communem $\frac{u z^3, u^2 z^2, u^3 z, u^4}{z^4}$, iisdem x et y valoribus substitutis in seriëbus factorum x y, x y², x y³, &c. et x² y, x³ y, &c. et reductione ad communem denominatorem z⁴ factâ, habebuntur series $\frac{z^2 u, z u^2, z u^3}{z^4}$, et $\frac{z u, u^2}{z^4}$.

Porro æquatio omnis ex hujusmodi dignitatibus et factis composita est, et abjici potest communis omnium terminorum denominator qui hic est z⁴, ergo hujusmodi substitutionibus non mutatur gradus æquationis. Eadem quoque demonstrari possunt ex eo quod si linea recta curvam H G I, secet in quolibet punctis, eadem recta translata curvam h g i in totidem punctis intersectare debeat, quoniam singulæ nec plures intersectiones in novam figuram transferuntur.



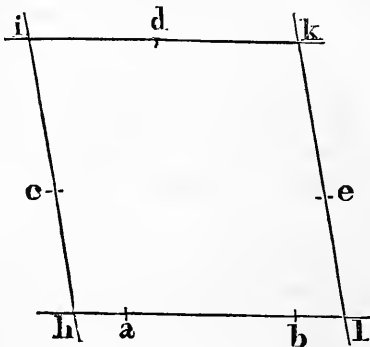
(^h) 526. Recta G C curvam G I tangat in G, transferatur punctum G, in g, et ductâ P C parallelâ D G, quæ curvæ occurrat in R et tangenti in C; transferatur punctum C, in c, faciendo ut O P : P C = O p : p c parallelam d g, et recta g c, quæ puncta g, et c, jungit, novam curvam g i, tanget in g; nam accedat P C, ad D G, et accedat correspondens p c, ad d g, et punctis C, R, G, coeuntibus, coibunt

in figurâ novâ puncta c, r, g, adeoque linea g c, positione coincidit cum chordâ evanescente g r, hoc est cum tangente in g. Idem aliâ ratione potest demonstrari; quoniam enim P C : p c = P O : p o = P R : p r, et proinde P C : P R = p c : p r, ergo punctum c, non est in curvâ g i, nisi cum C reperitur in curvâ G I, hoc est, nisi C et G coeant.

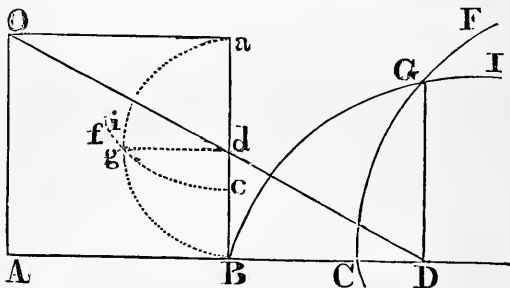
PROPOSITIO XXV. PROBLEMA XVII.

Trajectoriam describere, quæ per data duo puncta transibit, et rectas tres continget positione datas.

Per concursum tangentium quarumvis duarum cum se invicem, et concursum tangentis tertiæ cum recta illa, quæ per puncta duo data transit, age rectam infinitam; eaque adhibita pro radio ordinato primo, transmutetur figura, per lemma superius, in figuram novam. ^(m) In hac figurâ tangentes illæ duæ evadent sibi invicem parallelæ, et tangens tertia fiet parallela rectæ per puncta duo data transeunti. Sunt $h i$, $k l$ tangentes illæ duæ parallelæ, $i k$ tangens tertia, et $h l$ recta huic parallela transiens per puncta illa a , b , per quæ conica sectio in hac figurâ novâ transire debet, et parallelogrammum $h i k l$



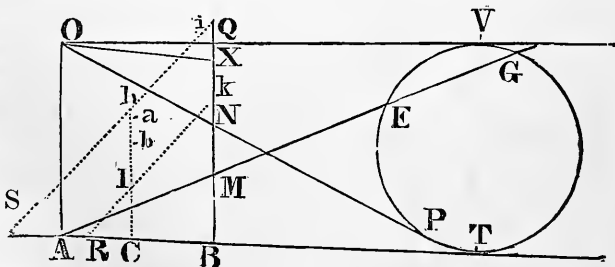
tatur ad $a B$ nova ordinata sive perpendicularis $g d$, et per punctum d , agatur radius abscindens $O d$ secans rectam $A B$ in D , denique per D agatur $G D$ radio ordinato primo $O A$ parallela quæ sit ad $O D$ ut $g d$, ad $O d$, et erit G punctum intersectionis quæsitum. Cum enim in puncto inter sectionis duarum linearum $B G I$, $C G F$, communis sit ordinata $G D$ manifestum est intersectionem illam transformari in intersectionem linearum $B g a$, $c g f$, et vice versâ (331).



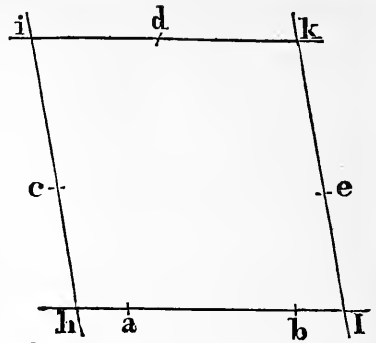
(m) 334. Sit O , concursus tangentium duarum $O V$, $O P$, A concursus tangentis tertiæ $A T$, cum rectâ $A G$, quæ per puncta duo E , G , data transit, age rectam infinitam $O A$, eaque adhibita pro radio ordinato primo, et $O X$ parallelâ $A T$, pro radio ordinato novo usurpatâ, transmutetur figura in figuram novam, quod

facillimum est, si ordinatæ novæ parallelæ sumantur radio ordinato novo $O X$, nam recta $A T$ transformatur in rectam $B X i$ (330), recta $A G$ in rectam $C h$ ipsi $B X$ parallelam (329) et punctum illius C , reperitur, capiendâ $B C = B M$ (328). rectæ $O V$, $O P$ transmutantur in rectas parallelas $R k$, $S i$, (327); earumque puncta R , S , habentur capiendâ $B R = B N$,

$B S = B Q$, et alia puncta duo (per Lem. XXII.) facile reperiuntur. Puncta E , et G , transferantur in b , et a , et productis lineis parallelis $B i$ et $C h$, $R k$, et $S i$, donec sibi mutuo occurrant, compleatur parallelogrammum $l h i k$, et nova sectio conica transibit per puncta b , et a , et tangetur a rectis tribus $h i$, $l k$, k (326).



complens. ⁽ⁿ⁾ Secentur rectæ $h i$, $i k$, $k l$ in c , d , e , ita ut sit $h c$ ad latus quadratum rectanguli $a h b$, $i c$ ad $i d$, et $k e$ ad $k d$ ut est summa rectorum $h i$ et $k l$ ad summam trium linearum quarum prima est recta $i k$, alteræ duæ sunt latera quadrata: rectangulorum $a h b$ et $a l b$: et erunt c , d , e puncta contactuum. Etenim, ex conicis, sunt $h c$ quadratum ad rectangulum $a h b$, et $i c$ quadratum ad $i d$ quadratum, et $k e$ quadratum ad $k d$ quadratum, et $e l$ quadratum ad rectangulum $a l b$ in eâdem ratione; et propterea $h c$ ad latus quadratum ipsius $a h b$, $i c$ ad $i d$, $k e$ ad $k d$ et $e l$ ad latus quadratum ipsius $a l b$ sunt in subduplicatâ illâ ratione, et compositè, in datâ ratione omnium antecedentium $h i$ et $k l$ ad omnes consequentes, quæ sunt latus quadratum rectanguli $a h b$, et recta $i k$, et latus quadratum rectanguli $a l b$. Habentur igitur ex datâ illâ ratione puncta contactuum c , d , e , in figura nova. Per inversas operationes lemmatis novissimi transferantur hæc puncta in figuram primam, et ibi (per Prob. XIV.) describetur trajectorya. Q. e. f. ^(o) Cæterum perinde ut puncta a , b jacent vel inter puncta h , l , vel extra, debent puncta c , d , e vel inter puncta h , i , k , l capi, vel extra. Si punctorum a , b alterutrum cadit inter puncta h , l , et alterum extra, problema impossibile est.



PROPOSITIO XXVI. PROBLEMA XVIII.

Trajectoriam describere, quæ transibit per punctum datum, et rectas quatuor positione datas continget.

Ab intersectione communi duarum quarumlibet tangentium ad inter-

* ⁽ⁿ⁾ Inter $a h$, $h b$, quærat media proportionalis quæ dicatur M , et inter $a l$, $l b$, media proportionalis N ; et deinde ita secentur rectæ $h i$, $i k$, $k l$ in c , d , e , ut sit $h c$, ad M , $i c$, ad $i d$, et $k e$ ad $k d$, ut est $h i + k l$, ad $i k + M + N$, et erunt c , d , e , puncta contactuum; Etenim si fuerint c , d , e , puncta contactuum, $o b$, $h l$ parallelam tangenti $i k$, quæ cum alterâ tangente $h i$, concurrat in i , erit (per Prop. 16. et 18. lib. 3. Conic. Apoll. sive per Corol. 2. Lem. III. de Conic. p. 118.) $h c^2 : a h \times h b = i c^2 : i d^2 = k e^2 : k d^2$, et $o b$, $h i$, occurrentem sectioni in solo puncto c , et parallelam tangenti $l k$, quæ alteri tangenti $i k$ occurrat in k , erit (per easdem Prop. Apoll.) $i c \times i c (i c^2) : i d^2 = k e^2 : k d^2$, et $o b$, $h l$, parallelam tangenti $i k$, quæ cum alterâ angente $l k$, conveniat in k , erit (per easdem

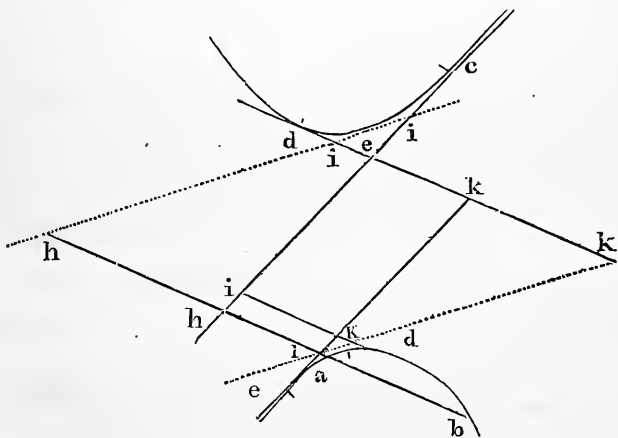
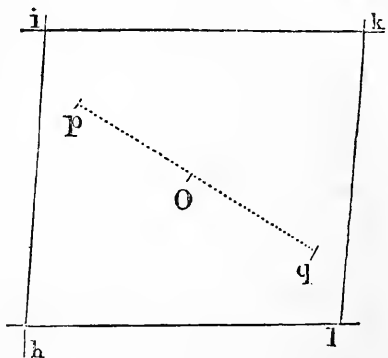
Prop. Apoll.) $k e^2 : k d^2 = e l^2 : a l \times l b$, adeoque $h c^2 : a h \times h b = i c^2 : i d^2 = k e^2 : k d^2 = e l^2 : a l \times l b$, et propterea $h c : \sqrt{a h \times h b} (M) = i c : i d = k e : k d = e l : \sqrt{a l \times l b} (N)$, et compositè summa omnium antecedentium est ad summam omnium consequentium ut quilibet antecedens ad suum consequentem, hoc est $h c : M = i c : i d = k e : k d = e l : N = h c + i c + k e + e l (h i + k l) : M + i d + k d + N (i k + M + N)$. Habentur igitur (per constr.) ex datâ illâ ratione puncta contactuum c , d , e , in figurâ novâ per inversas operationes (331).

^(o) 335. Quoniam duæ parallelæ $h i$, $l k$, neque parabolam, neque hyperbolam simplicem contingere possunt, tangent hyperbolas oppositas

sectionem communem reliquarum duarum agatur recta infinita, et eâdem pro radio ordinato primo adhibitâ, transmutetur figura (per Lem. XXII.) in figuram novam, et tangentes binæ, quæ ad radium ordinatum primum concurrebant, jam evadent parallelæ.

Sunto illæ $h i$ et $k l$, $i k$ et $h l$ continentes parallelogrammum $h i k l$. Sitque p punctum in hac novâ figurâ puncto in figurâ primâ dato respondens.

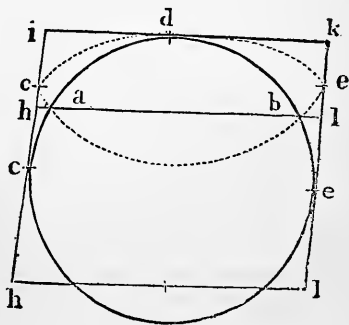
(P) Per figuræ centrum O agatur $p q$, et existente $O q$ aquali $O p$, erit q punctum alterum per quod sectio conica in hac figurâ novâ transire debet. Per Lemmatis XXII. operationem inversam transferatur hoc punctum in figuram primam, et ibi habebuntur puncta duo per quæ trajec-



vel ellipsim, circulo inter ellipses annumerato.

Porro Ellipsis tota inter tangentes parallelas, et hyperbolæ oppositæ totæ extra easdem sunt; quare in Ellipsi puncta a, b , inter puncta h, l , sita sunt; in hyperbolis extra; atque adeo si punctorum a, b , alterum cadit inter puncta h, l et alterum extrâ, problema impossibile est. In Ellipsi punctum contactus d , inter puncta i, k , necessariò cadit; alia duo c, e , inter puncta h et i, l et k , vel aliquandò extrâ esse possunt; in hyperbolis oppositis contactuum puncta duo ut c, d , extrâ puncta h, i, k, l , necessariò posita sunt, tertium ut e , vel extrâ vel intra esse potest, undè præscribit Newtonus ut puncta c, d, e , vel inter puncta h, i, k, l , vel extrâ capiantur, perindè ut puncta a, b , jacent vel inter puncta h, l , vel extrâ.

(P) 536. Parallelogrammi h, i, k, l , sectioni conicæ circumscripti diagonales in sectionis

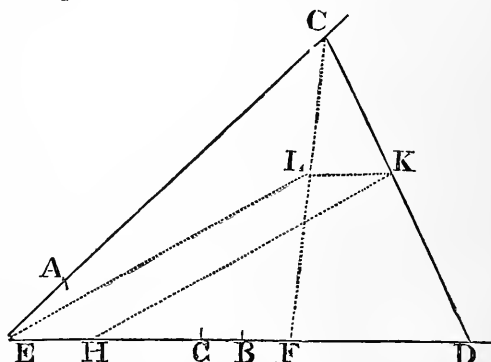


toria describenda est. Per eadem vero describi potest trajectory illa per Problema XVII. Q. e. f.

LEMMA XXIII.

Si rectæ duæ positione datæ A C, B D ad data puncta A, B, terminentur, datamque habeant rationem ad invicem, et recta C D, quâ puncta indeterminata C, D junguntur, secetur in ratione datâ in K : dico quod punctum K locabitur in rectâ positione datâ.

(¹) Concurrent enim rectæ A C, B D in E, et in B E capiatur B G ad A E ut est B D ad A C, sitque F D semper æqualis datæ E G ; et erit ex constructione E C ad G D, hoc est, ad E F ut A C ad B D, ideoque in ratione datâ, et propterea dabitur specie triangulum E F C. Secetur C F in L ut sit C L ad C F in ratione C K ad C D; et ob datam illam rationem, dabitur etiam specie triangulum E F L; proindeque punctum L locabitur in rectâ E L positione datâ. Junge L K, et similia erunt triangula C L K, C F D; et ob datam F D et datam rationem L K ad F D dabitur L K. Huic æqualis capiatur E H, et erit semper E L K H parallelogrammum. Locatur igitur punctum K in parallelogrammi illius latere positione dato H K. Q. e. d.



Corol. Ob datam specie figuram E F L C, rectæ tres E F, E L et E C, id est G D, H K et E C, datas habent rationes ad invicem.

LEMMA XXIV.

Si rectæ tres tangant quamcunque conï sectionem, quarum duæ parallelæ sint ac dentur positione ; dico quod sectionis semidiameter hisce duabus parallela, sit media proportionalis inter harum segmenta, punctis contactuum et tangenti tertiæ interjecta.

Sunto A F, G B parallelæ duæ conï sectionem A D B tangentes in A et B; E F recta tertia conï sectionem tangens in I, et occurrens prioribus tangentibus in F et G; sitque C D semidiameter figuræ tangentibus parallela : dico quod A F, C D, B G sunt continuè proportionales.

centro O, se mutuo intersectant. Nam rectæ 27. et 31. Lib. 2. Conic. Apoll. utque sequitur quæ opposita contactuum puncta jungunt, sunt ex Lem. IV. de Conic. p. 119). sectionis diametri centro O bisectæ (per Prop. (¹) * Vid. not. 67. pag. 28.

Nam si diametri conjugatæ $A B$, $D M$ tangenti $F G$ occurrant in E et H seque mutuo secant in C , et compleatur parallelogrammum $I K C L$; (^r) erit ex naturâ sectionum conicarum ut $E C$ ad $C A$ ita $C A$ ad $C L$, et ita divisim $E C - C A$ ad $C A - C L$, seu $E A$ ad $A L$, et compositè $E A$ ad $E A + A L$ seu $E L$ ut $E C$ ad $E C + C A$ seu $E B$; ideoque ob similitudinem triangulorum $E A F$, $E L I$, $E C H$, $E B G$, $A F$ ad $L I$ ut $C H$ ad $B G$. Est itidem, ex naturâ sectionum conicarum, $L I$ seu $C K$ ad $C D$ ut $C D$ ad $C H$; (^s) atque ideo ex æquo perturbatè $A F$ ad $C D$ ut $C D$ ad $B G$. Q. e. d.

Corol. 1. Hinc si tangentes duæ $F G$, $P Q$ tangentibus parallelis $A F$, $B G$ occurrant in F et G , P et Q , seque mutuo secant in O ; erit ex æquo perturbatè $A F$ ad $B Q$ ut $A P$ ad $B G$, (^t) et divisim ut $F P$ ad $G Q$, atque ideo ut $F O$ ad $O G$.

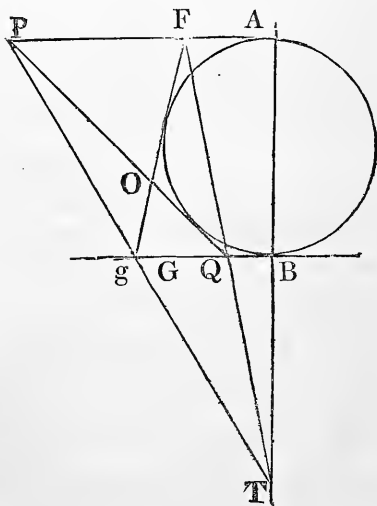
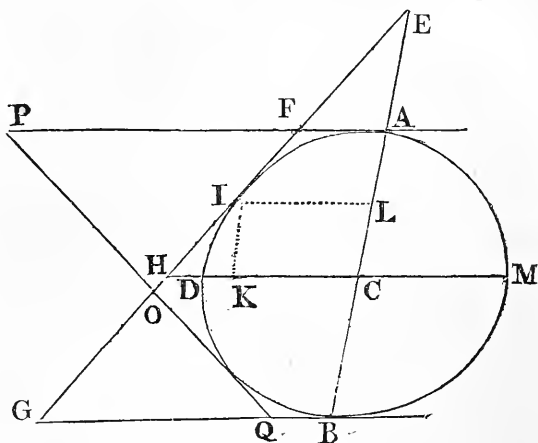
Corol. 2. (^u) Unde etiam rectæ duæ $P G$, $F Q$, per puncta P et G , F

(^r) * Erit ex naturâ sectionum conicarum, &c. (per Prop. 37. 38. Lib. 1. Conic. Apoll. vide Cor. 2. Lem. V. de Conic. p. 121.)

(^s) * Cum sit $E A : E L = E C : E B$, et ob similitudinem triangulorum $E A F$, $E L I$ sit $E A : E L = A F : L I$, seu $C K$, et ob similitudinem triangulorum $E C H$, $E B G$ sit $E C : E B = C H : B G$, erit $A F : C K = C H : B G$, et quia (ex Conic. loco citato) $C K : C D = C D : C H$, erit $A F \times C K : C K \times C D = C H \times C D : B G \times C H$, hoc est, $A F : C D = C D : B G$.

(^t) * Est enim $A F : C D = C D : B G$, et similiter $B Q : C D = C D : A P$, seu $C D : B Q = A P : C D$, adeoque $A F \times C D : C D \times B Q = C D \times A P : B G \times C D$, hoc est $A F : B Q = A P : B G = A P - A F : B G - B Q = F P : G Q = F O : O G$, ob similia tria $F O P$, $G O Q$.

(^u) * Agatur enim recta $F Q$, ipsi $A B$ occurrens in T , et jungatur $P T$, rectam $B G$, secans in g , erit $A F : B Q = A T : B T = A P : B g$, sed per Corol. 1. $A F : B Q =$

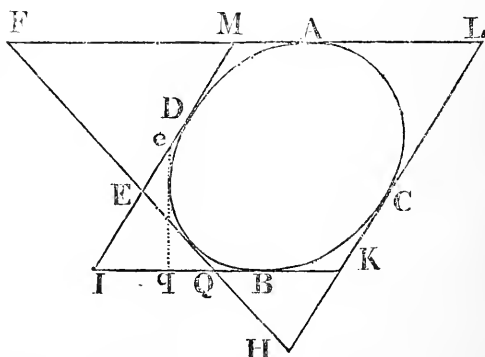


et Q ductæ, concurrent ad rectam A C B per centrum figuræ et puncta contactuum A, B transeuntem.

LEMMA XXV.

Si parallelogrammi latera quatuor infinite producta tangent sectionem quamcunque conicam, et abscondantur ad tangentem quamvis quintam; sumantur autem laterum quorumvis duorum conterminorum abscissæ terminatæ ad angulos oppositos parallelogrammi: dico quod abscissa alterutra sit ad latus illud a quo est abscissa, ut pars lateris alterius contermini inter punctum contactus et latus tertium est ad abscissarum alteram.

Tangent parallelogrammi M L I K latera quatuor M L, I K, K L, M I sectionem conicam in A, B, C, D, et secet tangens quinta F Q hæc latera in F, Q, H et E; sumantur autem laterum M I, K I abscissæ M E, K Q, vel laterum K L, M L abscissæ K H, M F: dico



quod sit M E ad M I ut B K ad K Q; et K H ad K L ut A M ad M F. Nam per corollarium primum lemmatis superioris est M E ad E I ut A M seu B K ad B Q, et componendo M E ad M I ut B K ad K Q. Q. e. d. Item K H ad H L ut (*) B K seu A M ad A F, et dividendo K H ad K L ut A M ad M F. Q. e. d.

Corol. 1. Hinc si datur parallelogrammum I K L M, circa datam sectionem conicam descriptum, dabitur rectangulum $K Q \times M E$, ut et huic æquale rectangulum $K H \times M F$. Æquantur enim rectangula illa ob similitudinem triangulorum K Q H, M F E.

Corol. 2. Et si sexta ducatur tangens e q tangentibus K I, M I occurrens in q et e; (†) rectangulum $K Q \times M E$ æquabitur rectangulo $K q \times M e$; eritque K Q ad M e ut K q ad M E, et divisim ut Q q ad E e.

A P: B G, est igitur B G = B g ac proinde punctum g, cum G coincidit.

(*) * Nam si puncta contactuum A, et B, rectâ jungantur, hæc transibit per centrum com-

mune sectionis conicæ et parallelogrammi, (356) adeoque erit A M = B K.

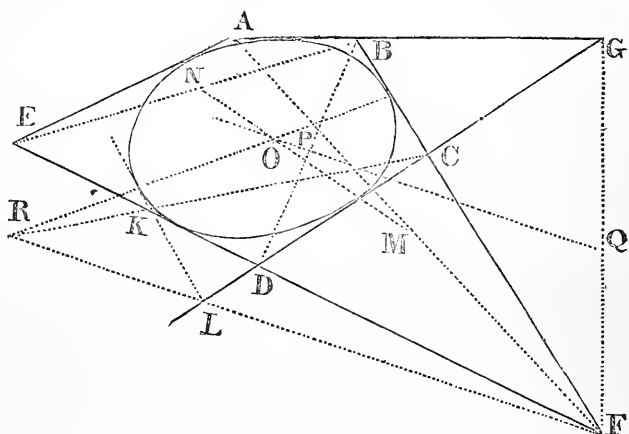
(†) * Nam rectangula $K Q \times M E$, $K q \times M e$ æquantur rectangulo M I \times B K.

Corol. 3. Unde etiam si $E q$, e Q jungantur et biscentur, et recta per puncta bisectionum agatur, transibit hæc per centrum sectionis conicæ. Nam cum sit $Q q$ ad $E e$ ut $K Q$ ad $M e$, transibit eadem recta per medium omnium $E q$, e Q , $M K$ ^(z) (per Lem. XXIII.) et medium rectæ $M K$ est centrum sectionis. ^(a)

PROPOSITIO XXVII. PROBLEMA XIX.

Trajectoriam describere, quæ rectas quinque positione datas continget.

Dentur positione tangentes ABG , BCF , GCD , FDE , $E A$. Figuræ quadrilateræ sub quatuor quibusvis contentæ $ABFE$ diagonales AF , BE biseca in M et N , et (per

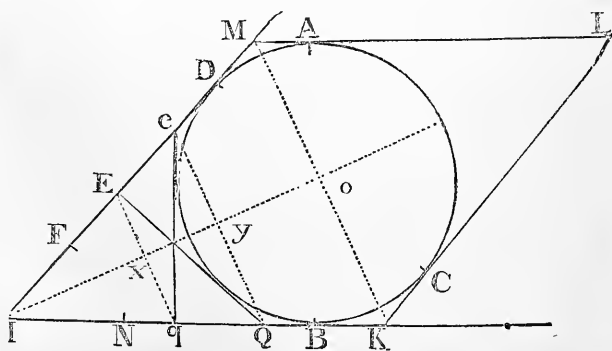


Corol. 3. Lem. XXV.) recta $M N$ per puncta bisectionum acta tran-

^(z) * In rectis $I M$, $I K$, positione datis capiatur $q N$, ad $E F$, ut est $q Q$, ad $E e$, et puncta N , F , tanquam data seu fixa considerentur, et erit $N q : F E = q Q : E e = Q K : e M$, et compositè, $N q : F E = N Q : F e = N K : F M$; quare si rectæ $E q$, e Q , $M K$, quibus puncta indeterminata E , et q , E , Q , M et K junguntur, secantur in ratione datâ in x , y , o , puncta omnia x , y , o , locantur in unâ eâdemque rectâ $x y$, (per Lem. XXIII.) Si itaque recta $x y$, lineas

$E q$, e Q , bisecat, rectam $M K$ bisecabit, adeoque (336) per centrum sectionis conicæ transibit.

⁽³⁾ Hinc si lineæ quatuor ut $E D$, e q , $E Q$, $Q B$ sectionem conicam tangent et sibi mutuò



occurrant in punctis e , E , q , Q junganturque puncta opposita e , Q et E , q , bifariamque divi-

sibit per centrum trajectoriæ. Rursus figuræ quadrilateræ $B G D F$ sub aliis quibusvis quatuor tangentibus contentæ, diagonales (ut ita dicam) $B D$, $G F$ biseca in P et Q : et recta $P Q$ per puncta bisectionum acta transibit per centrum trajectoriæ. Dabitur ergo centrum in concursu bisecantium. Sit illud O . ^(b) Tangenti cuivis $B C$ parallelam age $K L$, ad eam distantiam ut centrum O in medio inter parallelas locetur, et acta $K L$ tanget trajectoriam describendam. Secet hæc tangentes alias quasvis duas $G C D$, $F D E$ in L et K . Per harum tangentium non parallelarum $C L$, $F K$ cum parallelis $C F$, $K L$ concursus C et K , F et L age $C K$, $F L$ concurrentes in R , et recta $O R$ ducta et producta secabit tangentes parallelas $C F$, $K L$ in punctis contactuum. Patet hoc per Corol. 2. Lem. XXIV. Eâdem methodo invenire licet alia contactuum puncta, et tum demum per construct. Prob. XIV. trajectoriam describere. Q. e. f.

Scholium.

Problemata, ubi dantur trajectoriarum vel centra vel asymptoti, includuntur in præcedentibus. ^(c) Nam datis punctis et tangentibus unâ cum

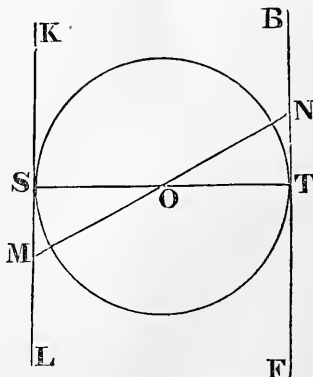
dantur lineæ $e Q$, $E q$, lineæ eas bisecans erit locus centri figuræ: Idque semper verum erit quamcumque figuram faciant lineæ $E D$, $e q$, $E Q$, $Q B$ sive sese decussent sive trapezium constituent, concipiatur illas diametros duci quarum vertex est in puncto contactûs harum linearum donec occurrant curvæ altero suo vertice, tangentes in eo vertice ductæ erunt parallelæ prioribus: Dabuntur ergo parallelæ duabus lineis $E D$, $Q B$, quæ erunt tangentes curvæ, ideoque fiet ut in Lemmatis hypothese parallelogrammum $MIKL$

constans quatuor tangentibus quarum oppositæ erunt inter se parallelæ, et tangentes $E Q$ et $e q$ considerari poterunt ut quinta et sexta tangens de quibus agitur in hoc Lemmate, ideoque per ejus Corollarium 3. si bisecentur lineæ $E q$, $e Q$ et recta per bisectionum puncta agatur, transibit hæc per centrum Sectionis Conicæ, &c.

^(b) 537. Datis sectionis conicæ centro O , et tangente quâvis $B F$, altera tangens $L K$ datæ parallela facile invenitur; Nam per centrum O ducatur recta quâvis infinita $M O N$ tangenti datæ occurrens in N , et sumptâ $O M = O N$ per M ducatur $M K$ tangenti datæ $F B$ parallela, erit $M K$ tangens; si enim per punctum contactûs T et centrum O agatur sectionis diameter $T O S$, erit $S O = O T$ et tangens in S tangenti in T parallela lineam $N O M$ ita secabit in M , ut sit $M O = O N$, ob, $S O : O T = M O : O N$.

^(c) 538. Hinc datis præter centrum tribus

tangentibus non parallelis vel duabus tangentibus convergentibus et puncto, vel tangente et punctis duobus, vel punctis tribus, dantur sex tangentes, vel tangentes quatuor et puncta duo, vel tangens et puncta quatuor, vel puncta sex,



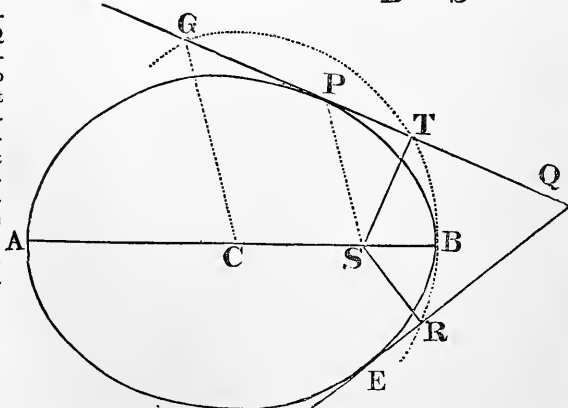
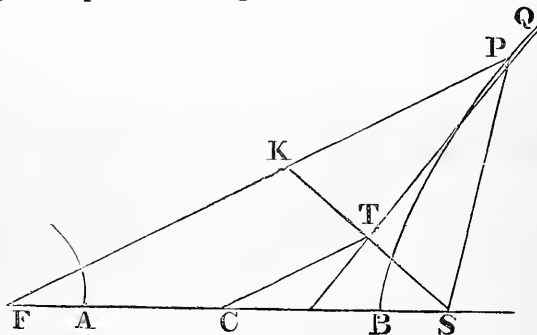
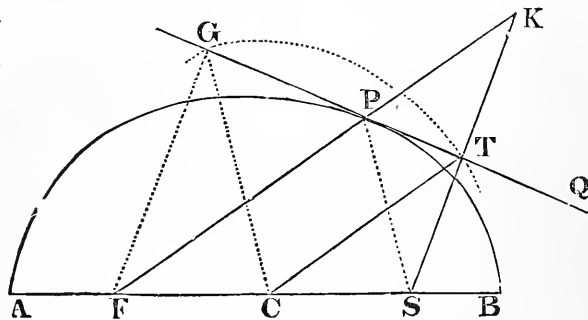
quibus datis trajectoria describi potest per Prop. (27. 26. 25. 24. 23. 22.). Ex datis centro, alterutro axe, et duabus tangentibus non parallelis, vel tangente et puncto trajectoriæ Ellipticæ et Hyperbolicæ ex Lemmatibus sequentibus facilè describuntur.

centro, dantur alia totidem puncta aliæque tangentes a centro ex alterâ parte æqualiter distantes. Asymptotos autem pro tangente habenda est, et ejus terminus infinitè distans (si ita loqui fas sit) pro puncto contactus. Concipe tangentis cujusvis punctum contactus abire in infinitum, et tangens vertetur in asymptoton, atque constructiones Problematum præcedentium vertentur in constructiones ubi asymptotos datur.

339. *Lemma.* Si ex sectionis conicæ umbilico utrovis S demittantur ad tangentem PQ normales ST, FG , rectæ CT, CG centrum sectionis C et puncta intersectionum T, G jungentes æquales erunt semiaxi principali CB , et parallelæ lineis FP, SP ex altero umbilico F et S ad punctum contactus P ductæ. Producantur enim FP, ST , donec concurrant in K , et erit (per Lem. XV. Newt.) $FK = 2CB$, $KT = TS$, cumque sit etiam $FC = CS$, erit $ST : SK = SC : SF$, et ideo quia latera SK, SF secantur proportionaliter in T et C erit CT parallela FK sive FP , ideoque erit $ST : SK = CT : FK$ et quia $ST = \frac{1}{2}SK$ erit CT æqualis $\frac{1}{2}FK$, seu æqualis CB . Eodem modo probabitur, CG esse æqualem CB et parallelam lineæ PS .

340. Datis centro C , duabus tangentibus PQ, EQ convergentibus et axe principali AB , describitur sectio conica. Nam si centro C et intervallo CB æqualis semiaxi principali describatur circulus tangentes secans in T et R , agantur tangentibus perpendiculares TS, RS , concurrentes in S , erit punctum S , alteruter umbilicus quo dato cum centro C , dantur positio axis principalis CB , et ipsius longitudo ac umbilici duo.

341. Datis centro C , tangente PQ , et puncto contactus P , cum axe principali, trajectoria conica describitur. Centro enim C , et intervallo æquali semiaxi principali describatur circulus tangentem secans in T et G ; in T excitetur perpendiculum TS , et junctâ CG , per punctum contactus ducatur PS ipsi CG parallel

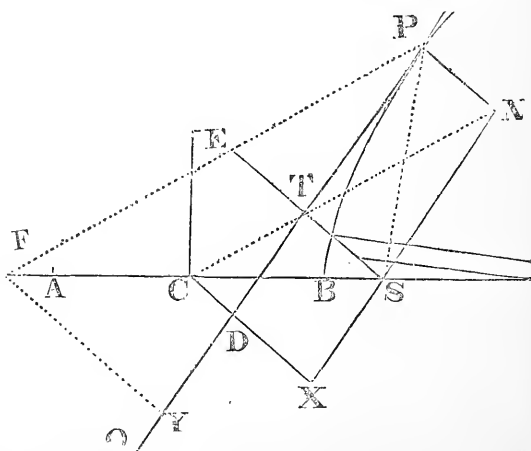
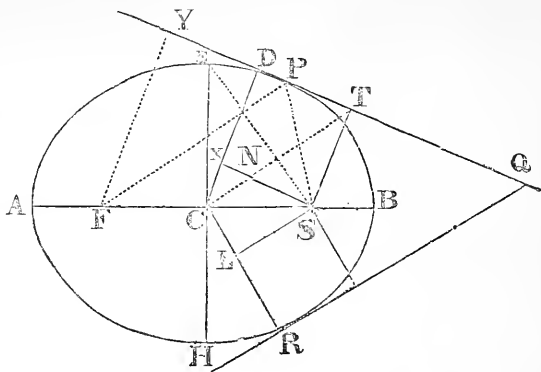


tum contactus ducatur PS ipsi CG parallel perpendiculo TS occurrens in S , erit S umbilicus (339).

542. Si ex centro C sectionis conicæ ad tangentem PQ , demittatur perpendicularis CD , et ex altero umbilico S ad CD agatur normalis SX , sitque CE semiaxis minùs principalis, erit in ellipsi $CX^2 = CD^2 - CE^2$, et in hyperbolâ $CX^2 = CD^2 + CE^2$, et demissâ ex umbilico in tangentem perpendiculari ST , junctâque CT , rectam SX secante in N , erit in utrâque sectione XN æqualis DP distantie puncti contactûs P a perpendiculari CD ; Nara in Ellipsi $CS^2 = CT^2 (CB^2) - CE^2$, in Hyperbolâ $CS^2 = CT^2 + CE^2$, et in utrâque sectione $CS^2 = CX^2 + SX^2 = CX^2 + DT^2$; Ergo in Ellipsi $CX^2 + DT^2 = CT^2 - CE^2 = CD^2 + DT^2 - CE^2$, et hinc $CX^2 = CD^2 - CE^2$, et in hyperbolâ $CX^2 + DT^2 = CT^2 + CE^2 = CD^2 + DT^2 + CE^2$, adeoque $CX^2 = CD^2 + CE^2$. Q. e. 1.

Ex altero umbilico F , in tangentem demittatur perpendicularis FY , et junctis FP , SP , similia erunt triangula FPY , $SP T$, ob angulos æquales (per natur. tangentium et focorum) FPY , SPT , et STP , FYP rectos; et quoniam FP et CT , FY et CD sunt parallelæ, similia quoque erunt triangula CTD , FPY . ideoque duo triangula CTD , SPT sunt similia; quare $CD : DT = ST (DX) : PT$, et divisim $CD : DT = CD - DX : DT - PT$, et compositè $CD : DT = CD + DX : DT + PT$. Undè quoniam in Ellipsi $CD - DX = CX$, et $DT - PT = DP$; in hyperbolâ verò $CD + DX = CX$, et $DT + PT = DP$, erit in utrâque sectione $CD : DT = CX : DP$. Verùm ob SX tangenti DT parallelam, $CD : DT = CX : XN$, ergo $XN = DP$. Q. e. 2.

343. Hinc datis centro C , semiaxe minùs principali CE , tangentibus duabus non parallelis, DQ , RQ , trajectory Elliptica et Hyperbolica describitur. Nam ex centro C , ad tangentes demittantur perpendiculara CD , CR , et capiantur CX , CL , ità ut $CX^2 = CD^2 - CE^2$, $CL^2 = CR^2 - CE^2$, si describenda sit ellipsis; vel ità ut $CX^2 = CD^2 + CE^2$, et $CL^2 = CR^2 + CE^2$, si de-



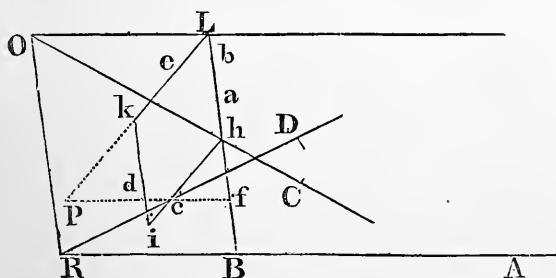
scribenda sit hyperbola; et per X et L puncta, erigantur ad CD , CR perpendiculara $X S$, $L S$ concurrentia in S , erit S focus ex quo si ad tangentem alterutram DQ , demittatur normalis $S T$, juncta CT , erit semiaxis principalis.

544. Datis centro C , semiaxe minùs principali CE , tangente PQ , et puncto contactûs P , sectio conica describitur. Nam ductâ $X S$, infinità ut suprâ (343.) capiatur $XN = DP$ et jungatur CN , producatûrque donec tangenti occurrat in T , recta $T S$, tangenti normalis secabit rectam $X S$ in umbilico S , eritque CT semiaxis principalis.

545. Dato centro cum tangente et alterutro axe datur positio rectæ per umbilicum transeuntis; undè si præterea detur punctum extrâ tangentem, facile erit umbilicum invenire. Eâdem ferè methodo quâ superiora Lemmata demonstravimus, Hermannus in Tom. IV. Academiæ Petropolitane solvit problema de Ellipsi Conicâ, cujus axis alteruter datus est, angulo positione et magnitudine dato ità inscribendâ ut

Conic. Apoll.) $IX \times IY$ sive $I Z^2 = P G^2$, sit enim ∞ punctum contactus hyperbolæ et asymptoti erit $\infty I^2 : \infty G^2 = IX \times IY : P G^2$ (per Cor. 2. Lem. III. de Conic. p. 90.) sed cum ∞I et ∞G sint lineæ infinitæ quantitate finitâ $G I$ differentes, pro æqualibus habentur, ergo etiam $IX \times IY$ sive $I Z^2 = P G^2$, atque adeo $I Z = P G$, et consequenter juncta $P Z$, parallela est asymptoto $G I$; recta $Z P$ producta secet rectam $I L$, in puncto aliquo S , et ob similia trianguia $S I Z$, $S L P$, erit $I Z^2 : L P^2 = I S^2 : L S^2$; verum (vid. Not. ad Probl. XVI. aut Lem. III. de Conic. p. 89.) $X I \times I Y$ ($I Z^2$) : $L P^2 = C I \times I D : C L \times L D$; ergo $I S^2 : L S^2 = C I \times I D : C L \times L D$, quare si recta $I L$ ita secetur in S , ut sit $I S^2 : L S^2 = C I \times I D : C L \times L D$, et agatur $S P$, asymptoto $G I$ parallela, erit P punctum contactus. Datâ autem tribus punctis C, P, D , hyperbola describitur (349).

$\begin{aligned}
& + \sqrt{hL \times ha : 2hi} = \sqrt{hL \times ha :} \\
& h.c. \text{ Nam (per Cor. 2. et 3. Lem. III. de Co-} \\
& \text{nic. p. 90.) est } dk^2 : kL = di^2 : ic^2 = \\
& hL \times ha : hc^2 \text{ inde est } dk : kL = di : ic \\
& = \sqrt{hL \times ha : hc}, \text{ et sumendo summam} \\
& \text{Antec. et Conseq. est } dk + di + \\
& \sqrt{hL \times ha : kL} + ic + hc \text{ sive } ik + \\
& \sqrt{hL \times ha : kL} + hi \text{ (2 hi) =} \\
& \sqrt{hL \times ha : hc} : \text{Invento autem puncta c} \\
& \text{invenitur punctum d, si quidem est } di : ic = \\
& \sqrt{hL \times ha : hc} : \text{Construitur autem hac} \\
& \text{solutio capiendo h f, æqualem mediæ propor-} \\
& \text{tionaliter inter Lh et a h, et productâ Lk ad P,} \\
& \text{ut sit k P = k L, agendo per f et P rectam f P,} \\
& \text{illa f P latera h i, i k secabit in punctis quæsitis} \\
& \text{c, d; nam ob parallelas c h, P L et i k, f L est} \\
& Lf (i k + \sqrt{ah \times hL}) : LP \text{ (2 k L sive} \\
& 2ih) = hf (\sqrt{ah \times hL}) : hc, \text{ et h c : h f}
\end{aligned}$



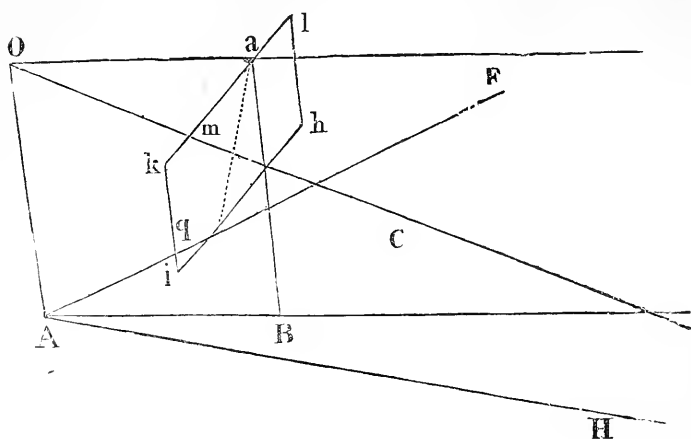
351. Datis asymptoto $O L$, duabus tangentibus $O C$, $R D$, et puncto A , hyperbolam describere; (solutio facilè deducitur ex Problemate XVII).

Per concursum O asymptoti OL cum tangente OC , et concursum R tangentis alterius RD cum recta RA quæ per punctum datum A et punctum contactus asymptoti transit, seu quæ est asymptoto parallela; age rectam infinitam OR , eaque adhibita pro radio ordinato primo, OL verò pro radio ordinato novo usurpatâ, sumptisque ordinatis novis asymptoto parallelis (ad majorem constructionis facilitatem), transmutetur figura per Lem. XXII. in figuram novam, nimirum linea BA in lineam Ba , (330), punctum A in a , linea RD in i k ipsi B L parallelam (329) OC in i h , OL in i l ipsi h parallelam (327) et punctum contactus asymptoti infinite distans transferetur in L ; Nam punctum contactus asymptoti est communis intersectio linearum RA , OL infinitarum, et ideo transferetur in L communem intersectionem rectarum k L , B L parallelogrammi h i k L ; Tria ergo latera h i , i k , k L tangent novam sectionem conicam quæ transire debet per punctum a , dicantur c et d puncta contactuum linearum h i , i k , sic invenitur punctum c , sumatur Radix quadrata facti h $L \times h$ a et addatur lineæ i k , illa summa erit ad duplum lineæ h i ut ea ipsa Radix quadrata ad portionem h c . Hoc est i k

(331), transferantur puncta C, d, in figuram primam, nimirum in C, D, et data erunt tria hyperbolæ puncta D, C, A, cum asymptoto O L, quare describetur hyperbola (349).

352. Datā asymptoto $O a$,
(*Vid. Fig. prim. pag. seq.*)
et tribus tangentibus $O C$,
 $A F$, $A H$ hyperbolam describere, solvitur ut Problema XVIII. Ab intersectione communi O asymptoti $O a$, et tangentis $O C$, ad intersectionem communem A aliarum tangentium $A F$, $A H$ agatur recta infinita $O A$, et eādem pro radio ordinato primo adhibita, $O a$ verò asymptoti parte pro radio ordinato novo sumptā, transmutetur figura in figuram novam, nimirum tangens $O C$ et asymptotus in parallelas $i h$, $k l$ punctum contactus asymptoti in a , et duæ tangentes $A F$, $A H$ in parallelas $i k$, $h l$, et parallelogrammi $h l k i$, latera singula novam sectionem conicam tangunt, et quidem latus $k l$, in a , per a , et parallelogrammi centrum m , agatur $a q$, tangenti, $i h$, occurrens in q , et erit q , punctum alterum quo $i h$, novam sectionem tangit. Per Lemmatis XXII. operationem inversam transferatur hoc punctum in figuram primam, nempe in C , et erit C , punctum contactus tangentis $O C$, quare datis asymptoto $O a$, duabus tangentibus $A F$, $A H$, et puncto C , describetur hyperbola. (351).

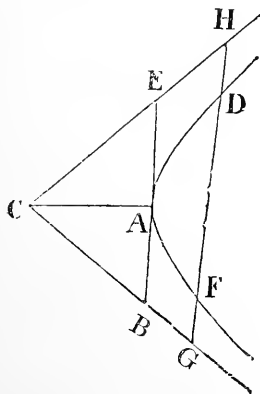
353. Datis asymptoto, axium ratione, duobus punctis vel puncto et tangente aut binis tangentibus, hyperbolam describere. Sunto hyperbolæ asymptoti $C E$, $C G$, centrum C , vertex principalis A , semiaxis, transversus $C A$, semiaxis conjugatus $A E$ ad $C A$, normalis; in triangulo rectangulo $C A E$ datâ ratione crurum $C A$, $A E$, datur angulus $E C A$, est enim $C A$, ad $A E$, ut sinus totus ad tangentem anguli $E C A$, quare datâ



specie hyperbolæ seu axium ratione datur asymptotorum angulus $E C B$, et viceversâ dato asymptotorum angulo datur specie hyperbola; his positis problema facile solvitur.

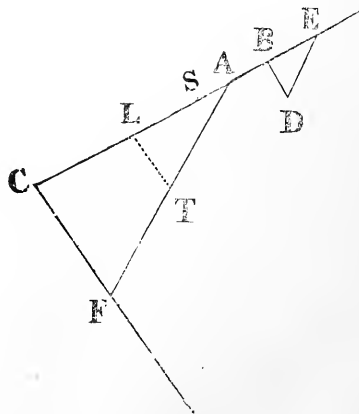
Cas. 1. Data sit asymptotus CH , cum axium ratione seu asymptotorum angulo et punctis duobus D, F , per puncta illa age rectam infinitam DE , asymptoto datæ occurrentem in H , fac $FG = HD$, et per punctum G , age rectam infinitam GC , quæ cum asymptoto CH , efficiat angulum $H C G$, æqualem angulo

per punctum D datum agantur recta BD , ad angulum DBE datum, seu æqualem asymptotorum angulo, et DE tangenti FA parallela, capiantur BS æqualis mediæ proportionali inter BE et AE , et AC æqualis $2 SE$, erit C hyperbolæ centrum, CF verò rectæ BD parallela asymptotus altera. Nam sit T punctum contactus, CF asymptotus altera, ductâ TL



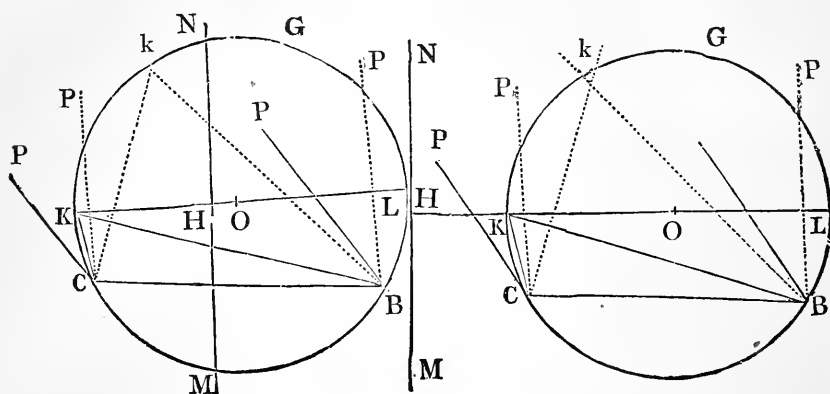
asymptotorum dato, erit CG , asymptotus altera (per Prop. 8^{am}, Lib. 2. Conic. Apoll. sive Lemma I. de Conic.) quare describetur hyperbola (546).

Cas. 2. Data sit asymptotus CE , cum asymptotorum angulo, puncto D , et tangente FA ;



asymptoto FC parallelâ, erit $FT = TA$ (per Prop. 3^{am}, Lib. 2. Conic. Apoll sup. Theor. I. de Hyp. p. 95.) ac proinde $LA = CL$: Est autem ex naturâ hyperbolæ inter asymptotos $CL \times LT$, hoc est $AL \times LT = CB \times BD$, adeoque $BD : LT = AL : CB$. ($2 AL + AB$) et ob triangula similia $ALT, EBD, BD : LT = BE : AL$; ergo $BE : AL = AL : 2 AL + AB$, sed (per

revolvantur circa polos suos B, C in figurâ illâ. Interea vero describant altera angulorum illorum crura C N, B N, concursu suo K vel k, circum



B G K C. Sit circuli hujus centrum O. Ab hoc centro ad regulam M N, ad quam altera illa crura C N, B N interea concurrebant, dum trajectorya describebatur, demitte normalem O H circulo occurrentem in K et L. Et ubi crura illa altera C K, B K concurrunt ad punctum illud K quod regulæ propius est, crura prima C P, B P parallela erunt axi majori, et perpendicularia minori; et contrarium eveniet, si crura eadem concurrunt ad punctum remotius L. Unde si detur trajectorye centrum, dabuntur axes. ^(d) Hisce autem datis, umbilici sunt in promptu.

^(e) Axium vero quadrata sunt ad invicem ut K H ad L H, et inde facile est trajectoryam ^(f) specie datam per data quatuor puncta describere. Nam si duo ex punctis datis constituentur poli C, B, tertium dabit angulos mobiles, P C K, P B K; his autem datis describi potest circulus B G K C. Tum ob datam specie trajectoryam, dabitur ratio O H ad O K, ideoque ipsa O H. Centro O et intervallo O H describe alium circulum, et recta, quæ tangit hunc circulum, et transit per concursum crurum C K, B K, ubi crura prima C P, B P concurrunt ad quantum

$\times L N$, ac proinde $G H : H I = G L^2 : G K^2$; unde $D I^2 : G P^2 = L I^2 \times G L^2 : G L^2 \times G K^2 = L I^2 : G K^2$, et $D I : G P = L I : G K$, atque adeo $L I : D I = G K : G P$; sed supra invenimus $G P + L P : G P = L I : D I$, ergo $G K : G P = G P + L P : G P$, atque ita $G K = G P + L P$, seu $G L + L K = G L + 2 L P$, ac proinde $L K = 2 L P$, et $L P = \frac{1}{2} L K$; invento autem puncto contactus P, si capiatur $P Q = P G$, et per punctum Q, agatur Q C, ipsi L H parallela, erit

Q C altera asymptotus, et hyperbola describetur (346).

^(d) * Vid. not. 314.

^(e) * Vid. not. 315.

^(f) Sit describenda trajectorya specie data per puncta quatuor C, B, P, Q, duo puncta C, B constituentur poli et junctis C P, B P erunt P C B, P B C anguli mobiles, fac ut angulorum illorum crura B P, C P sint sibi invicem parallela, nempe in positione quavis B p, C p, et crura alia B C, C B se mutuo intersectent in F; et centro O describe circulum per

datum punctum, erit regula illa $M N$ cujus ope trajectory describetur. (6)
Unde etiam vicissim trapezium specie datum (si casus quidam impossibiles
excipiantur) in datâ quâvis sectione conicâ inscribi potest.

Sunt et alia lemmata quorum ope trajectorye specie datae, datis punctis et tangentibus, describi possunt. ^(h) Ejus generis est quod, si recta

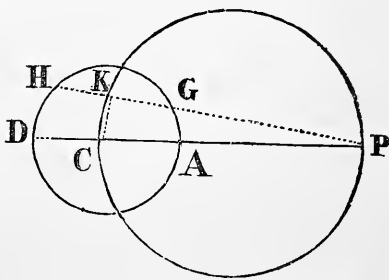
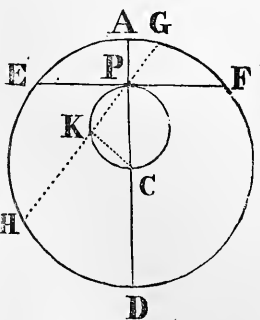
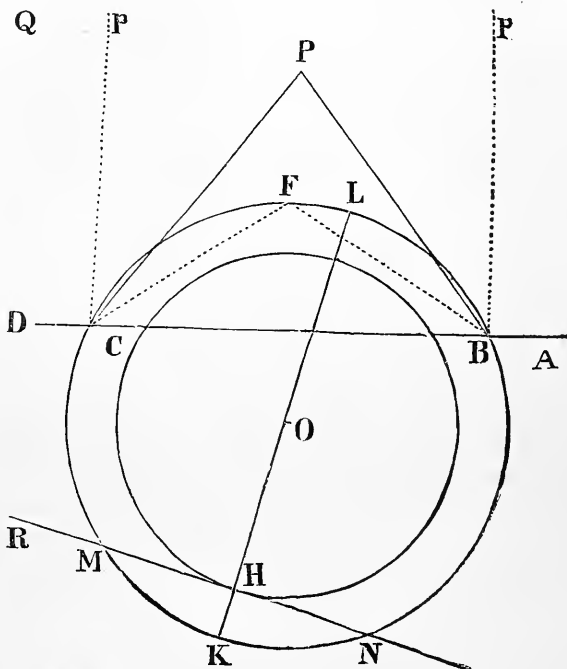
tria puncta C, F, B transeuntem cuiusque proinde segmentum C F B capit angulum C F B, centro O radio O H describitur circulus, (punctum verò H, ita determinetur in Diametro K L ut sit K H ad L H ut sunt ad invicem quadrata axium trajectorye). Tum crurum B P, C P concursus adducatur ad punctum Q et interea notetur punctum R ubi concurrunt alia crura C A, B D, et ex puncto R agatur recta R M N (tangens circulum radio O H descriptum, erit *NM regula cuius opae trajectorye describitur* (314)).

Si describenda foret parabola, ducenda esset ex puncto R recta R N, circulum C K B tangens; nam in parabolâ punctum H, coincidit cum puncto K (313).

Quoniam autem ex puncto R, duæ tangentes ut R N duci possunt, patet duas trajectorias specie datas per data quatuor puncta posse describi.

(^g) * Nam si describatur trapezium quodvis specie datum, et huic circumscribatur sectio conica datæ similis Methodo in notâ præcedente expositâ, deinde in sectione conicâ datâ quatuor agantur lineæ in eâ similiter positæ ac quatuor trapezii latera in sectione trapezio circumscriptâ, habebitur trapezium specie datum in datâ sectione conicâ inscriptum.

(^b) * Hoc Lemma facile demonstratur in circulo. Intra vel extra circulum A F D E datum sit punctum P per quod et per centrum circuli C agatur P D; tum diametro P C describatur circulus P K C P, chorda quaelibet



G H per punctum P ducta, bifariam divisa est in puncto K ubi circulo P K C occurrit ; Nam junctâ K C, erit angulus C. K P rectus ac proindè chorda H G bisecta in K.

* Idem Lemma pari facilitate in ceteris sectionibus conicis demonstratur. Datum sit punctum P , per hoc et per centrum C

linea per punctum quodvis positione datum ducatur, quæ datam conic sectionem in punctis duobus intersecet, et intersectionum intervallum biseccetur, punctum bisectionis tanget aliam conic sectionem ejusdem speciei cum priore, atque axes habentem prioris axibus parallelos. Sed propero ad magis utilia.

LEMMA XXVI.

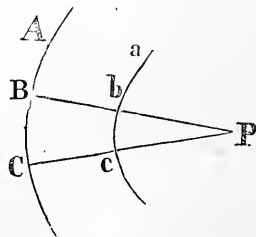
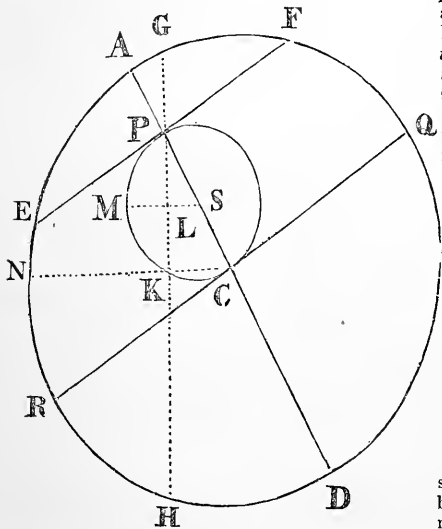
Trianguli specie et magnitudine dati tres angulos ad rectas totidem positione datas, quæ non sunt omnes parallelæ, singulos ad singulas ponere.

Dantur positione tres rectæ infinitæ AB , AC , BC , et oportet triangulum DEF ita locare, ut angulus ejus D lineam AB , angulus E lineam AC , et angulus F lineam BC tangat. Super DE , DF et EF , describe tria circulorum segmenta DRE , DGF , EMF , quæ capiant an-

sectionis conicæ $A F D E$ agatur diameter AD , tùm diametro PC , quæ similis sit diametro AD , describatur alia sectio conica $PMK C$, ejusdem speciei cum datâ, et diameter

in L et sectioni in M , erunt SM , NC diametri similes, et earum ordinatæ parallelæ, sed quia in triangulis similibus PSL , PCK est $PS = SC$ erit quoque $PL = LK$, ac proinde PLK erit ordinata ad diametrum SM , adeoque GKH erit ordinata ad diametrum NC ; quare $GK = KH$ *ergo punctum bisectionis K tanget curvam priori similem et axes habentem prioris axibus parallelos.* Eadem est demonstratio, si punctum P extra sectionem sumatur.

354. Adjungemus aliud Lemma maximè universale. Si ex puncto quovis P dato ducatur recta PB , curvæ cuilibet ABC occurrens in



conjugata ipsius PC , similis erit et parallela diametro RQ , conjugatæ ipsius AD , et quia in duabus figuris similibus, si duo latera homologa parallela sint, cætera omnia latera similia sunt etiam parallela, ambarum sectionum conicarum similes diametri omnes, adeoque et axes paralleli erunt; agatur nunc per punctum datum P , chorda quævis GPH , sectioni $PM C$ occurrens in K , dico esse $KH = KG$. Nam jungatur CK , et producatnr donec trajectory AHD occurrat in N , et per centrum S trajectory PKC , agatur SM parallela CK , chordæ PK occurrens

B , et recta illa PB ita dividatur in b , ut sit semper Pb ad PB in ratione datâ, punctum b , tanget curvam $a b c$ ejusdem speciei et ordinis cum curvâ ABC , atque lineas habentem similibus curvæ ABC lineis parallelas. Nam si fuerit ABC polygonum rectilineum cujus latus unum BC , cum sit (per hyp.) $Pb : PB = Pc : PC$, similia erunt triângula PBC , Pbc , et latera BC , bc , parallela et in datâ ratione PB , ad Pb , ac proinde totum polygonum ABC simile polygono abc , et eorum latera homologa parallela erunt. Laterum polygoni ABC numerus augeatur in infinitum et ipsorum longitudo in infinitum minuatur et duo polygona ABC , abc mutabuntur in curvas similes in quibus latera homologa sunt parallela.

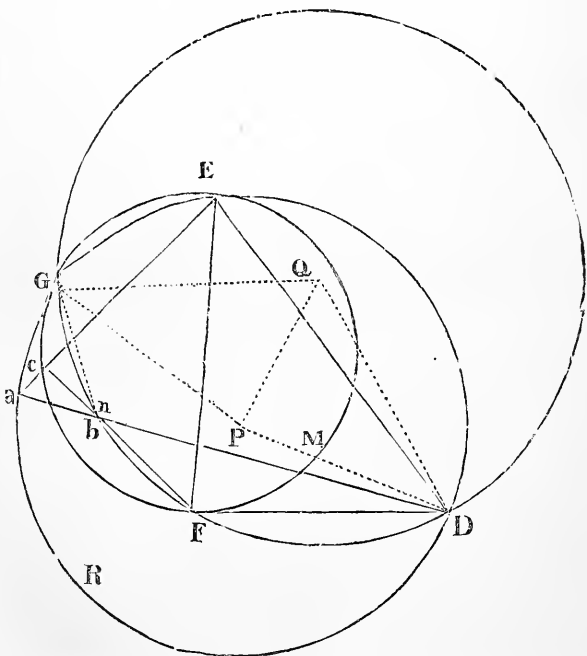
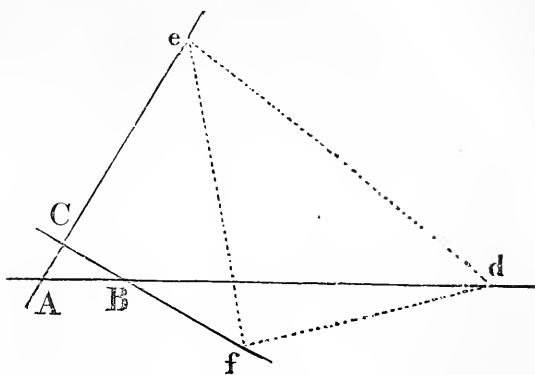
gulos angulis BAC,
 $A B C$, $A C B$
 æquales respec-
 tivè. Describan-
 tur autem hæc seg-
 menta ad eas par-
 tes linearum $D E$,
 $D F$, $E F$, ut
 literæ $D R E D$
 eodem ordine cum
 literis $B A C B$,
 literæ $D G F D$

eodem cum literis
 $A B C A$, et lite-
 ræ $E M F E$ eo-
 dem cum literis
 $A C B A$ in orbem
 redeant; deinde
 compleantur hæc
 segmenta in circulos
 integros. Secent
 circuli duo
 priores se mutuo
 in G , sintque cen-
 tra eorum P et Q .
 Junctis $G P$, $P Q$,
 cape $G a$ ad $A B$
 ut est $G P$ ad $P Q$,
 et centro G , inter-
 vallo $G a$ des-
 cribe circumum, qui

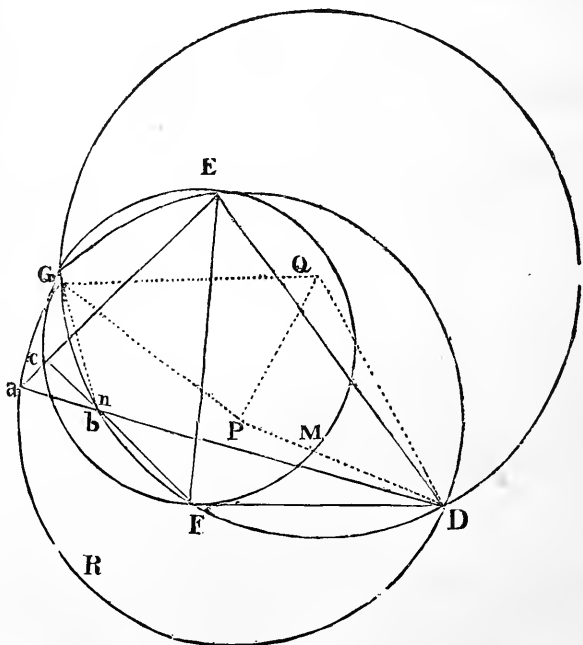
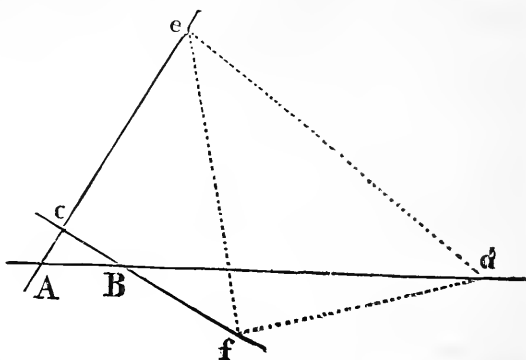
secet circumum primum $D G E$ in a . Jungatur tum $a D$ secans circumum
 secundum $D F G$ in b , tum $a E$ secans circumum tertium $E M F$ in c .
 Et jam licet figuram $A B C d e f$ constituere similem et æqualem figuræ
 $a b c D E F$. Quo facto perficitur problema.

Agatur enim $F c$ ipsi $a D$ occurrens in n , et jungantur $a G$, $b G$, $Q G$,
 $Q D$, $P D$. Ex constructione est angulus $E a D$ æqualis angulo $C A B$,
 et ⁽¹⁾ angulus $a c F$ æqualis angulo $A C B$, ideoque triangulum $a n c$ tri-

⁽¹⁾ * Angulus $a c F$ æqualis angulo $A C B$, anguli in segmento $E M F$ complementum ad
 nam angulus $F c E$ est anguli $a c F$ atque etiam duos rectos, quare angulus $a c F$, est æqualis



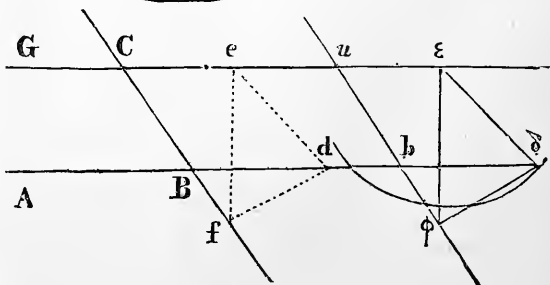
angulo $A B C$
 æquiangulum. Er-
 go angulus $a n c$
 seu $F n D$ angulo
 $A B C$, ideoque
 angulo $F b D$
 æqualis est; et
 propterea punc-
 tum n incidit in
 punctum b . Por-
 ro angulus $G P Q$,
 (*) qui dimidius est
 anguli ad centrum
 $G P D$, æqualis
 est angulo ad cir-
 cumferentiam $G a$
 D ; et angulus G
 $Q P$, qui dimidius
 est anguli ad cen-
 trum $G Q D$,
 æqualis est com-
 plemento ad duos
 rectos anguli ad
 circumferentiam G
 $b D$, ideoque æ-
 qualis angulo $G b$
 a ; suntque ideo
 triangula $G P Q$,
 $G a b$ similia; et
 $G a$ est ad $a b$ ut



angulo quem capit segmentum $E M F$, hic autem angulus æqualis est angulo $A C B$ (per constr.)

(*) * Angulus $G P Q$ dimidius est anguli ad centrum $G P D$, recta enim $P Q$, quæ circulorum $D R G D$, $D G F D$ centra jungit, perpendicularis est ad rectam $G D$, quæ puncta intersectionum circulorum jungeret adeoque angulum $G P D$ bisecat.

355. Si trium rectarum $G C$, $A B$, $C B$ positione datarum



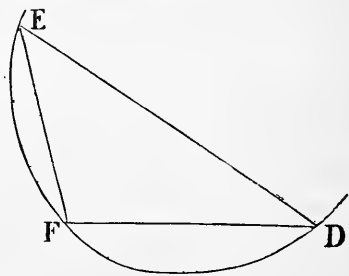
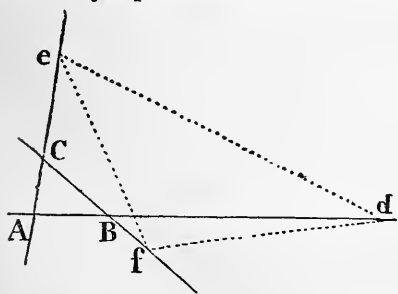
G P ad P Q; id est (ex constructione) ut G a ad A B. Æquantur itaque a b et A B; et propterea triangu-
la a b c, A B C, quæ modo similia
esse probavimus, sunt etiam æqualia. Unde cum tangant insuper trianguli
D E F anguli D, E, F trianguli a b c latera a b, a c, b c respectivè, com-
pleri potest figura A B C d e f figuræ a b c D E F similis et æqualis,
atque eam complendo solvetur problema. Q. e. f.

Corol. Hinc recta duci potest cujus partes longitudine datæ rectis tribus positione datis interjacebunt. Concipe triangulum D E F, puncto D ad latus E F accedente, et lateribus D E, D F in directum positis, mutari in lineam rectam, cujus pars data D E rectis positione datis A B, A C, et pars data D F rectis positione datis A B, A C, interponi debet; et applicando constructionem præcedentem ad hunc casum solvetur problema.

PROPOSITIO XXVIII. PROBLEMA XX.

Trajectoriam specie et magnitudine datam describere, cujus partes datæ rectis tribus positione datis interjacebunt.

Describenda sit trajectory, quæ sit similis et æqualis lineæ curvæ D E F, quæque a rectis tribus A B, A C, B C positione datis, in partes datis hujus partibus D E et E F similes et æquales secabitur.



Age rectas D E, E F, D F, et trianguli hujus D E F pone angulos D, E, F ad rectas illas positione datas (per Lem. XXVI.) ⁽¹⁾ dein circa

duæ G C, A B sint parallelæ et oporteat trian-
 gulum datum D E F ita locare ut angulus
 ejus D lineam A B, angulus
 E lineam G C, et angulus F
 lineam B C tangat, centro
 quovis ϵ in lineâ G C, ad ar-
 bitrium sumpto et radio ϵ d,
 aequali E D, describatur cir-
 culus rectæ A B, occurrans
 in δ ; super basi $\epsilon \delta$ construa-
 tur triangulum $\epsilon \delta \phi$ simile et
 æquale triangulo dato E D F,
 et ex angulo illius ϕ agatur
 $\phi \propto$ rectæ B C pa-



rallela secans $G C$ in κ , et $A B$ in b , et compleatur figura $C B f d e$ similis et æqualis figuræ $\kappa b \phi \delta \varepsilon$, patet factum. Si recta $E D$ minor sit parallelarum $G C, A B$ distantia, problema impossibile est; si major fuerit circulus radio $\varepsilon \delta$, descriptus, rectam $A B$ in duobus punctis secabit, et due erunt rectæ $\varepsilon \delta$ positiones.

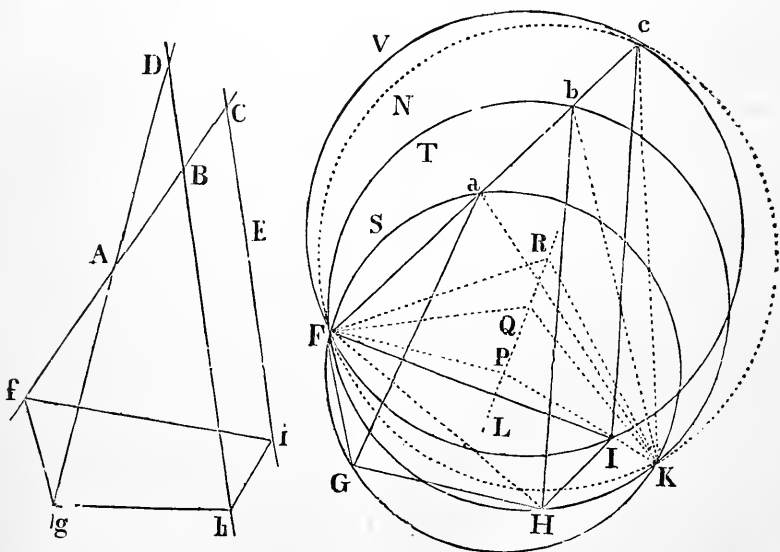
(1) * Si enim data sit curva D E F, triangulo dato E F D circumscripta, dabitur diametrorum et axium ejusdem curvæ positio ad trianguli E F D latera, et hinc habebitur positio diametrorum et axium curvæ similis et æqualis circà triangulum e f d describendæ.

triangulum describe trajectorym curvæ D E F similem et æqualem.
Q. e. f.

LEMMA XXVII.

Trapezium specie datum describere, cujus anguli ad rectas quatuor positione datas, quæ neque omnes parallelæ sunt, neque ad commune punctum convergunt, singuli ad singulas consistent.

Dentur positione rectæ quatuor A B C, A D, B D, C E; quarum prima secet secundam in A, tertiam in B, et quartam in C: et describendum sit trapezium f g h i, quod sit trapezio F G H I simile; et cujus angulus f, angulo dato F æqualis, tangat rectam A B C; cæterique anguli g, h, i,

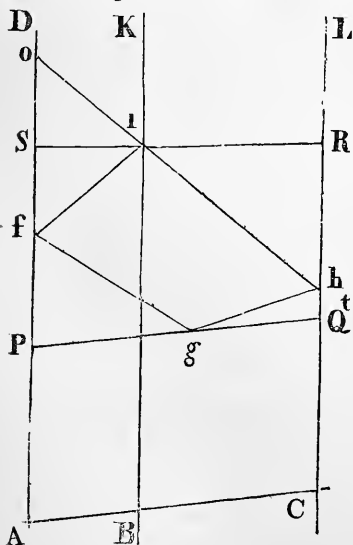


cæteris angulis datis G, H, I æquales, tangant cæteras lineas A D, B D, C E respectivè. Jungatur F H et super F G, F H, F I describantur totidem circularum segmenta F S G, F T H, F V I; quorum primum F S G capiat angulum æqualem angulo B A D, secundum F T H capiat angulum æqualem angulo C B D, ac tertium F V I capiat angulum æqualem angulo A C E. Describi autem debent segmenta ad eas partes linearum F G, F H, F I, ut literarum F S G F idem sit ordo circularis qui literarum B A D B, utque literæ F T H F eodem ordine cum literis C B D C, et literæ F V I F eodem cum literis A C E A

in orbem redeant. Compleantur segmenta in circulos integros; sitque P centrum circuli primi FSG , et Q centrum secundi FTH . Jungatur et utrinque producat PQ , et in eâ capiatur QR in eâ ratione ad PQ quam habet BC ad AB . Capiatur autem QR ad eas partes puncti Q ut litterarum P, Q, R idem sit ordo atque litterarum A, B, C : centroque R et intervallo RF describatur circulus quartus FNc secans circulum tertium FVI in c . Jungatur Fc secans circulum primum in a , et secundum in b . Agantur aG, bH, cI , et figuræ $abcfgh$ similis constitui potest figura $ABCfghi$. Quo facto erit trapezium $fghi$ illud ipsum, quod constituere oportebat.

Secent enim circuli duo primi FSG, FTH se mutuo in K . Jungantur PK, QK, RK, aK, bK, cK , et producat QP ad L . Anguli ad circumferentias FaK, FbK, FcK sunt semisses angulorum FPK, FQK, FRK ad centra, ideoque angulorum illorum dimidiis LPK, LQK, LRK æquales. ^(m) Est ergo figura

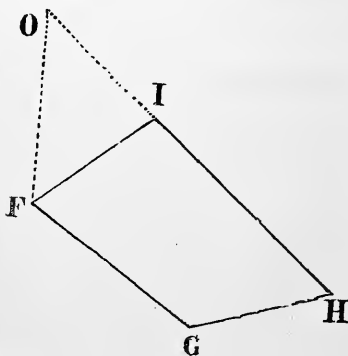
^(m) * Est enim angulus $Ka b = KPR$, angulus $Kba = KQP$, ac proindè triangulum aKb , simile triangulo PQK , et similiter patet triangulum bKc , esse simile triangulo QKR , adeoque totam figuram $abcfK$, similem esse figuræ $PQRK$.



* Si ex quatuor rectis positione datis duæ vel tres fuerint parallelæ manet eadem constructio. Potest tamen hæc alia adhiberi quæ etiam valet, ubi quatuor sunt parallelæ. Datæ sint tres parallelæ AD, BK, CL , quas quarta AC in A, B, C secat et oporteat describere trapezium simile trapezio $FHIG$ et ejus anguli angulis

F, I, H, G æquales, rectas AD, BK, CL, AC , tangent, per punctum quodvis i , rectæ BK agatur SiR , parallelis AD, BK, CL normalis, iisque occurrent in S , et R , producat HI , ad O , ut sit HI ad IO ut est Ri ad iS junganturque FO ; tum ex puncto i , agatur if , parallelam AD secans in f , ita ut sit angulus fIB seu iFD , æqualis angulo IFO , et super latere fi , simili FI construat trapezium $fihg$ simile trapezio $FHIG$, ac per angulum g agatur recta PQ ipsi AC parallela, et tandem super rectâ AC , construat figura similis figuræ $PQHifg$. Dico factum.

Demonstrandum est angulum h esse in parallelâ CL ; si punctum h , non est in lineâ CL producat ih donec rectæ CL occurrant in t , et producat ti , donec occurrat rectæ AD in o et erit $HI:IO = hi:io = Ri:iS$, ob figuras $oifh, OIFH$, (per constr.) similes; sed ob similia triangula $tIR, oIS, ti:io = Ri:iS$, ergo $hi:io = ti:io$, atque adeo $h = ti$; quare punctum t cum h , coincidit.



P Q R K figuræ a b c K æquiangula et similis, et propterea a b est ad b c ut P Q ad Q R, id est, ut A B ad B C. Angulis insuper F a G, F b H, F c I æquantur f A g, f B h, f C i per constructionem. Ergo figuræ a b c F G H I figura similis A B C f g h i compleri potest. Quo facto trapezium f g h i constituetur simile trapezio F G H I, et angulis suis f, g, h, i tanget rectas A B C, A D, B D, C E. Q. e. f.

Corol. Hinc recta duci potest cujus partes, rectis quatuor positione datis dato ordine interjectæ, datam habebunt proportionem ad invicem. Augeantur anguli F G H, G H I usque eo, ut rectæ, F G, G H, H I in directum jaceant, et in hoc casu construendo problema ducetur recta f g h i, cujus partes f g, g h, h i, rectis quatuor positione datis A B et A D, A D et B D, B D et C E interjectæ, erunt ad invicem ut lineæ F G, G H, H I, eundemque servabunt ordinem inter se. Idem verò sic fit expeditius.

Producantur A B ad K, et B D ad L, ut sit B K ad A B ut H I ad G H; et D L ad B D ut G I ad F G; et jungatur K L occurrens rectæ C E in i. Producat i L ad M, ut sit L M ad i L ut G H ad H I, et agatur tum M Q ipsi L B parallela, rectæque A D occurrens in g, tum g i secans A B, B D in f, h. Dico factum.

Secet enim M g rectam A B in Q, et A D rectam K L in S, et agatur A P quæ sit ipsi B D parallela et occurrat i L in P, et erunt g M ad L h (g i ad h i, ⁽ⁿ⁾ M i ad L i, G I ad H I, A K ad B K) et A P ad B L in eâdem ratione. Secetur D L in R ut sit D L ad R L in eâdem illâ ratione, et ob proportionales g S ad g M, A S ad A P, et D S ad D L; erit, ^(o) ex æquo, ut g S ad L h ita A S ad B L et D S ad R L; et mixtim, B L — R L ad L h — B L ut A S — D S ad g S — A S. Id est B R ad B h ut A D ad A g, ideoque ut B D ad g Q. Et vicissim B R ad B D ut B h ad g Q, seu f h ad f g. Sed ex constructione linea B L eâdem ratione secta fuit in D et R atque linea F I in G et H: ideoque est B R ad B D ut F H ad F G. Ergo f h est ad f g ut F H ad F G. Cum igitur sit etiam g i ad h i ut M i ad L i, id est, ut G I ad H I, patet lineas F I, f i in g et h, G et H similiter sectas esse. Q. e. f.

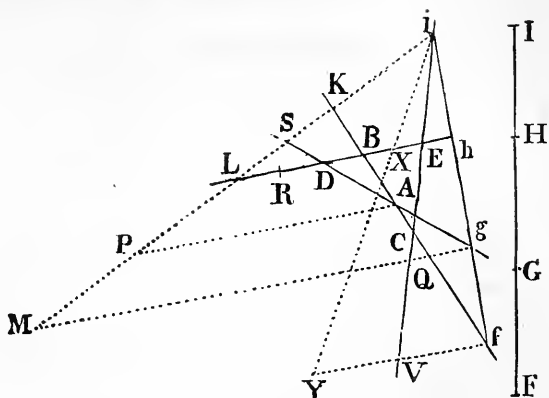
⁽ⁿ⁾ * Nam (per constr.) L M : i L = G H : H I = A B : B K, ac proindè componendo consequentes cum antecedentibus M i : L i = G I : H I = A K : B K = A P : B L ob parallelas.

^(o) * Quoniam enim

g M : L h = A P : B L = D L : R L
et g S : g M = A S : A P = D S : D L

patet esse g S : L h = A S : B L = D S : R L, et consequenter g S — A S : L h — B L = A S — D S : B L — R L = g S : L h; undè invertendo permutando et alternando B L — R L : L h — B L = A S — D S : g S — A S id est B R : B h = A D : A g = B D : g Q, ob similia triangula A D B A g Q.

In constructione corollarii hujus postquam ducitur LK secans CE in i , producere licet iE ad V , ut sit EV ad Ei ut FH ad HI , ^(p) et agere Vf parallelam ipsi BD . ^(q) Eodem recidit si centro i , intervallo IH , describatur circulus secans BD in X , et producat iX ad Y , ut sit iY æqualis IF , et a

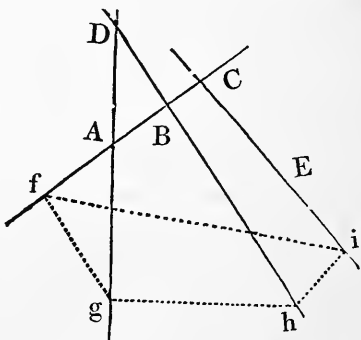
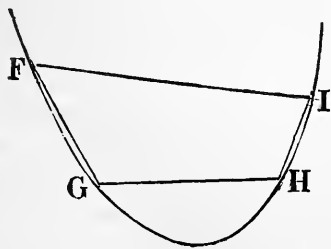


Problematis hujus solutiones alias Wrennus et Wallisius olim excogitarunt.

PROPOSITIO XXIX. PROBLEMA XXI.

Trajectoriam specie datam describere, quæ a rectis quatuor positione datis in partes secabitur, ordine, specie et proportionem datas.

Describenda sit trajectory, quæ similis sit lineæ curvæ F G H I, et
cujus partes, illius partibus F G, G H, H I similes et proportionales,



rectis A B et A D, A D et B D, B D et C E positione datis, prima primis, secunda secundis, tertia tertiis interjaceant. Actis rectis F G, G H, H I, F I describatur (per Lem. XXVII.) Trapezium f g h i, quod sit

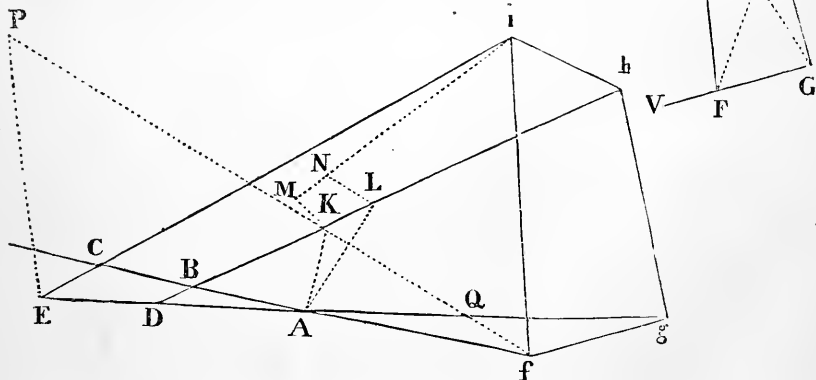
(P) * Si enim ex puncto f , per superiorem constructionem invento agatur fV parallela BD et lineæ iE productæ occurrans in V , erit ob similitudine triangula iEh , iVf , $E V : E i = f h : h i$, sed ex suprâ demonstratis $f h : h i = F H : H I$, ergo $E V : E i = F H : H I$.

(^q) * Nam si ex puncto f , ut suprà invento agatur $f Y$, ipsi $B D$, parallela et rectæ $i X$, productæ occurrens in Y , erit ob similia triangula $i X h$, $i Y f$, $i h : h f = i X : X Y = I H : H F$. Undè cum sit $i X = I H$ (ex hyp.) erit $X Y = H F$.

trapezio $F G H I$ simile, et cujus anguli f, g, h, i tangent rectas illas positione datas $A B, A D, B D, C E$, singuli singulas dicto ordine. Dein circa hoc trapezium describatur trajectorya curvæ lineæ $F G H I$ consimilis.

Scholium.

Construi etiam potest hoc problema ut sequitur. Junctis $F G, G H, H I, F I$ produc $G F$ ad V , jungeque $F H, I G$, et angulis $F G H, V F H$ fac angulos $C A K, D A L$ æquales. Concurrant $A K, A L$ cum recta $B D$ in K et L , et inde agantur $K M, L N$, quarum $K M$ constituat angulum $A K M$ æqualem angulo $G H I$, sitque ad $A K$ ut est $H I$ ad $G H$; et $L N$ constituat angulum $A L N$ æqualem angulo $F H I$, sitque ad $A L$ ut $H I$ ad $F H$. Ducantur autem $A K, K M, A L, L N$ ad eas partes linearum $A D, A K, A L$, ut literæ $C A K M C, A L K A, D A L N D$, eodem ordine cum literis $F G H I F$ in orbem redeant; et acta $M N$ occurrat rectæ $C E$ in i . Fac angulum $i E P$ æqualem angulo $I G F$, sitque $P E$ ad $E i$ ut $F G$ ad $G I$; et per P agatur $P Q f$, quæ cum rectâ $A D E$ contineat angulum $P Q E$ æqualem angulo $F I G$, rectæque $A B$ occurrat in f , et jungatur $f i$. Agantur autem $P E$ et $P Q$ ad eas partes linearum $C E, P E$, ut literarum $P E i P$ et $P E Q P$ idem sit ordo circularis qui literarum $F G H I F$; et si super lineâ $f i$ eodem quoque literarum ordine constituatur trapezium $f g h i$



trapezio $F G H I$ simile, et circumscribatur trajectorya specie data, solve-
tur problema. (^r)

(^r) Hæc nova constructio hoc præmisso Lemmate demonstratur

Lemma. Si ex puncto A extrâ triangulum $F G H$ dato agatur ad angulum F recta $A F$,

Hactenus de orbibus inveniendis. Superest ut motus corporum in orbibus inventis determinemus.

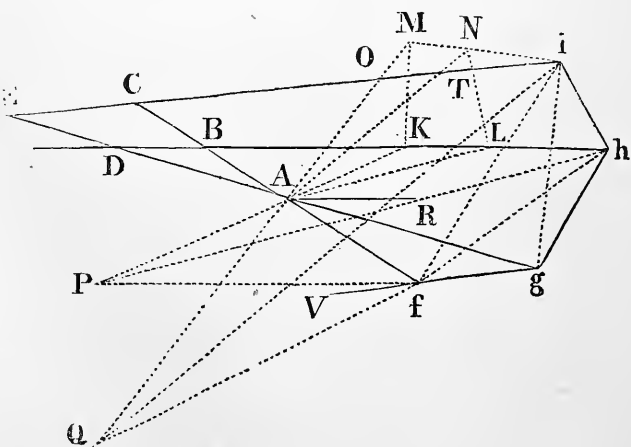
et ad angulum G recta AG , secans latus oppositum HF in O , et super rectam AF , construatut triangulum FAP , simile triangulo

enim $DAL = DAB + BAK + KAL = fAg + PAf + hPA$; sed (per constr.) $PAf = fg h$, et $fPA = fhg$; cumque sit triangulum fPh , simile triangulo fAg , (356.) angulus $fPh = fAg$, adeoque $hPA + fAg = hPA + fPh = fPA = fhg$; quare $DAL = fg h + fhg = Vfh$ (per 32. 1. Elem.) Et similiter ostenditur angulum DAT , esse æqualem angulo Vfi , ob triangula fAQ , fQi , triangulis fgi , fAi , g , similia. Agantur rectæ KM , LN , quæ cum rectis AK , AL constituent angulos AKM , ALN angulis ghi , fhi æquales, rectisque AO , AT productis occurrant in M et N , et triangula AKM , ALN similia erunt triangulis ghi , fhi , (unde juxta constructionem New-

FGH , jungaturque PH secans AG in X , et AF in Y , similia erunt triangula PHF , AGF , et anguli HXG , HFG æquales; quoniam enim anguli AFP , HFG sunt æquales (per hyp.) æquales quoque erunt anguli PFH , AFG ; et quoniam duo triangula PFA , HFG , similia sunt (per hyp.) erit $PF : AF = HF : FG$, adeoque triangula AFG , PFH , quorum latera proportionalia æqualem angulum continent sunt similia, et hinc anguli HPE , GAF æquantur; cumque anguli oppositi PYF , AYX , sint etiam æquales, liquet angulum AXY sive HXG , æqualem esse angulo $AFP = HFG$. Q. e. d.

toni erit $KM : AK = hi : hg$, et $LN : AL = hi : hf$. Etenim angulus $MAK = PAQ = PAF - QAF = fgh - fgi = igh$, (per constr.) quare cum sit quoque (per constr.) angulus $AKM = ghi$, triangula AKM , ghi sunt similia, angulus verò $NAL = DAL - DAT = Vfh - Vfi$ (per Dem.) sed $Vfh - Vfi = ifh$, ergo triangula ifh , NAL similia sunt. jungatur MN , demonstrandum est hanc lineam productam transire per angulum i , quo trapezium tangit lineam ECi , ex puncto A , ad rectam Ph , agatur AR rectæ Bh , parallela, ob similia triangula $fg h$, fAP erit $fg : hg = Af : PA$

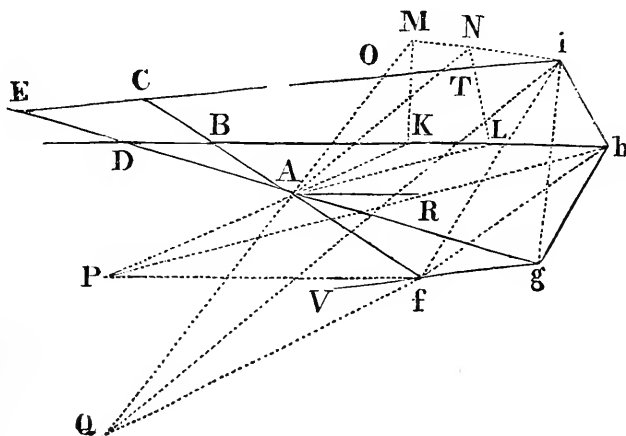
557. Hoc itaque, posito, demonstratur Newtoniana constructio. Trapezii $fg hi$, anguli quatuor tangent rectas Ci , Bh , Ag , Af . Super rectâ Af , construantur triangula fAP , fAQ , triangulis $fg h$, $fg i$, similia; jungantur Ph , Qi , et latera PA , QA , producantur, ut rectis Bh , Ci , occurrant in K , et O ; erunt anguli BAK , BAO , æquales angulis datis $fg h$, $fg i$; agantur AL , AT , rectis Ph , Qi parallelæ, et productio latere gf , ad V , erit angulus DAL , æqualis angulo Vfh ; angulus



ob sim. tri. $f g i, f A Q \dots g i : f g = Q A : A f$
 ob sim. tri. $g h i, A K M \dots h g : g i = A K : A M$
 ob sim. tri. $A K L, P A R \dots A K : A L = P A : P R$
 ob sim. tri. $f Q i, f P h \dots f h : f i = P h : Q i$;
 sed ob sim. tri. $f h i, A L N$,
 $f h : f i = A L : A N$.
 ergo $A L : A N = P h : Q i$
 et $A L : A N = P h - A L : Q i - A N$
 et quia $A L = R h$ est $A L : A N = P R : Q i - A N$

$Q i$ seu $Q i - A N + A N$. Quoniam igitur
 rectæ $A N, Q i$, sunt parallelæ (per constr.)
 patet puncta M, N, i , esse in unâ rectâ, atque
 hæc est prima pars constructionis Newtonianæ
 quæ erat demonstranda.

2^a. Illius pars facillè ostenditur. Nam (vid.
 fig. Newt.) junctâ $P i$, erit (per constr.) triangulum
 $P i E$, super rectâ $E i$ constructum simile
 triangulo $f i g$, ad cujus angulos i et g , ductæ



undè per compositionem rationum et ex æquo,
 $A K : A N = Q A \times A K : A M \times$
 $(Q i - A N)$ quare $A K \times A M : A N \times$
 $A M = Q A \times A K : A M \times Q i - A N$,
 ac proindè $A M : A N = Q A : Q i - A N$,
 adeoque $A M : A N = Q M$ seu $Q A + A M$:

sunt ex puncto E , rectæ $E i, E g$; quare
 (356), si per punctum P agatur recta $P Q$, quæ
 cum rectâ $E g$, contineat angulum $P Q E$ æqua-
 lem angulo $f i g$, recta illa $P Q$, producta tanget
 angulum f , trianguli $f i g$, seu trapezii $f g h i$.
 Q. e. d.

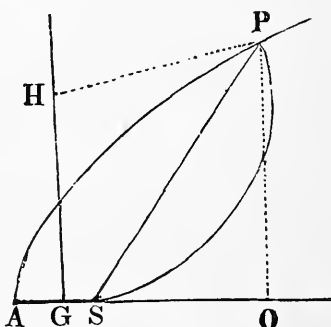
SECTIO VI.

De inventione motuum in orbibus datis.

PROPOSITIO XXX. PROBLEMA XXII.

Corporis in datâ trajectoryâ parabolicâ moti invenire locum ad tempus assignatum. (s)

(t) Sit S umbilicus et A vertex principalis parabolæ, sitque $4 AS \times M$ æquale areæ parabolicæ abscindendæ APS, quæ radio SP, vel post excessum corporis de vertice descripta fuit, vel ante appulsum ejus ad verticem describenda est. Innotescit quantitas areæ illius abscindendæ ex tempore ipsi proportionali. Biseca AS in G, erigeque perpendiculum GH æquale $3M$, et circulus centro H, intervallo



HS descriptus secabit parabolam in loco quæsito P. Nam, demissâ ad axem perpendiculari PO et ductâ PH, (u) est $AGq + GHq (= (s) HPq = AO - AG : quad. + PO - GH : quad.) = AOq + POq - 2GAO - 2GH \times PO + AGq + GHq.$ (v) Unde $2GH \times PO (= AOq + POq - 2GAO) = AOq + \frac{3}{4}POq.$ Pro AOq scribe $AO \times \frac{POq}{4AS}$; et applicatis terminis omnibus ad $3PO$ ductisque in $2AS$, fiet $\frac{2}{3}GH \times AS (= \frac{1}{6}AO \times PO + \frac{1}{2}AS \times PO = \frac{AO + 3AS}{6} \times PO = \frac{4AO - 3SO}{6} \times PO =$ areæ $APO - SPO) =$ areæ APS. Sed GH erat $3M$, et inde $\frac{4}{3}GH$

(s) 338. Newtonus in hac totâ sectione supponit corpus in trajectoryâ conicâ datâ itâ moveri, ut radii ad trajectoryâ umbilicum ductis areas seu sectores describat temporibus proportionales; eâ enim lege planetas omnes in orbitis conicis revolvi ex phenomenis lib. 3^o ostendit. Præterea supponit notum esse tempus quo corpus ex puncto trajectoryâ dato v. g. ex vertice illius principali ad aliud ejusdem trajectoryâ punctum datum pervenit, datamque esse aream seu trajectoryâ sectorem huic tempori correspondentem, atque ex his datis quærit locum mobilis in trajectoryâ ad aliud quodvis tempus datum, aut contrâ quærit tempus quo mobile datum quodvis trajectoryâ punctum attingit; nam cum sint areæ temporibus proportionales, dato tempore quovis, datur area hoc tempore descripta, et vicissim datâ areâ descriptâ datur tempus quo describitur.

(t) * Sit S umbilicus, et A, vertex principalis parabolæ, datumque sit tempus quo corpus in parabolâ motum, ut modò exposuimus (358.) ex vertice A ad punctum P, aut ex puncto P ad verticem A pervenit, seu datum sit tempus quo sector quilibet APS describitur.

(u) * Est $AG^2 + GH^2 = HP^2$; nam $AG = GS$, $HP = HS = HA$, et angulus G rectus (per constr.) quare $HA^2 = HP^2 = AG^2 + GH^2.$

(v) * $HP^2 = (AO - AG)^2 + (PO - GH)^2.$ Nam ex puncto H, ad rectam PO demissa intelligatur perpendicularis, hæc erit æqualis ipsi GO $= AO - AG$, et pars rectæ PO inter perpendicularem et punctum P intercepta æqualis erit PO - GH.

(v) * Undè sublati utrinque quadratis AG^2

$\times A S$ est $4 A S \times M$. Ergo area abscissa $A P S$ æqualis est abscindendæ $4 A S \times M$. Q. e. d.

Corol. 1. Hinc $G H$ est ad $A S$, ut tempus quo corpus descripsit arcum $A P$ ad tempus quo corpus descripsit arcum inter verticem A et ^(a) perpendicularum ad axem ab umbilico S erectum.

Corol. 2. ^(b) Et circulo $A S P$ per corpus motum P perpetuo transe-

$+ G H^2$, et addito utrinque rectangulo $2 G H \times P O$, est $2 G H \times P O = A O^2 = P O^2 - 2 G A O$; quoniam autem in parabolâ latus rectum $= 4 A S = 8 A G$, est $8 A G \times A O$ sive $8 G A O = P O^2$, et $2 G A O = \frac{1}{4} P O^2$, et $P O^2 - 2 G A O = \frac{3}{4} P O^2$. Cum verò sit $4 A S \times A O = P O^2$, adeoque $4 A S \times A O^2 = A O \times P O^2$, et $A O^2 = \frac{A O \times P O^2}{4 A S}$, erit igitur $2 G H \times P O = \frac{A O \times P O^2}{4 A S} - \frac{3}{4} P O^2$, et dividendo utrin-

que per $3 P O$, fiet $\frac{2}{3} G H = \frac{A O \times P O}{12 A S}$

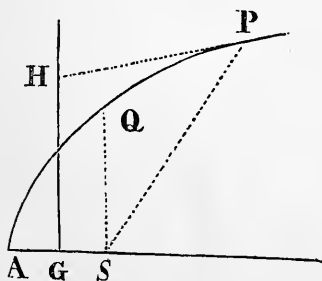
$+ \frac{1}{4} P O$, ductisque omnibus terminis in $2 A S$, fiet $\frac{2}{3} G H \times A S = \frac{1}{6} A O \times P O + \frac{1}{2} A S \times P O = \frac{A O + 3 A S}{6} \times P O =$

$\frac{4 A O - 3 S O}{6} \times P O$ ob $A S = A O - S O$ unde est $3 A S = 3 A O - 3 S O$. Ver-

rùm $\frac{4 A O \times P O}{6}$ seu $\frac{2}{3} A O \times P O$, est area parabolica $A P O A$, (Archimed. Prop. 17. quadr. Parab. sup. Theor. IV. de Parab. pag. 133.) et $\frac{3 S O \times P O}{6}$ seu $\frac{1}{2} S O \times$

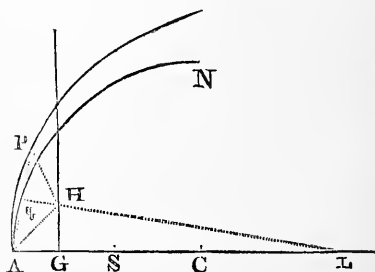
$P O$, est area trianguli $P S O$, ergò area sectoris parabolici $A P S$, æqualis est $\frac{4 A O - 3 S O}{6} \times P O$, quare $\frac{2}{3} G H \times A S = \text{area } A P S$;

sed $G H = 3 M$, (per constr.) &c.



^(a) * Sit perpendicularum illud $S Q$, erit area $A S P$, ad aream $A S Q$, ut $\frac{2}{3} G H \times A S$, ad $\frac{2}{3} A S \times S Q$ (Theor. IV. de Par. p. 133.); sed

ex naturâ parabolæ (Vid. Cor. 2. Theor. I. de Par. p. 131.) $S Q$ æqualis dimidio lateri recto $= 2 A S$, ergò area $A S P$ est ad aream $A S Q$, seu tempus per $A P$ ad tempus per $A Q$, ut $\frac{2}{3} G H \times A S$ ad $\frac{2}{3} A S^2$, hoc est, ut $G H$ ad $A S$. Dato igitur tempore quo describitur arcus $A Q$, et tempore quo describitur $A P$, per simplicem proportionem invenitur $H G$, et inde punctum P habetur.



^(b) * Jungatur $A P$, et ad medium ejus punctum q , erigatur perpendicularum $q L$, axem secans in L , et quoniam (ex Dem.) est semper $H P = H A$, ideoque est $A P$ chorda circuli cujus centrum est H . Itaque (per 1. 3^{ia}. Elem.) perpendicularum illud $q L$, rectæ $G H$, occurrit in H ; et ob similitudinem triangulorum $L G H$, $L q A$, est $G H : q A$ seu $\frac{1}{2} A P = L G : L q$. Sumatur $A C = 2 A S$ dimidio nempe lateris recti parabolæ et centro C , et intervallo $C A$, describatur circulus ΔN , hic parabolam osculatur in A (241); coëuntibus verò punctis P et A , H et G , coëunt etiam L et C , fitque $L q = L A = C A = 2 A S = 4 G S$, et $L G = C G = 3 G S$, atque arcus $A P$ æqualis chordæ $A P$, (Lem. VII.); undè cum in proportionem superiori sit $G H : \frac{1}{2} A P = L G : L q$ erit in hoc casu $G H : \frac{1}{2} A P = 3 G S : 4 G S$ hoc est, $G H : A P = 3 : 8$. Verùm ob motum æquabilem et æquidistantem per nascentes $A P$, $G H$, velocitas puncti H in G , est ad velocitatem corporis P in A ut $G H$ ad $A P$, et quoniam (ex Dem.) est semper $\frac{4}{3} A S \times G H$ æqualis areæ $A P S$, et $\frac{2}{3} A S$, est quantitas constans, erit semper $G H$, ut area $A P S$, hoc est, ut tempus quo punctum H , percurrit $G H$,

unte, velocitas puncti H est ad velocitatem quam corpus habuit in vertice A ut 3 ad 8; ideoque in eâ etiam ratione est linea GH ad lineam rectam quam corpus tempore motus sui ab A ad P, eâ cum velocitate quam habuit in vertice A, describere posset.

Corol. 3. Hinc etiam vice versâ inveniri potest tempus quo corpus descripsit arcum quemvis assignatum A P. Junge A P et ad medium ejus punctum erige perpendicularum rectæ GH occurrens in H.

LEMMA XXVIII.

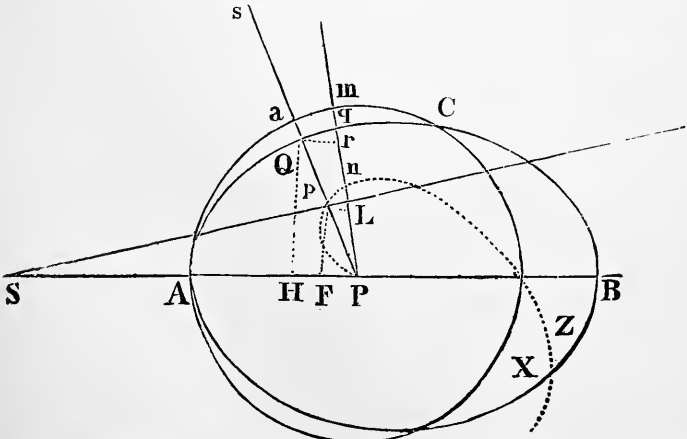
Nulla extat figura ovalis cujus area, rectis pro lubitu abscissa, possit per æquationes numero terminorum ac dimensionum finitas generaliter inveniri.

(^e) Intra ovalem detur punctum quodvis, circa quod ceu polum revolvatur perpetuo linea recta, uniformi cum motu, et interea in recta illa exeat punctum mobile de polo, pergatque semper eâ cum velocitate, quæ sit ut rectæ illius intra ovalem quadratum. Hoc motu punctum illud describet spiralem gyris infinitis. Jam si areæ ovalis a rectâ illâ abscissæ portio per finitam æquationem inveniri potest, invenietur etiam per eandem æquationem distantia puncti a polo, (^d) quæ huic areæ proportiona-

estque proindè motus illius æquabilis et velocitas ubique eadem. Quare velocitas puncti H, est ubique ad velocitatem quam habet corpus P in A, ut nascens GH, ad nascentem AP, hoc est, ut 3. ad 8. Q. e. d.

(^c) 359. Intra ovalem ACBA detur punctum quodvis P, circâ quod ceu polum revolvatur perpetuo linea recta infinita PS, uniformi cum motu, itâ ut punctum datum A illius linæ circuli AaM arcus æquales æqualibus tempo-

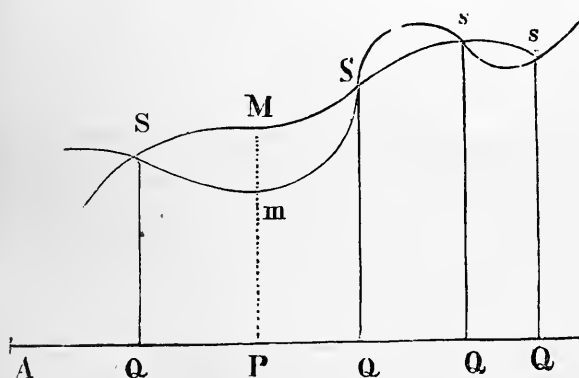
ribus describat, et intereâ in rectâ illâ PS, exeat punctum mobile p de polo P, pergatque semper in eâdem rectâ Ps cum velocitate quæ sit ut rectæ illius intra ovalem quadratum, hoc est, cum linea PS pervenit ad situm Ps, et punctum mobile p ad P, velocitas puncti p sit ut quadratum rectæ PQ inter polum P et ovalem AQCB contentæ, hoc motu punctum illud p, describet spiralem PpnZ, gyris infinitis.



(^d) 360. His suppositis erit semper recta Pp ut area PAQp; nam circulus AaM X divisus intelligatur in arcus innumeros æquales ut

a m, et ductis radiis PQ, Pq spirali, circulo et ovali occurrentibus in p et n, a et m, Q et q, demissa capiantur ex punctis Q et p, ad Pq,

intersectio aliqua duarum linearum invenitur, exhibet earum intersectiones omnes radicibus totidem, ideoque ascendit ad tot dimensiones quot sunt intersectiones. Quoniam circuli duo se mutuo secant in punctis duobus, intersectio una non invenietur nisi per æquationem duarum dimensionum, quâ intersectio altera etiam inveniat. ^(f) Quoniam duarum sectionum conicarum quatuor esse possunt intersectiones, non potest aliqua earum generaliter inveniri nisi per æquationem quatuor dimensionum, quâ omnes simul inveniantur. Nam si intersectiones illæ seorsim quærantur, quoniam eadem est omnium lex et conditio, idem erit calculus in casu unoquoque, et propterea eadem semper conclusio, quæ igitur debet omnes intersectiones simul complecti et indifferenter exhibere. Unde etiam intersectiones sectionum conicarum et curvarum tertiæ potestatis, eo quod sex esse possunt, simul prodeunt per æquationes sex dimensionum, et intersectiones duarum curvarum tertiæ potestatis; quia novem esse possunt, simul prodeunt per æquationes dimensionum novem. ^(g) Id nisi necessario



^(f) * Exempli causâ.

Sint $a p + p x = y y$,
et $b x - x x = y y$, æquationes ad parabolam
et circulum, et invenietur $x = \frac{y y - a p}{p}$,

$$\text{et } \frac{b y y - b a p}{y^4 - 2 a p y + a a p} = \frac{p}{p^2}$$

$= y y$, æquatio quatuor dimensionum, quoniam quatuor esse possunt parabolæ et circuli intersectiones. Sint $a p^2 + p^2 x = y^3$, et $b x - x x = y^2$ æquationes ad parabolam 3^{te}, potestatis et ad circulum, erit $x = \frac{y^3 - a p^2}{p^2}$

$$\text{et } \frac{b y^3 - b a p^2}{p^2} = \frac{y^6 - 2 a p^2 y^3 + a^2 p^4}{p^2}$$

$= y y$ æquatio sex dimensionum quod esse possint intersectiones sex, et itâ de cæteris. Generatim verò tot esse possunt curvarum duarum intersectiones quot sunt unitates in facto ex potestatis curvæ unius indice seu exponente in alterius exponentem; index autem potestatis curvæ idem est cum numero dimensionum æquationis ad illam curvam.

^(g) * Nam in solidorum problematum constructione duæ adhibentur sectiones conicæ quarum intersectiones, seu ordinatæ duabus coni sectionibus communes, problematis solutionem seu ultimæ æquationis radices suppeditant.

tionibus eliminetur littera quæ abscissam communem exprimit, obtinebitur æquatio ex solâ y , et constantibus composita. Porro hæc ultima æquatio non magis primam ordinatam communem $S Q$, seu primam intersectionem S , quam secundam aut tertiam, &c. determinabit, cum sit eadem omnium lex et conditio idemque calculus; hæc igitur æquatio debet omnes communes ordinatæ seu intersectiones, æquatio autem tot dimensiones habet quot radices; Si itaque linearum $S M s$, $S m s$, intersectiones S , s , sunt numero finitæ, æquatio quoque quæ illas determinat finita est; at si fuerint intersectiones numero infinitæ, erit æquatio numero dimensionum et radicum infinita.

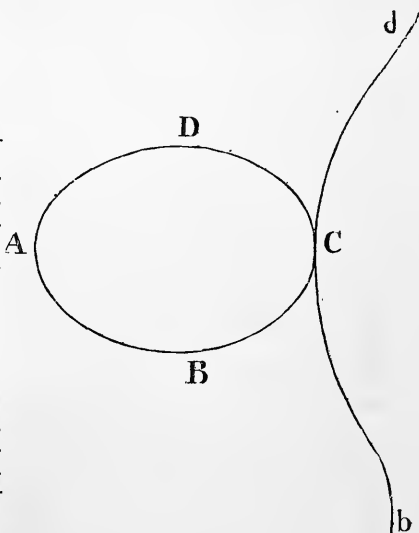
secantem demittatur perpendicularum, et perpendicularum illud unâ cum secante revolvatur circa polum, intersectiones spiralis transibunt in se mutuo, quæque prima erat seu proxima, post unam revolutionem secunda erit, post duas tertia, et sic deinceps: nec interea mutabitur æquatio nisi pro mutatâ magnitudine quantitatum per quas positio secantis determinatur. Unde cum quantitates illæ post singulas revolutiones redeunt ad magnitudines primas, æquatio redibit ad formam primam, ideoque una eademque exhibebit intersectiones omnes, et propterea radices habebit numero infinitas, quibus omnes exhiberi possunt. Nequit ergo intersectio rectæ et spiralis per æquationem finitam generaliter inveniri, et idcirco nulla extat ovalis cujus area, rectis imperatis abscissa, possit per talem æquationem generaliter exhiberi.

(^k) Eodem argumento, si intervallum poli et puncti, quo spiralis describitur, capiatur Ovalis perimetro abscissæ proportionale, probari potest quod longitudo perimetri nequit per finitam æquationem generaliter exhiberi. (^l) De ovalibus autem hic loquor quæ non tanguntur a figuris conjugatis in infinitum pergentibus.

ac proindè post singulas redeunt ad magnitudines primas F S, F P intersectione primâ in secundam transeunte, secundâ in tertiam, et sic deinceps, æquatio inter I I M, vel P M, et datas P F, P S, S F, redibit ad formam primam quam nabeat æquatio inter I M, vel P M, et easdem datas quantitates P F, P S, S F, adeoque una eademque æquatio exhibebit intersectiones omnes I, I I, &c. seu valores I M, I I M, &c. propterea radices exhibebit numero infinitas quibus omnes exhiberi possunt.

(^k) * Eâ enim ratione spiralis describetur gyris infinitis ad quam proindè æquatio erit numero dimensionum infinita, quæ quidem finita deberet esse, si longitudo perimetri ovalis pro lubitu abscissa seu intervallum puncti spiralem describentis et poli, per finitam æquationem generaliter exhiberi posset.

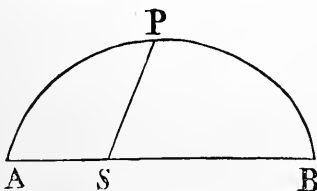
(^l) * Ovalem A B C D tangat in C curva conjugata b C d, cujus rami C b, C d in infinitum pergant, pro hujusmodi ovalibus non valet NEWTONI demonstratio. Supponit enim circa punctum datum in ovali perpetuò revolvi lineam rectam uniformi cum motu quæ sit ad peripheriam ovalis terminata, et abscindat areas sibi proportionales; si autem ovalis tangatur a figurâ conjugatâ b C d, cujus rami in infinitum pergunt, evidens est lineâ rectâ intrâ ovalem revolvente non percurri totam novæ hujus figuræ aream, nec gyris perpetuis ac infinitis simplicem spiralem describi.



Corollarium.

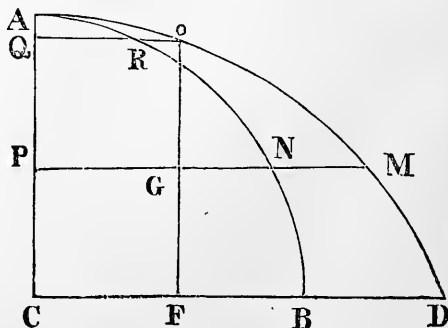
(^m) Hinc area ellipseos, quæ radio ab umbilico ad corpus mobile ducto describitur, non prodit ex dato tempore, per æquationem finitam; et propterea per descriptionem curvarum geometricè rationalium determinari nèquit. Curvas geometricè rationales appello quarum puncta omnia per longitudes æquationibus definitas, id est, per longitudinum rationes complicatas, determinari possunt; cæterasque (ut spirales, quadratrices,

(^m) 363. Sit Ellipseos A P B, axis A B, umbilicus S, radius vector S P, dataque sint totius Ellipsis area et tempus periodicum, sitque tempus periodicum ad tempus per arcum A P, ita area totius ellipseos ad aream sectoris A P S, obtinebitur æquatio inter aream A P S, et tempus quo illa describitur. Unde si postea inveniri posset æquatio finita inter aream indefinitam A P S et radium vectorem S P ac datas quantitates, inveniretur quoque æquatio finita inter tempus per arcum quemvis A P, et radium vectorem S P, qui ita ex dato tempore per æquationem finitam prodiret; Et vice versâ, si ex tempore quo arcus A P describitur, radii vecto-



ris S P longitudo per æquationem finitam posset determinari, ope hujus æquationis et superioris proportionis inter tempora et areas obtineretur æquatio finita inter aream quamlibet ASP et radium vectorem S P ac datas quantitates, quod impossibile esse demonstratum est; et propterea longitudo (ac proinde positio quæ ex longitudine data est) radii vectoris S P, per descriptionem curvarum geometricè rationalium determinari nequit. Sunt autem curvæ geometricè rationales in quibus ordinarum et abscissarum rectarum relatio æquatione finitâ exprimi potest, quarumque proinde puncta omnia per harum rectarum linearum rationes complicatas determinari possunt. Si in æquatione ad curvam $ax^m + by^n + \&c. = 0$ numerus terminorum finitus sit et exponentes m, n, rationales fuerint, curva erit geometricè rationalis, contrâ si numerus terminorum infinitus fuerit, et summati nequeant, aut si exponens aliquis irrationalis fuerit, curva est geometricè irrationalis.

364. Circuli (adeoque et Ellipsis) quadraturam seu rectificationem indefinitam finitâ æquatione exhiberi non posse demonstravit Saurinus in Commentariis Parisiensibus an. 1720. illius demonstrationem ut potè facilem et brevem referemus. Sit quadrans circuli C A B, et ex puncto quovis N arcus A B demittatur ad radium A C perpendicularis N P, demonstrandum est arcus A N, et rectarum A P, P N relationem nullâ æquatione finitâ posse exprimi. Descripta intelligatur curva A O M D cujus hæc sit natura ut recta M P ex puncto quovis M ad radium A C perpendiculariter demissa, sit æqualis arcui abscisso A N; ope curvæ A M D arcus A N in ratione quâvis datâ rectæ P G ad P M dividi potest in R; nam si per punctum G agatur recta G o, ipsi P M normalis et curvæ A M D occurrens in o, atque ex puncto o, ducatur ad A C perpendicularis o Q arcum A N secans in R, erit A R = Q o, adeoque A R : A N = P G : P M. Verùm demonstravit Clairss. Hospitalius Art. 443. Lib. 10. Sectionum Conicarum, quod si arcus A N sit in partes æquales dividendus quarum una sit A R, æquatio quâ determinatur partis unius Chorda A R, tot dimensiones obtinet quot sunt in arcu A N, partes æquales, atque adeò si dividendus

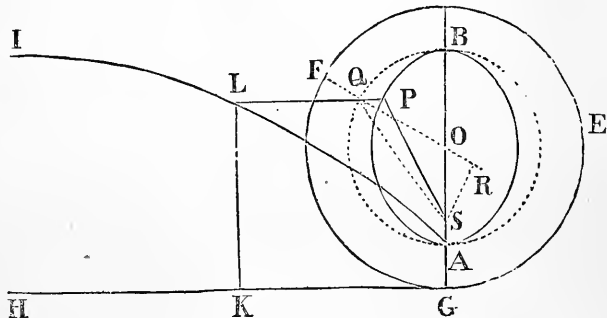


trochoides) geometricè irrationales. Nam longitudines quæ sunt vel non sunt ut numerus ad numerum (quemadmodum in decimo elementorum) sunt arithmeticè rationales vel irrationales. Aream igitur ellipseos temporì proportionalem abscindo per curvam geometricè irrationalem ut sequitur.

PROPOSITIO XXXI. PROBLEMA XXIII.

Corporis in datâ trajectoriâ ellipticâ moti invenire locum ad tempus assignatum.

Ellipseos APB
sit A vertex prin-
cipalis, S umbili-
cus, et O cen-
trum, sitque P
corporis locus in-
veniendus. Pro-
duc O A ad G,
ut sit O G ad
O A ut O A ad



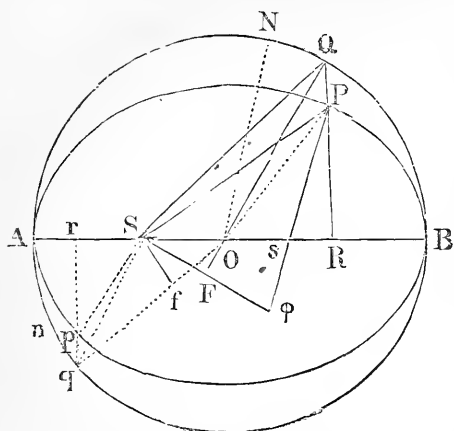
O S. Erige perpendicularum G H, centroque O et intervallo O G describe circulum G E F, et super regula G H, ceu fundo, progrediatur rota G E F revolvendo circa axem suum, et interea puncto suo A describendo trochoidem A L I. Quo facto, cape G K in ratione ad rotæ perimetrum G E F G, ut est tempus, quo corpus progrediendo ab A descripsit arcum A P, ad tempus revolutionis unius in ellipsi. Erigatur perpendicularum K L occurrens trochoidi in L, et acta L P ipsi K G parallela occurret ellipsi in corporis loco quæsito P.

Nam centro O , intervallo OA describatur semicirculus AQB , et arcui

sit arcus $A N$ in ratione indefinita rectæ $P G$ ad $P M$, æquatio illa finita esse nequit. Ergo curva $A M D$, quæ arcum æquibet $A N$ in ratione quavis $P G$ ad $P M$ per eandem semper constructionem dividit geometricè, rationalis non est; sed si arcus $A N$ et rectarum $A P$, $P N$ relatio posset æquatione finitè exprimi, eadem æquatio exhiberet quoque relationem abscissæ $A P$ ad ordinatam $P M$, ac proinde curva $A M D$ esset geometricè rationalis. Ergo rec-

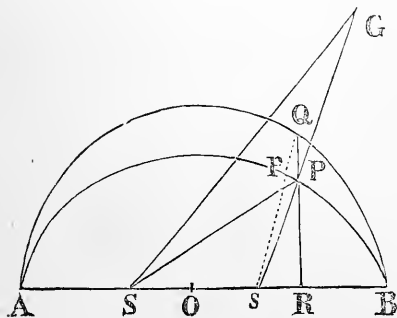
tificatio arcûs A N, æquatione finitâ generaliter
exhiberi non potest. Q. e. d.

365. Hinc patet curvas omnes quarum descriptio pendet a quadraturâ vel rectificatione circuli et ovalium indefinitâ quales sunt spirales, quadratrices, trochoides esse geometricè irrationales. Ex demonstratis autem minime sequitur circuli et ovalium quadraturam vel rectificationem determinatam seu quadraturam vel rectificationem totius ovalis aut portionis illius determinatæ impositibilem esse.



gulus $Q O B$ et $N O Q$, et $Q O B$ sive anomalia excentrici, est æqualis angulus $Q S B$ (sive $P S B$ neglecto $Q S P$) et $S Q O$, ergo angulus $N O B$ est æqualis angulis $P S B$, $S Q O$, $N O Q$ quibus etiam quam proximè æqualis est angulus $P s B$, nam cōiunctibus focus S et s cum centro O , puncta Q et P etiam cōiunt et angulus $S P O$ angulo $S Q O$ est quam proximè æqualis; pariter ut $Q O$ proximè coincidit cum $P O$ fingatur $S F$ esse perpendicularē in ipsam $P O$, et produci donec cum $P s$ producto in ϕ concurrat, erunt quam proximè $O F$, $s \phi$ parallele, ideoque ob æquales $S O$, $O s$, æquales erunt $S F$ et $F \phi$, $S P$ et $P \phi$, ut et anguli $S P F$ et $F P \phi$ sive $O P s$, sed ob $S F$ æqualem $Q N$ et $S Q$ sive $S P$ prope æqualem $O Q$ est angulus $S P F$ sive $O P s$ propè æqualis angulo $N O Q$; ergo totus angulus $S P s$ est æqualis angulis $S Q O$ et $N O Q$ simul sumptis, et cum angulus $P s B$ sit æqualis angulis $P S B$ et $S P s$, æqualis prope erit angulus $P S B$, $S Q O$, $N O Q$ sicut angulus $N O B$, ergo angulus $P s B$ est quam proximè anomalia media cujus anomalia corquata est $P S B$.

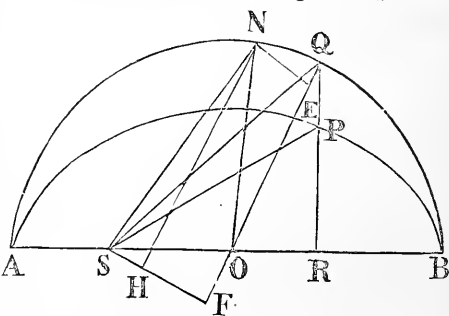
Dato autem angulo B s P, angulum
P S B, ita querit Wardus. Producatur s P,



ad G, ut sit $P G = P S$, et jungatur
 $S G$, erit $S G = S P + P s = A B$
(ex nat. Ellipsis.) adeoque in triangulo
 $G s S$, datis lateribus $G s, S s$, angulo $S s G$
dantur anguli $S G s$ ($= G S P$, ob $S P =$
 $P G$) et $G S s$, unde cognoscitur angulus
 $P S s$ sive $P S B$ aequalis nempe differentie
angulorum $G S s, G S P$, quare in tri-
angulo $S P s$, datis angulis duobus $P S s,$
 $P S s$, angulo $S P s$, qui est summa angulo-
rum $G S P, S G P$, et latere $S s$, invenitur
latus $S P$ seu intervallum.

Ubi excentricitas paulo major est. Wardi methodum ita corrigit Bulliadus. Per punctum P Wardi methodo determinatum agatur Q R axi A B normalis, et excentrico occurrens in Q, jungaturque s Q, orbitam secans in p, erit p, locus planetæ accuratior.

Methodus Cassini. Omnibus positis
(ut suprā num. 369.) jungatur S N, O N
et agatur N H recta Q F parallela et lineæ
S F occurrans in H, et N E parallela S F rectæ
Q F occurrans in E, erit N E = H F sinus arcus
N Q; cumque sit S F = N Q (369) erit S H
differentia inter arcum N Q et ipsius sinum
N E; si excentricitas S O exigua fuerit, erit fere



N Q = N E = H F = S F et proinde
S N parallela F Q, adeoque angulus S N O,
aequalis angulo N O Q; Porro in triangulo
S N O, datis duobus lateribus N O, S O, et angulo
intercepto S O N (complemento nempe an-
omaliae mediae datae ad duos rectos) inveniatur
angulus S N O seu N O Q, et ipsius men-
sura nempe arcus N Q; et inde innoscescit an-
omaliae excentri B Q; Hinc in triangulo S Q O,
dati lateribus S O, O Q et angulo S O Q, in-
veniatur angulus Q S O, et sumptis S R pro
sinu toto, erit Q R ad P R seu axis major ad
minorem, ut tangens anguli dati Q S B ad tan-
gentem anguli ad solem P S B, qui ita obtine-
bitur.

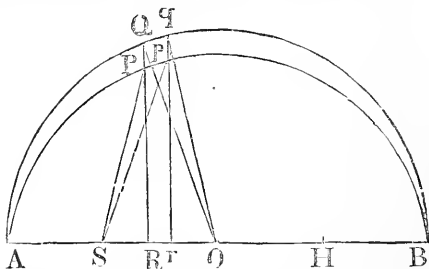
Hæc satis sunt in orbitis planetarum non valde excentricis, sed in orbitis Mercurii et Martis quarum major est excentricitas ita invenitur arcus N Q. Ex datis in triangulo S N O, lateribus SO, NO, et angulo SON, invenitur latus S N, et angulus S N O; deinde quæritur in partibus decimalibus radii O N differentia

Scholium.

(r) Cæterum, cum difficilis sit hujus curvæ descriptio, præstat solutionem vero proximam adhibere. Inveniatur tum angulus quidam B, qui sit ad angulum graduum 57.

29578, quem arcus radio æqualis subtendit, ut est umbilicorum distantia S H ad ellipseos diametrum A B; tum etiam longitudo quædam L, quæ sit ad radium in eadem ratione inversè.

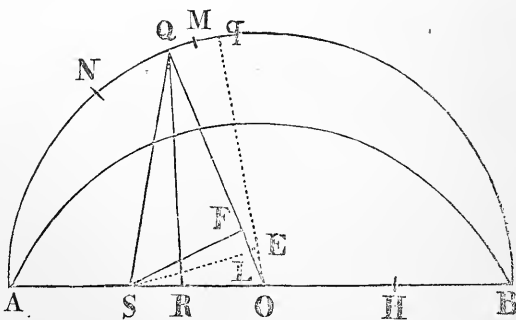
Quibus semel inventis, problema deinceps confit per sequentem analysin. Per constructionem quamvis, vel utcumque conjecturam faciendo, cognoscatur corporis locus P prox-



inter arcum qui metitur angulum S N O, et ejus sinum quæ citrà errorem sensibilem supponi potest æqualis rectæ S H, sui differentiæ inter arcum N Q anguli N O Q mensuram et ejus sinum N E. Sitque ille decimalium numerus A. Invenietur humerus decimalium radii S N quem eadem linea S H continet dicendo ut S N ad N O sic A ad numerum quæsitum B, et quoniam in triangulo rectangulo S H N est S N ad sinum totum ut S H sive B ad sinum anguli S N H invenietur ergò angulus S N H, ex angulo invento S N O subducendus, ut relinquatur angulus H N O, seu æqualis N O Q, sive arcus N Q.

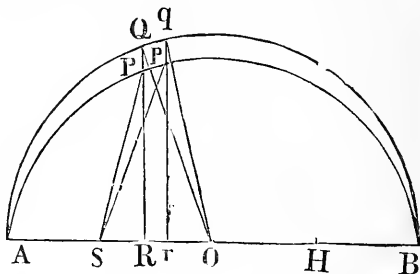
(¹) 575. Sit axis major ellipseos A B, centrum O, umbilici S et H, et feratur planeta a perihelio A ad aphelium B radio A O describatur circulus excentricus AQB; quoniam radius circuli æqualis est arcui graduum 57.29578, si fiat A B ad S H seu Q O ad S O, ut arcus vel angulus 57.29578, ad arcum B, erit B arcus æqualis rectæ S O. Cognoscitur arcus A N tempori proportionalis, et dicatur N; deinde per methodum Wardi aut Cassini vel aliâ ratione inveniat arcus A Q, proximè æqualis anomalie excentricæ a perihelio A sumptæ, erit arcus N Q æqualis rectæ S F ex umbilico S in radium Q O perpendiculariter demissæ (569); fiat ut S H ad A B sive ut S O ad Q O, ita radius R ad longitudinem quandam L, et erit $QO = \frac{SO \times L}{R}$, et quoniam triangulum

S O F, simile est triangulo Q O R erit Q O : Q R = S O : S F, hoc est, radius ad sinum anguli Q O A, ut arcus B ad alium arcum D qui erit æqualis rectæ S F: Si itaque arcus A Q rectè assumptus fuisset foret arcus D æqualis arcui N Q (569): Si verò arcus A Q accuratus non est, capiatur N M = D, punctum M cadet supra vel infra punctum Q. Sit anomaliam excentricæ accuratæ (quæ est incognita) A q, et in radium q O cadat perpendicularum S E erit æquale N q (569) undè S E = S F, hoc est ferè L E = N q - N M = M q = Q q - Q M. Quoniam verò angulus Q O q, parvus est, erit O E : O q sive O Q = L E.



$Qq = Qq - QM : Qq$. Undè $OQ - OE : OQ = QM : Qq$. Sed OE , est ferè æqualis OF , ergò $OQ - OF : OQ = QM : Qq$. Porro OQ , est ad RO , seu radius ad cosinum anguli A O Q, ut S O, ad O L

imus vero ejus loco p. Demissâque ad axem ellipseos ordinatim applicatâ P R, ex proportionem diametrorum ellipseos, dabitur circuli circumscripti A Q B ordinatim applicata R Q, quæ sinus est anguli A O Q existente A O radio, quæque ellipsin secat in P. Sufficit angulum illum rudi calculo in numeris proximis invenire. Cognoscatur etiam angulus tempori proportionalis, id est, qui sit ad quatuor rectos, ut est tempus, quo corpus descripsit arcum A p, ad tempus revolutionis unius in ellipsi. Sit angulus iste N. Tum capiatur et angulus D ad angulum B, ut est sinus iste anguli A O Q ad radium, et angulus E ad angulum N — A O Q + D, ut est longitudo L ad longitudinem eandem L cosinu anguli A O Q diminutam, ubi angulus iste recto minor est, auctam ubi major. Postea capiatur tum angulus F ad angulum B, ut est sinus anguli



adeoque $OF = \frac{SO \times \cos. A Q}{R}$. Crescentibus

A N, A Q, Q R, decrescit R O, et evanescit ubi A Q est circuli quadrans, ac tandem fit negativa ubi A Q quadrante major est. Quare cum sit $+ O Q : + S O = R O : O F$, O F idem signum $+$ vel $-$ habere debet cum R O, adeoque si angulus A O Q, seu arcus A Q est quadrante minor, O F est quantitas affirmativa; si A Q quadrans est, O F evanescit; si A Q est quadrante major, O F fit negativa. Est igitur $OQ = \frac{SO \times \cos. A Q}{R}$; $OQ = QM$:

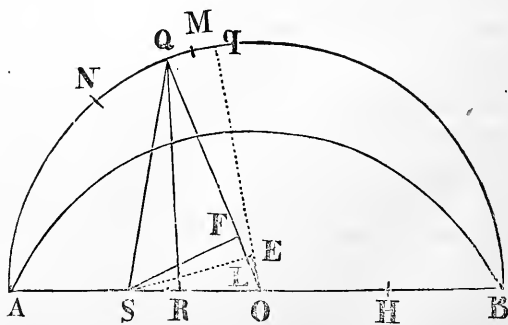
Q q, seu ob $QO = \frac{SO \times L}{R}$,

est $\frac{SO \times L - SO \times \cos. A Q}{R}$:

$\frac{SO \times L}{R}$, sive $L - \cos. A Q$:

$L = QM : Qq$, si fuerit A Q minor quadrante, et $L + \cos. A Q : L = QM : Qq$, si fuerit A Q major quadrante. Est autem arcus $QM = AN - A Q + NM = N - A Q + D$, quare si arcus Q q, dicatur E, erit $E : N - A Q + D = L : L \mp \cos. A Q$ et A Q $+ E$, erit æqualis A q; invento itaque E per ultimam proportionem, si loco A Q capiatur arcus accuratior A q, seu angulus A O Q + E, et instituat priori similis, ca-

piendo arcum F, ad arcum B, ut est sinus arcus A Q + E seu A q ad radium, et arcum G ad arcum $N - A q + F$, seu, $N - A Q - E + F$, ut est longitudo L, ad longitudinem eandem cosinu anguli A O q seu A O Q + E diminutam ubi angulus A O q recto minor est, auctam ubi major, erit A Q + E + G, seu A q + G, arcus magis verus, et similiter si loco arcus A q, usurpetur arcus A q + G et idem repetatur processus, inveniatur novus ar-

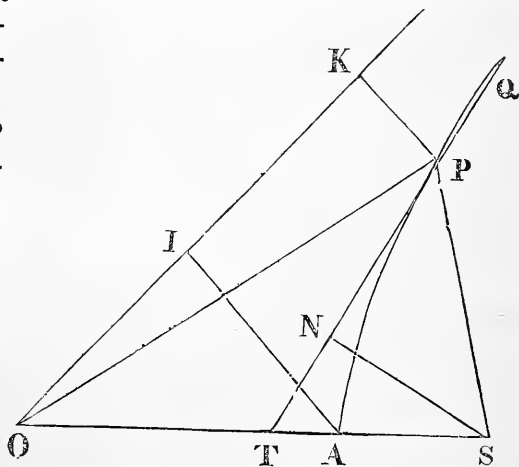


cus A Q + E + G + I, seu A q + G + I, accuratior arcu A q + G, et sic pergere licet in infinitum et quantumvis proximè ad veritatem accedere.

A O Q + E ad radium, tum angulus G ad angulum N — A O Q — E + F ut est longitudo L ad longitudinem eandem cosinu anguli A O Q + E diminutam ubi angulus iste recto minor est, auctam ubi major. Tertiâ vice capiatur angulus H ad angulum B, ut est sinus anguli A O Q + E + G ad radium; et angulus I ad angulum N — A O Q — E — G + H, ut est longitudo L ad eandem longitudinem cosinu anguli A O Q + E + G diminutam, ubi angulus iste recto minor est, auctam ubi major. Et sic pergere licet in infinitum. Denique capiatur angulus A O q æqualis angulo A O Q + E + G + I + &c. Et (*) ex cosinu ejus O r et ordinata p r, quæ est ad sinum ejus q r ut ellipseos axis minor ad axem majorem, habebitur corporis locus correctus p. (†) Si quando angulus N — A O Q + D negativus est, debet signum + ipsius E ubique mutari in —, et signum — in +. Idem intelligendum est de signis ipsorum G et I, ubi anguli N — A O Q — E + F, et N — A O Q — E — G + H negativi prodeunt. Convergit autem series infinita A O Q + E + G + I + &c. quam celerrimè, adeo ut vix unquam opus fuerit ultra progredi quam ad terminum secundum E. Et fundatur calculus in hoc theoremate, quod area A P S sit ut differentia inter arcum A Q

et rectam ab umbilico S in radium O Q perpendiculariter demissam.

Non dissimili calculo
conficitur problema in hy-
perbolâ. Sit ejus cen-
trum O , vertex A , um-
bilicus S et asymptotos
 OK . Cognoscatur quan-
titas areæ abscindendæ
tempori proportionalis.
Sit ea A , et fiat con-
jectura de positione rectæ
 SP , quæ aream APS



(⁵) * *Ex cosinu O r.* Est enim radius ad
cosinum anguli inventi A O q, ut q O ad O r,
invenientur ergò punctum r, et ordinata q r.
Deinde si fiat ut axis major ad minorem, ità q r
ad p r, habebitur locus corporis p.

(t) * Si quandò angulus $N - A Q + D$, seu arcus $Q M$, (vid. fig. Not.) negativus est, seu si punctum M , cadit infrà punctum Q ,

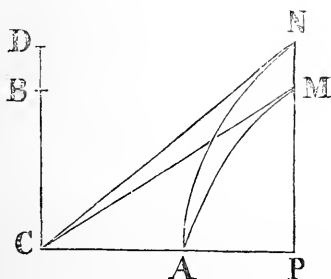
debet signum ipsius \vdash E, ubique mutari in \neg , et signum \neg in \vdash . Quoniam enim supra invenimus E: $N - A \ Q \vdash D = L : L \vdash$ cos. A Q, si fuerit arcus $N - A \ Q \vdash D$, negativus, debet quoque arcus E esse negativus, et arcus A q erit A Q \neg E. Idem intelligendum est de signis ipsorum G et I, &c. et eandem rationem.

abscindat veræ proximam. Jungatur OP , et ab A et P ad asymptoton agantur AI , PK asymptoto alteri parallelæ, et ^(a) per tabulam loga-

^(a) 574. Diximus superius (Theor. IV. de Hyp. p. 94.) aream inter asymptotum, Hyperbolam, ordinatam in vertice erectam et aliam ordinatam comprehensam, esse Logarithmum abscissæ, idem verò, more veterum demonstrare et ad hanc Propositionem propius accommodare hic non pigebit.

Lemma. Sint duæ hyperbolæ AM , AN quarum centrum C , semidiameter communis AC , semidiametri conjugatæ CB , CD , per punctum quodvis P agatur PMN ordinatim ad diametrum CP applicata, hyperbolis occurrentes in punctis M et N , junganturque CM , CN spatia hyperbolica AMP , ANP et sectores AMC , ANC sunt ad invicem in ratione semidiametrorum conjugatarum $C B$, $C D$, vel etiam ordinarum PM , PN . Nam ex naturâ hyperbolæ (Theor. II. de Hyp.) $PM^2 : CB^2 = CP^2 - CA^2 : CA^2$, et $PN^2 : CD^2 = CP^2 - CA^2 : CA^2$, undè $PM^2 :$

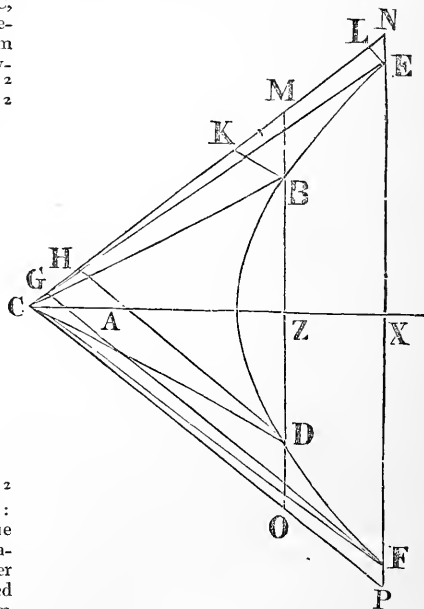
perbolici CBE , CDF erunt æquales. Agantur enim rectæ BD , EF asymptotis occurrentes in punctis M , O , N , P , et ob parallelas KB , HD , CO erit $MB : MK = DO : CH$, et ob parallelas LE , GF , CP erit etiam $NE : NL = FP : CG$; sed, ex naturâ hyperbolæ inter asymptotos (Lem. I. de Conic. pag. 87.) $MB = DO$, et $NE = FP$, undè $MK = CH$ et $NL = CG$; Porro $CG : CH = CK : CL$ (per hyp.) hoc est, $NL : MK = CK : CL = LE : KB$, ex naturâ hyperbolæ intrâ asymptotos (Theor. IV. de Hyp. p. 94.) rectæ igitur NE , MB , hoc est, EF ,



$CB^2 = PN^2 : CD^2$, et $PM^2 : PN^2 = CB^2 : CD^2$, ac $PM : PN = CB : CD$, cùmque idem semper eveniat quâcumque in parte cadat ordinata PMN , liquet spatia hyperbolica AMP , ANP esse inter se ut CB ad CD , vel PM ad PN , sed triangula CPM , CPN sunt ad invicem ut PM ad PN vel CB ad CD ; ergò $CPM - AMC : CPN - ANC = PM : PN = CB : CD$. Q. e. d.

575. Corol. Si duæ semidiametri conjugatæ CA , CD fuerint æquales, hyperbola AN erit æquilatera; quare inventâ quadraturâ spatorum hyperbolicorum ANP vel ANC in hyperbolis æquilateris, habebitur etiam quadratura spatorum hyperbolicorum AMP vel AMC in aliis quibusvis hyperbolis.

576. Lemma. Si super hyperbolæ $E B D F$ asymptoto CN sumantur quatuor partes CG , CH , CK , CL , ut sit $CG : CH = CK : CL$; ducantur autem rectæ GF , HD , KB , LE alteri asymptoto CP parallelæ, et hyperbolæ occurrentes in punctis F , D , B , E , junganturque semidiametri CF , CD , CB , CE , sectores hy-



BD erunt parallelæ, ac proindè, linea per earum medium X , Z ducta crit Diameter, transibitque per centrum C ; (Lem. IV. de Conic. p. 90.) unde facile deducitur trapezia $MXZN$, $OXZP$ fore æqualia ut et areæ mixtilineæ $BXZE$, $DXZF$, unde singulis ex correspondenti trapezio substractis relinquentur areæ $MBEN$ et $ODFP$ æquales, quibus addantur Triangula $MB C$, $OD C$, æqualia ob bases æquales MB , OD in eadem linea positas, et ob vertices ad idem punctum C concurrentes, erunt æquales areæ $CMNEBC$, $COPFDC$, ex quibus denique substractis Triangulis $N E C$, $P F C$ quæ æqualia sunt ob bases æquales NE , PF in eadem lineâ positas, et ob vertices ad idem punctum C concurrentes, supererunt sectores hyperbolici CBE , CDF inter se æquales. Q. e. d.

377. *Lemma.* Si per puncta quævis asymptoti C L, agantur duæ rectæ G F, H D alteri asymptoto C P parallelæ, et hyperbolæ occurrentes in F et D, junganturque semidiametri C F, C D, trapezium hyperbolicum G F D H æquatur sectori C F D. Nam, ex naturâ hyperbolæ inter asymptotos, triangula C H D, C G F, æquantur ob æquales angulos G et H et latera reciproca (per Theor. IV. de Hyp. p. 91.) adeoque sublato communi triangulo C G A, residua spatia G A D H, C A F erunt æqualia, quibus si addatur idem spatium hyperbolicum D A F, summae G F D H, C F D erunt æquales. Q. e. d.

378. *Corol.* 1. Hinc iisdem positis quæ (num. 376.) trapezia hyperbolica G F D H, K B E L sunt æqualia.

379. *Corol.* 2. Si asymptoti partes C G, C H, C K fuerint continuè proportionales, duo sectores C F D, C D B et duo trapezia hyperbolica G F D H, H D B K, æquantur. Eadem enim ratione quâ num. 376. ostenditur rectam B F tangenti per punctum D ductæ esse parallelam. Undè si super asymptoto C L sumantur partes quocumque C G, C H, C K, C L, &c. in continuâ progressionem geometricâ, et ex punctis G, H, K, L, &c. agantur rectæ G F, H D, K B, L E, &c. alteri asymptoto parallelæ, trapezia hyperbolica G F D H, H D B K, K B E L erunt æqualia; et vicissim si trapezia illa æquantur, erunt rectæ C G, C H, C K, C L, &c. in continuâ progressionem geometricâ.

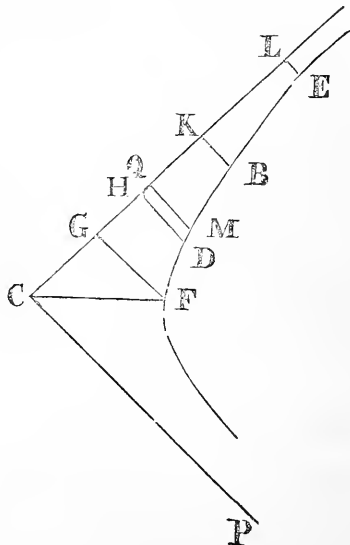
380. *Corol.* 3. Sit hyperbola F D B E æquilatera, cujus centrum C, asymptotus C L, semiaxis transversus C F, capiantur in asymptoto partes C G, C H, C K, C L, &c. in continuâ progressionem geometricâ, aganturque G F, H D, K B, L E, &c., alteri asymptoto C P parallelæ, trapezia hyperbolica G F D H, H D B K, K B E L, &c. erunt æqualia; quare eorum summae, scilicet o, G F D H, G F B K, G F E L, &c. erunt in continuâ progressionem arithmeticâ. Si itaque C G sit unitas, C H, C K, C L, &c. numeri, erunt o, G F D H, G F B K, G F E L, illorum numerorum logarithmi.

381. *Corol.* 4. Itaque per logarithmorum hyperbolicorum tabulas, inveniri possunt trapeziorum quorumvis G F D H, B G F K, &c. areae; Sumptâ enim C G pro unitate, quærantur in numeris rectarum C H, C K, &c. et horum numerorum logarithmi exhibebunt trapezia hyperbolica G F D H, G F B K, &c.

382. *Corol.* 5. Sit C G = 1, G H = x, C H = $1 + x$, H D = y, et erit, ex naturâ hyperbolæ inter asymptotos $\frac{1}{1+x} \times y = 1$, adeoque $y = \frac{1}{1+x}$, et trapezii G F D H elementum

D H Q M seu $y \, dx = \frac{dx}{1+x}$; si igitur $L. \frac{1}{1+x}$, denotet logarithmum numeri $1 + x$, erit $L. (1+x) = G F D H$, et elementum logarithmi

seu d. L. $\frac{1}{1+x} = y \, dx = \frac{dx}{1+x}$. Et similiter elementum logarithmi numeri cujusvis z seu d. L. $z = \frac{dz}{z}$.



383. *Corol.* 6. Cum sit $y = \frac{1}{1+x}$, si peragatur divisio, erit $y = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4$, &c. in infinitum, ac proinde $y \, dx = dx - x \, dx + x^2 \, dx - x^3 \, dx$, &c. in infinitum, et sumptis utrinque fluentibus S. $y \, dx = G F D H = L. \frac{1}{1+x} = x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{5} x^5$, &c. in infinitum. Si autem numerus propositus sit unitate minor, seu $1 - x$, eodem modo invenietur ipsius logarithmus S. $-y \, dx = L. \frac{1}{1-x} = -x - \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{5} x^5$, &c.

384. *Scholium.* Observandum est logarithmos hyperbolicos. Neperi a logarithmis Briggsii quibus vulgè utimur differre; verum cum hyperbolici sint semper ad Briggsianos seu vulgares in eadem constanti ratione, nimirum logarithmus hyperbolicus numeri denarii 2. 302585 est ad logarithmum Briggsianum numeri denarii 1. 000000, ut quilibet logarithmus hyperbolicus ad ejusdem numeri logarithmum Briggsianum, facile est hyperbolicos ad Briggsianos, et contra Briggsianos ad hyperbolicos reducere, adeoque hyperbolarum quadraturam per logarithmos etiam vulgares invenire. Si dividatur 1. 000000, per 2. 302585, &c., quotiens 0. 4342948, &c. per logarithmum quemvis hyperbolicum multiplicatus, dabit logarithmum vulgarem, et vice-

cēps determinabitur. Sume angulum T proportionalem tempori quo arcus $B P$ descriptus est, seu motui medio (ut loquuntur) æqualem; et angulum V , primam medii motus æquationem, ad angulum Y , æquationem maximam primam, ut est sinus dupli anguli T ad radium; atque angulum X , æquationem secundam, ad angulum Z , æquationem maximam secundam, ut est cubus sinus anguli T ad cubum radii. Angulorum T, V, X vel summæ $T + X + V$, si angulus T recto minor est, vel differentiæ $T + X - V$, si is recto major est rectisque duobus minor, æqualem cape angulum $B H P$, motum medium æquatum; et si $H P$ occurrat ellipsi in P , actâ $S P$ abscindet aream $B S P$ tempori proportionalem quam proximè. Hæc praxis satis expedita videtur, propterea quod angulorum perexiguorum V et X , in minutis secundis, si placet, positorum, figuras duas tresve primas invenire sufficit. Sed et satis accurata est ad theoriam planetarum. Nam in orbe vel Martis ipsius, cujus æquatio centri maxima est graduum decem, error vix superabit minutum unum secundum. Invento autem angulo motus medii æquati $B H P$, angulus veri motus $B S P$ et distantia $S P$ in promptu sunt per methodum notissimam. ^(d)

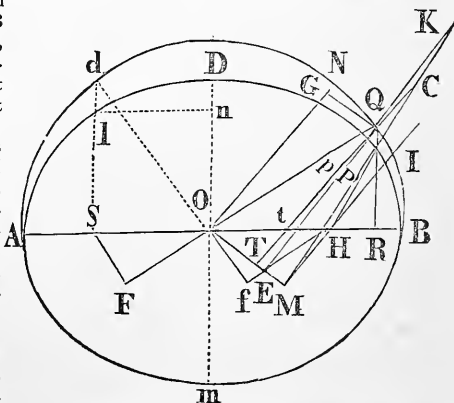
Hactenus de motu corporum in lineis curvis. Fieri autem potest ut mobile rectâ descendat vel rectâ ascendat, et quæ ad istiusmodi motus spectant, pergo jam exponere.

^(d) 385. Ellipseos quam planeta describit sit centrum O , umbilici S, H , et semiaxes $O B, O D$; Sole in S posito umbilicus alter H erit ferè centrum medii motus planetæ, (372) id est, si ex umbilico H agatur linea $H I$, quæ cum lineâ apsidum $O B$, constituat angulum $I H B$ anomalie mediæ æqualem, recta illa $H I$, ferè transibit per locum planetæ in orbitâ ellipticâ parum excentricâ revolventis, transeat autem $H P$, per locum verum planetæ P et erit angulus $P H I$, anomalie mediæ $I H B$, addendus (vel detrahendus) ut motus medius æquatus $B H P$ habeatur, et angulus $P H I$ aut ipsi æquipollens dicetur æquatio tota medii motus, quam in duas partes dividit Newtonus, quarum unam primam æquationem et alteram secundam æquationem vocat; determinat singulas in iis punctis ubi maximæ sunt, et rationem maximæ æquationis ad alium in dato quovis puncto adhibendam indicat.

Præcedentes methodos illustrarunt demonstrationibus et exemplis Keillius et Gregorius, hanc non minus ingeniosam intactam reliquerunt, vestigiis Newtoni insistere conabimur, et aperire quibus fundamentis nitatur hæc approxinatio.

386. Producat $I H$ in M donec occurrat perpendiculari $O M$, a centro O in ipsam $I H$ demisso jungaturque $M P$, erit angulus $P H I$ æqualis angulis $P M H$ et $M P H$; quorum sinus erunt inter se sicut $P H$ ad $M H$; sed cum

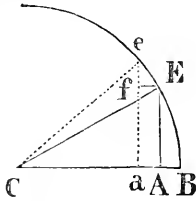
$M H$ sit semper minor $O H$ distantia centri a foco, sitque $P H$ distantia foci H ad punctum P ellipseos, exigua erit $M H$ respectu $H P$, ideòque minimus est angulus $M P H$ respectu anguli



PMH , illum itaque negligit, et hunc solum PMH ut æquationem totam considerat Newtonus.

Ducto verò ut superius expositum est. circulo $B Q N A$ super magnum axem ellipseos $A B$, et ex P loco planetæ ductâ $P R$ perpendiculari in eum magnum axem eâque $P R$ productâ donec secet circulum $B Q N A$ in Q ; ducatur $T Q$ perpendicularis in $O M$ (ideòque pa-

e f ad e E, sive $\sqrt{rr - xx} : r = dx : dv$
unde est $dv = \frac{r dx}{\sqrt{rr - xx}}$ et $dv^2 = \frac{r r dx^2}{rr - xx}$ sive $rr - xx = \frac{r r dx^2}{dv^2}$.



Jam verò supponatur valorem x hac serie exprimi, $x = A v + B v^3 + C v^5$, &c. erit $dx = A dv + 3 B v^2 dv + 5 C v^4 dv$, &c. et $dx^2 = A^2 dv^2 + 6 A B v^2 dv^2 + 9 B^2 v^4 dv^2 + 10 A C v^4 dv^2 + 2 A^2 C v^6 dv^2$, &c. unde $rr - xx = rr - A^2 v^2 - 2 A B v^4 - 2 A^2 C v^6$, &c. et $\frac{r r dx^2}{dv^2} = r r A^2 + 6 r r A B v^2 + 9 r r B^2 v^4 + 10 r^2 A C v^4$, &c. undè hæ duæ series æquales sunt, et terminorum A, B, C, &c. valor ex comparatione terminorum correspondentium harum serierum eruitur, erit ergo

$$rr - A^2 v^2 - 2 A B v^4 - 2 A^2 C v^6, \&c. \\ = r r A + 6 r r A B v^2 + 9 r r B^2 v^4 + 10 r r A C v^4, \&c.$$

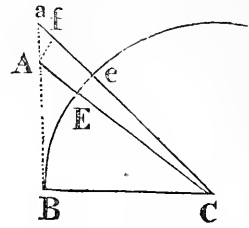
undè erit $r r = r r A$, ideoque $A = 1$.
 $- A^2 v^2 = 6 r r A B v^2$, undè $-1 = 6 r r B$
et $B = \frac{-1}{6 r r}$

$- 2 A B v^4 = 9 r r B B v^4 + 10 r r A C v^4$,
sive substitutione facta et terminis per v^4
divisis $+\frac{2}{6 r r} = \frac{9}{36 r r} + 10 r r A C$, sive

$$10 r r A C = \frac{3}{36 r r} \\ \text{et } C = \frac{1}{10 \times 36 r^4} = \frac{1}{2 \times 3 \times 4 \times 5 r^4}, \&c.$$

undè series $A v + B v^3 + C v^5$, &c. = x, ad
hanc redit $x = v - \frac{2 \times 3 r^2}{v^3} + \frac{2 \times 3 \times 4 \times 5 r^4}{v^5}$
&c. quæ series facile continuatur, et arcu existente parvo citissimè convergit.

Lemma II. Dato arcu invenire secantem.
Sit ut prius radius C B, r, secans quæsita C A, y, Tangens B A, $\sqrt{yy - rr}$, Arcus datus B E, v, ejus fluxio E e, dv; Ducatur ex centro secans C a, proxima proposita, et radio C A centro C, describatur arcus a f erit f a fluxio secantis quæsita sive d y, erunt autem arcus E e et A f ut eorum radii C E, C A ideoque



est $r : y = dv : A f = \frac{y dv}{r}$; præterea Triangula A C B, a A. f, sunt similia, nam ob angulum rectum f A C angulus f A a est complementum anguli C A B sive est æqualis angulo A C B, anguli verò B et f sunt ambo æquales ut pote recti, est ergo C B : B A =

$$A f : f a, \text{ sive } r : \sqrt{yy - rr} = \frac{y dv}{r} : d y$$

quadrando, $rr : yy - rr = \frac{yy dv^2}{r^2} : dy^2$

$$\text{sive } r^4 \frac{dv^2}{dy^2} = y^4 - r r y^2, \text{ Fingatur ergo}$$

esse $y = A + B v^2 + C v^3 + D v^4$, &c.
est $dy = 2 B v dv + 4 C v^2 dv + 6 D v^3 dv$, &c.

$$\text{et } dy^2 = 4 B^2 v^2 dv^2 + 16 B C v^4 dv^2 + 16 C^2 v^6 dv^2 + 24 D B v^6 dv^2, \&c.$$

$$\text{et } y^2 = A^2 + 2 A B v^2 + 2 A C v^4 + B^2 v^4 + 2 A D v^6 + B C v^4 + 2 A^2 C v^4, \&c.$$

$$\text{et } y^4 = A^4 + 4 A^3 B v^2 + 6 A^2 B^2 v^4 + 4 A^3 C v^4, \&c.$$

$$\text{est ergo } \frac{r^4 dy^2}{dv^2} = 4 r^4 B^2 v^2 + 16 r^4 B C v^4 + 16 r^4 C^2 v^6 + 24 r^4 D B v^6, \&c.$$

$$\text{et } y^4 - r r y^2 = A^4 + 4 A^3 B v^2 + 6 A^2 B^2 v^4 - r^2 A^2 - 2 r^2 A B v^2 + 4 A^3 C v^4 - 2 r^2 A C v^4 - r^2 B^2 v^4, \&c.$$

$$\text{Unde collatis terminis correspondentibus harum serierum est } A^4 - r^2 A^2 = 0, \text{ ideoque } A^2 = r^2, \text{ et } A = r; \text{ est } 4 r^4 B^2 v^2 = 4 A^3 B v^2 - 2 r^2 A B v^2; \text{ sive divisio omnibus terminis per } B v^2 \text{ et posito } r \text{ loco } A;$$

$$4 r^4 B = 4 r^3 - 2 r^3$$

$$\text{ideoque est } B = \frac{1}{2 r},$$

$$\text{est } 16 r^4 B C v^4 = 6 A^2 B^2 v^4 + 4 A^3 C v^4 - 2 r^2 A C v^4 - r^2 B B v^4, \text{ quæ divisa per } v^4 \text{ substitutisque valoribus A et B dant}$$

$$8 r^3 C = \frac{6}{4} + 4 r^3 C - 2 r^3 C - \frac{1}{4} \text{ unde}$$

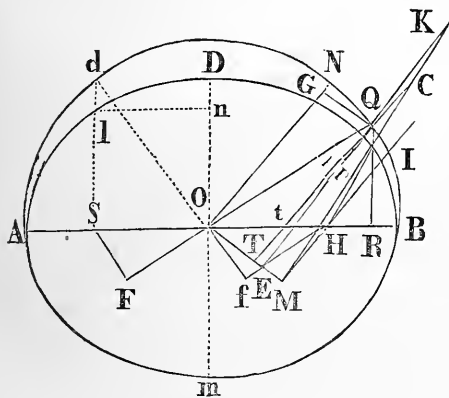
$$\text{est } 6 r^3 C = \frac{5}{4} \text{ et } C = \frac{5}{2 \times 5 \times 4 r^3}, \&c.$$

Series ergo ad secantis valorem exprimendum $A + B v^2 + C v^3$, &c. in hanc vertitur $r + \frac{v^2}{2 r} + \frac{5 v^3}{2 \times 3 \times 4 r^3}$, &c. Quæ satis prompte

convergit si modo arcus v sit exiguus, ut isto in casu.

His positis, invenientur commodè partes lineæ TE , sive sinus secundæ æquationis, ea enim constat ex differentia inter arcum NQ et ejus sinum (dato radio OB) et ex differentia inter eum ipsum arcum NQ sumptum ut radium in angulo fOE et illius anguli secantem.

Primum ergo differentia inter arcum NQ et ejus sinum, ex primâ serie invenitur, sit enim $v = NQ$ et $r = OB$, sinus arcus NQ per eam seriem invenitur $NQ - \frac{NQ^3}{2 \times 5 OB^2}$, &c. et omissis reliquis terminis seriet, hic admodum exiguis, liquet differentiam inter arcum NQ et ejus sinum esse terminum $\frac{NQ^3}{2 \times 5 OB^2}$ qui erat in eâ serie ex arcu NQ tollendus ut obtineatur sinus.



Secundo, ut differentia inter radium et secantem anguli fOE obtineatur, loco radii r in serie superius inventâ valor radii Of sive NQ est substituendus, et loco arcus v , valor arcus qui mensurat eum angulum et qui inventus fuit $-\frac{NQ^2}{OB}$, ergo series quæ secantem exprimit

in hanc abit $NQ + \frac{NQ^4}{2 \times OB^2 \times NQ}$, &c. reliquis terminis ut pote minimis omissis, excessus secantis super radium est $\frac{NQ^3}{2 \times OB^2}$, qui junctus cum excessu arcus super sinum superius invento $\frac{NQ^3}{2 \times 5 OB^2}$ efficit summam $\frac{4 NQ^3}{2 \times 3 OB^2}$ sive $\frac{2 NQ^3}{3 OB^2}$ pro valore sinus æquationis secundæ; sed est (369) ut Radius OB ad QR ita SH sive OH ad SF sive NQ , ergo $\frac{NQ}{OB} \times QR$ et $\frac{2 NQ^3}{3 OB^2} = TE = \frac{2 NQ^3}{5 OB^2}$

$\times QR^3$; Itaque cum in hac secundâ æquatione radius QE sit in omni anomalie gradu idem aut prope idem, et anguli sint minimi erunt inter se quam proximè ut eorum sinus TE , cumque in valore TE eorum sinus $2 OH^3$

$\frac{2 OH^3}{5 OB^2}$ sit constans, sinus illi sunt inter se ut QR^3 , sed QR est sinus anomalie excentri, et in eadem prope sunt ratione sinus anomalie mediæ, hinc istæ æquationes secundæ in variis anomalie mediæ gradibus adhibendæ, sunt inter se ut cubi sinuum anomalie mediæ. Si itaque sumatur anomaliam media 90. graduum ejus sinus est ipse Radius, eritque illic maxima æquatio, quæ erit ad aliam quamvis, ut cubus Radii ad cubum sinus anomalie mediæ ipsi convenientis ut statuit Newtonus.

Ut verò determinetur hæc æquatio ubi est maxima, notandum quod si in foco S erigatur usque ad Ellipsim ordinata Sl ea erit æqualis semi-lateri recto, et si ducatur, ln ordinata in minorem axem erit $ln = OS$ sive OH , et Dn erit differentia semi-lateris recti et minoris axis quam Newtonus vocat D , et ex natura Ellipseos erit AO^2 sive $OB^2 : ln^2 (OH^2) = OD^2 : Dn \times nm$ (sive $D \times nm$) sed nm est ferè axi minori $2 OD$ æqualis, ergo erit $OB^2 : OH^2 = OD^2 : D \times 2 OD$ et $OH^2 = \frac{2 D \times OB^2}{OD}$, quo posito valor $TE =$

$$\frac{2 OH^3}{5 OB^2} QR^3 \text{ est æqualis } \frac{2 OH \times 2 D}{3 OB^3 \times OD} \times QR^3 \text{ vel quia } 2 OH = SH \text{ est}$$

$$TE = \frac{2 D \times SH}{3 OB^3 \times OD} QR^3.$$

In nonagesimo verò gradu anomalie mediæ lineæ OM sive OE in axem OB cadit et QT cui ferè æqualis est QE coincidit cum QR , unde QE pro QR sumi potest, et præterea QR nonnihil excedit lineam Sd sive axem minorem, DO , cum non nihil citra focum cadat, minor tamen est radio OB , unde QR^2 pro $OB \times OD$ satis accuratè sumi potest, sicque valor $TE =$

$$\frac{2 D \times SH}{5 OB^3 \times OD} QR^3 \text{ in hanc abit } TE = \frac{2 D \times SH}{5 OB^2} QE, \text{ sed Radius est ad sinum}$$

æquationis maximæ secundæ ut QE ad TE (sive $\frac{2 D \times SH}{5 OB^2} \times QE$) et QE ad $\frac{2 D \times SH}{3 OB^2}$

QE sicut $3 OB^2$, ad $2 D \times SH$, ergo æquatio secunda maxima invenietur dicendo ut triplum Quadrati semi-axis majoris ad duplum rectangulum sub umbilicorum distantia SH et differentia D semi-axis minoris et semi-lateris recti, ita radius ad sinum secundæ æquationis ubi est maxima, et ea data reliquæ invenientur dicendo ut cubus radii ad cubum sinus anomalie mediæ propositæ ita hæc maxima æquatio, ad quæsitam. Q e. d.

369. Annihilatur prima æquatio in 90. gradu

æqualis logarithmo sinûs anguli Z, qui per tabulas invenitur esse minutorum secundorum 100. 39". Inventis jam æquationibus maximis $Y + Z$, anguli V, et X, pro quolibet anomalie mediæ gradu faciliè reperiuntur v. gr. pro 45° .

Est enim Log. anguli Z = 2. 0016853. 46.

Log. cubi sinûs 45° . = 29. 5484550.

horum summa = 31. 5501403. 46.

Ex hæc summa detrahe logarithmum cubi radii 50. 0000000; residuum 1. 5501403. 46. erit logarithmus sinûs anguli X, qui per tabulas invenitur esse minutorum secundorum 35. 41". Quarè cum in 45° , anomalie gradu angulus V, æqualis sit angulo Y, erit motus medius æquatus, seu angulus P H B, = 45° , 4', 56. 55".

Jam verò ut inveniatur anomalia vera, seu angulus P S B, dato angulo P H B, producat H P ad Q ut sit P Q = S P, et erit H Q = A B, ex natura ellipseos, atque angulus P H B, æqualis summæ angulorum Q S H, S Q H; quarè semisumma laterum S H, H Q, est ad eorum semidifferentiam, hoc est, $A O + S O$, ad $A O - S O$, ut tangens dimidii anguli P H B, ad tangentem semidifferentiæ angulorum Q S H, S Q H.

Log. tang. $\frac{1}{2}$ P H B = 9. 6181066. 717.

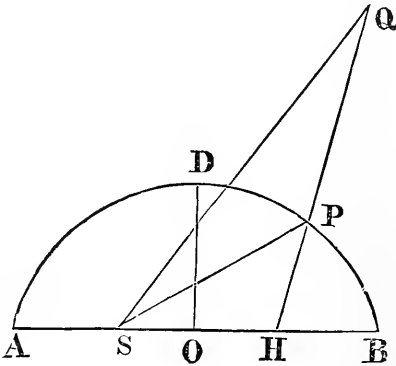
Log. $A O - S O$ = 5. 1407247. 98.

horum summa = 12. 7588514. 698.

Log. $A O + S O$ = 3. 2212068. 41.

Differentia = 9 5376246. 246.

= Log. tang. Ang. $\frac{1}{2}$ Q S H — $\frac{1}{2}$ S Q H. Undè invenitur $\frac{1}{2}$ Q S H — $\frac{1}{2}$ S Q H = 19° . 1', 35. 5"; et hinc anomalia vera = Q S H — S Q H (sive — Q S P) = 38° . 3' 11", quam



proximè; Nam si ex datâ hâc anomalîâ verâ, quærat (571) anomalia mediâ, invenietur esse 45° , graduum, quam proximè.

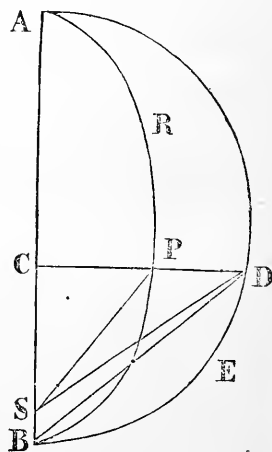
SECTIO VII.

De corporum ascensu et descensu rectilineo.

PROPOSITIO XXXII. PROBLEMA XXIV.

Posito quodvis centripeta sit reciproce proportionalis quadrato distantiae locorum a centro, spatia definire quæ corpus rectè cadendo datis temporibus describit.

Cas. 1. Si corpus non cadit perpendiculariter, describet id (per Corol. 1. Prop. XIII.) sectionem aliquam conicam cujus umbilicus congruit cum centro virium. Sit sectio illa conica $A R P B$ et umbilicus ejus S . Et primo si figura ellipsis est; super hujus axe majore $A B$ describatur semicirculus $A D B$, et per corpus decedens transeat recta $D P C$ perpendicularis ad axem; actisque $D S$, $P S$ erit area $A S D$ areae $A S P$, atque ideo etiam tempori proportionalis. Manente axe $A B$ minuatür perpetuo latitudo ellipseos, et semper manebit area $A S D$ tempori proportionalis. (e) Minuatür latitudo illa in infinitum: et orbe $A P B$ jam coincidente cum axe $A B$ et umbilico S cum axis termino B , descendet corpus in rectâ $A C$, et area $A B D$ evadet tempori proportionalis. Dabitur itaque spatium $A C$, quod corpus de

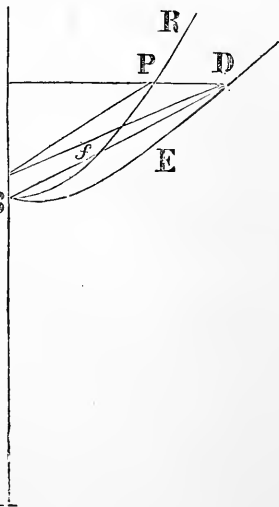


(e) 591. *Lemma.* Si sectionis conicæ latus rectum ad axem transversum pertinens perpetuò minuatur, et tandem evanescat, manente sectionis axe transverso, omnes ad axem ordinatæ perpetuò minuuntur et tandem evanescent, ac perimeter sectionis cum axe et umbilici cum axis verticibus coincidunt. Est enim, (ex conic.) ordinatæ cujusvis quadratum ad rectangulum abscissarum in ratione datâ lateris recti ad axem transversum; quare si manente axe transverso; adeoque, et abscissarum rectangulo, latus rectum perpetuò minuatur ac tandem evanescat, ordinatæ quadratum adeoque et ordinata ipsa perpetuò minuitur et tandem evanescit, et peri-

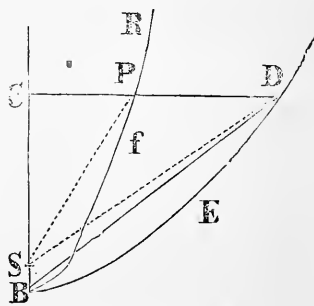
meter sectionis conicæ cum axe coincidit. Porro ordinata per umbilicum æqualis est dimidii lateri recto (Vid. sup. in Conicis, Theor. III. de Hyperbola et de Ellipsi et Cor. I. Theor. I. de Parab.) adeoque quadratum dimidii lateris recti est ad rectangulum ex distantia umbilici a verticibus, ut latus rectum ad axem transversum, unde rectangulum sub quartâ parte lateris recti et axe transverso æquatur rectangulo ex distantia umbilici a verticibus; quare evanescente latere recto et manente axe transverso, rectangulum sub distantia umbilici a verticibus nullum fit, et umbilicus cum proximo vertice coincidit.

loco A perpendiculariter cadendo tempore dato describit, si modo tempore proportionalis capiatur area $A B D$, et a puncto D ad rectam $A B$ demittatur perpendicularis $D C$ (^f). Q. e. i.

Cas. 2. Si figura illa $R P B$ hyperbola est, describatur ad eandem diametrum principalem $A B$ hyperbola rectangulari $B E D$: et (^g) quoniam areae $C S P$, $C B f P$, $S P f B$ sunt ad areas $C S D$, $C B E D$, $S D E B$, singulae ad singulas, in datâ ratione altitudinum $C P$, $C D$; et area $S P f B$ proportionalis est tempore quo corpus P movebitur per arcum $P f B$; erit etiam area $S D E B$ eidem tempore proportionalis. Minuatur latus rectum hyperbolæ $R P B$ in infinitum manente latere transverso, et coibit arcus $P B$ cum rectâ $C B$ et umbilicus S cum vertice B et recta $S D$ cum rectâ $B D$. Proinde area $B D E B$ proportionalis erit tempore quo corpus C recto descensu describit lineam $C B$. Q. e. i.



Cas. 3. (^h) Et simili argumento si figura $R P B$ parabola est, et eodem vertice principali B describatur alia parabola $B E D$, quæ semper maneat data, interea dum parabola prior, in cujus perimetro corpus P movetur, diminuto et in nihilum redacto ejus latere recto, conveniat cum lineâ $C B$; fiet segmentum parabolicum $B D E B$ proportionale tempore quo corpus illud P vel C descendet ad centrum S vel B . Q. e. i.



(^f) 392. *Perpendicularis D C.* Quoniam area $A B D$, semper proportionalis est tempore quo corpus ex puncto A per rectam $A C$ cadit, erit totius semicirculi area $A D E B$, proportionalis tempore quo corpus idem cadendo percurrit lineam $A B$, et divisim area segmenti $B D E B$, proportionalis tempore quo corpus ex A , cadendo percurrit lineam $C B$.

(^g) 393. *Quoniam area.* Nam 1°. triangula $C S P$, $C S D$ quorum est basis communis $C S$, sunt ut altitudines $C P$, $C D$. 2°. areae hyperbolæ $C B f P$, $C B E D$ sunt ut eadem altitu-

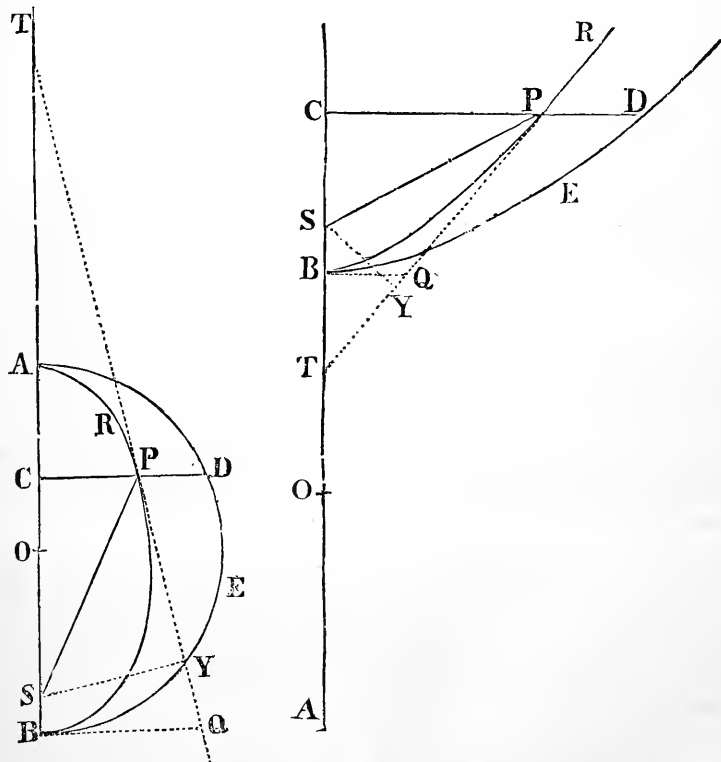
dines $C P$, $C D$ (374) unde 3°. divisim $C B f P = C S P$ ad $C B E D = C S D$. hoc est, sector $S P f B$ ad sectorem $S D E B$ ut $C P$ ad $C D$.

(^h) 394. *Simili argumento.* In Parabolâ 1°. $C S P : C S D = C P : C D$. 2°. sit latus rectum Parabolæ $B f P = l$, latus rectum Parabolæ $B E D = L$, erit, ex naturâ Parabolæ $C P^2 = l \times C B$ et $C D^2 = L \times C B$, adeoque $C P : C D = \sqrt{l} : \sqrt{L}$, hoc est, in ratione datâ, ergo area $C B f P$ est ad aream $C B E D$, in eadem ratione datâ $C P$ ad

PROPOSITIO XXXIII. THEOREMA IX.

Positis jam inventis, dico quod corporis cadentis velocitas in loco quovis C est ad velocitatem corporis centro B intervallo B C circumulum describentis, in subduplicatâ ratione quam A C distantia corporis a circuli vel hyperbolæ rectangulæ vertice ulteriore A, habet ad figuræ semidiametrum principalem $\frac{1}{2}$ A B.

Bisecetur A B, communis utriusque figuræ R P B, D E B diameter, in O; et agatur recta P T, quæ tangat figuram R P B in P, atque etiam



secet communem illam diametrum A B (si opus est productam) in T; sitque S Y ad hanc rectam, et B Q ad hanc diametrum perpendicularis,

C D; Quare 5°. divisim S P f B : S D E B = C P : C D. Cætera se habent ut in demonstratione casûs secundî.

395. *Scholium.* Corporis per rectam C S, ad centrum S, cadentis velocitas in loco quovis C, est ad velocitatem corporis alterius ad eandem a

centro distantiam circumulum describentis, vel in ratione minore quam $\sqrt{2}$, ad 1, vel in ratione majore aut in eâ ipsâ ratione. In 1°. casu recta S C, usurpanda est pro ellipsi latitudinis evanescentis; in 2°. casu, recta S C, est hyperbola cujus latus rectum evanescit; in 3°. casu, recta

atque figuræ R P B latus rectum ponatur L. Constat per Corol. IX. Prop. XVI. quod corporis in lineâ R P B circa centrum S moventis velocitas in loco quovis P sit ad velocitatem corporis intervallo S P circa idem centrum circulum describentis in subduplicatâ ratione rectanguli $\frac{1}{2} L \times S P$ ad S Y quadratum. Est autem ex conicis A C B ad C P q ut $2 A O$ ad L, ideoque $\frac{2 C P q \times A O}{A C B}$ æquale L. Ergo velocitates illæ

sunt ad invicem in subduplicatâ ratione $\frac{C P q \times A O \times S P}{A C B}$ ad S Y

quad. ⁽ⁱ⁾ Porro ex conicis est C O ad B O ut B O ad T O, et compositè vel divisim ut C B ad B T. Unde vel dividendo vel componendo fit B O — vel + C O ad B O ut C T ad B T, id est, A C ad A O ut C P ad B Q; indeque $\frac{C P q \times A O \times S P}{A C B}$ æquale est, $\frac{B Q q \times A C \times S P}{A O \times B C}$.

Minuatur jam in infinitum figuræ R P B latitudo C P, sic ut punctum P coëat cum puncto C, punctumque S cum puncto B, et linea S P cum linea B C, lineaque S Y cum lineâ B Q; et corporis jam rectâ descendantis in lineâ C B velocitas fiet ad velocitatem corporis centro B intervallo B C circulum describentis; in subduplicatâ ratione ipsius $\frac{B Q q \times A C \times S P}{A O \times B C}$

ad S Y q, hoc est (neglectis æqualitatis rationibus S P ad B C et B Q q ad S Y q) in subduplicatâ ratione A C ad A O sive $\frac{1}{2} A B$. Q. e. d.

Corol. 1. Punctis B et S coëuntibus, fit T C ad T S ut A C ad A O.

Corol. 2. ^(k) Corpus ad datam a centro distantiam in circulo quovis revolvens, motu suo sursum verso ascendet ad duplam suam a centro distantiam.

S C, est parabola lateris recti evanescentis. Hæc omnia patent ex Coroll. 7^a. Prop. XVI.

⁽ⁱ⁾ 396. Porro ex conicis. (Vid. Lem. V. de Conicis, Cor. 2.) est T O : A O = A O : C O et quia A O = B O, invertendo et permutando est C O : B O = B O : T O et in Ellipsi compositè C O : B O = C B (seu C O + B O) : B T (seu B O + T O); et in hyperbolâ divisim, C O : B O = C B (seu C O — B O) : B T (seu B O — T O); Quarè in utraque sectione, C O : B O = C B : B T. Undè in ellipsi dividendo fit A C, seu B O — C O, aut A O — C O : B O = C T, seu B T — C B : B T, et in hyperbolâ, componendo A C seu C O + B O : B O = C T seu C B + B T : B T; adeoque in utrâque sectione A C : B O seu A O = C T : B T. Sed propter similitudinem triangulorum T C P, T B Q, C T : B T = C P : B Q, ergò A C :

$$A O = C P : B Q, \text{ et } C P = \frac{B Q \times A C}{A O},$$

$$\text{ac } C P^2 = \frac{B Q^2 \times A C^2}{A O^2}, \text{ indèque}$$

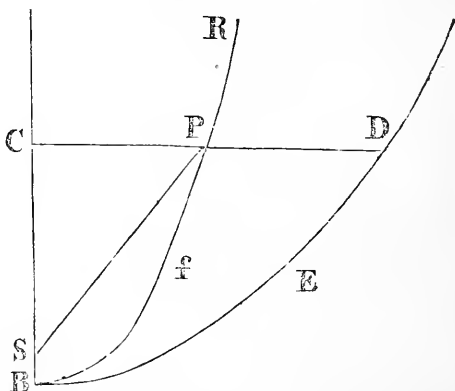
$$\frac{C P^2 \times A O \times S P}{A C \times C B} = \frac{B Q^2 \times A C \times S P}{A O \times C B}.$$

^(k) 397. Corpus ad datam. Si fuerit B E D circulus, et punctum C coincidat cum puncto O, erit A C = A O = $\frac{1}{2} A B$, adeoque velocitas per radium A O cadendo acquisita est æqualis velocitati corporis centro B intervallo B O = A O circulum describentis. Undè si corpus illud, ad datam a centro distantiam B O in circulo revolvens, sursum per O A, projiciatur cum eâ velocitate quâ circulum describit, seu quam per A O cadendo acquisivit, ascendet ad punctum A, per spatium O A (25) seu ad duplam suam a centro B distantiam B A = 2 B O.

PROPOSITIO XXXIV. THEOREMA X

Si figura B E D parabola est, dico quod corporis cadentis velocitas in loco quovis C æqualis est velocitati quâ corpus centro B dimidio intervalli sui B C circum uniformiter describere potest.

Nam corporis parabolam R P B circa centrum S describentis velocitas in loco quovis P (per Corol. VII. Prop. XVI.) æqualis est velocitati corporis dimidio intervalli S P circum circa idem centrum S uniformiter describentis. Minuatur parabolæ latitudo C P in infinitum eo, ut arcus parabolicus P f B cum rectâ C B, centrum S cum vertice B, et intervallum S P cum intervallo B C coincidat, et constabit propositio. Q. e. d.



PROPOSITIO XXXV. THEOREMA XI.

Isdem positis; dico quod area figuræ D E S, radio indefinito S D descripta, æqualis sit area quam corpus, radio dimidium lateris recti figuræ D E S æquante, circa centrum S uniformiter gyrando, eodem tempore describere potest.

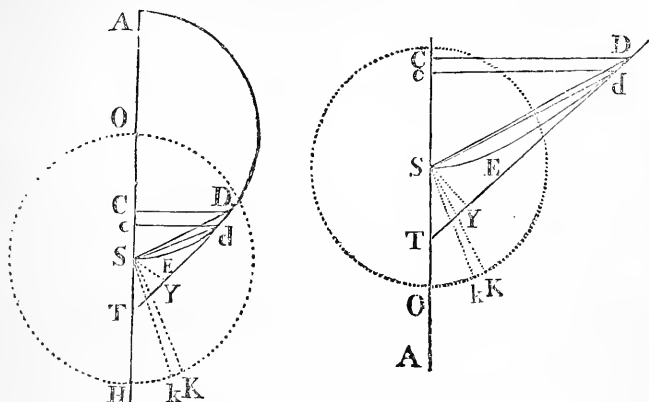
Nam concipe corpus C quam minimâ temporis particulâ lineolam C c

598. Corol. 1. Velocitas in puncto quovis C, est ad velocitatem in alio puncto c, in ratione subduplicatâ rectanguli A C \times B C, ad rectangulum A c \times B c. Nam velocitas in C, est ad velocitatem corporis intervallo B C circum describentis ut $\sqrt{A C}$ ad $\sqrt{\frac{1}{2} A B}$, (per hanc Prop.); velocitas corporis intervallo B C circum describentis est ad velocitatem corporis intervallo B c circum describentis, (per Cor. 6. Prop. IV.) reciprocè in ratione subduplicatâ radiorum, hoc est, ut $\sqrt{B c}$ ad $\sqrt{B C}$; denique velocitas corporis intervallo B c circum describentis est ad velocitatem in c corporis ex A cadentis ut $\sqrt{\frac{1}{2} A B}$ ad $\sqrt{A c}$ (per hanc Propositionem); ergo (per compositionem rationum) est velocitas in C ad velocitatem in

c, in ratione compositâ ex ratione $\sqrt{A C}$ ad $\sqrt{\frac{1}{2} A B}$, ratione $\sqrt{B c}$ ad $\sqrt{B C}$, et ratione $\sqrt{\frac{1}{2} A B}$ ad $\sqrt{A c}$, sive ut $\sqrt{A C \times \frac{1}{2} A B}$ ad $\sqrt{A c \times \frac{1}{2} A B}$, hoc est, in ratione subduplicatâ rectanguli A C \times B c ad rectangulum A c \times B C. Q. e. d.

599. Corol. 2. Si fuerit B f P parabola, corporis in ea moti velocitas in loco quovis P, erit ad velocitatem corporis ad distantiam S P, circum describentis in ratione $\sqrt{2}$, ad 1; si fit ellipsis in minori ratione, in majori verò si fuerit hyperbola (per Cor. 7. Prop. XVI.) et latitudine orbis imminuta in infinitum ut coincidat B f P cum axe B C, erit corporis cadentis velocitas in loco quovis C ad velocitatem corporis ad distantiam B C circum describentis ut $\sqrt{2}$ ad 1. adeoque A C : $\frac{1}{2} A B = 2 : 1$ in 2^o. casu ratio A C, ad $\frac{1}{2} A B$, minor erit quam ratio 2 ad 1; in 3^o. casu major, et contrâ.

cadendo describere, et interea corpus aliud K, uniformiter in circulo O K k circa centrum S gyrando, arcum K k describere. Erigantur per-



pendicula C D, c d occurrentia figuræ D E S in D, d. Jungantur S D, S d, S K, S k et ducatur D d axi A S occurrens in T, et ad eam demittatur perpendicularum S Y.

Cas. 1. Jam si figura D E S circulus est vel hyperbola rectangula, bisecetur ejus transversa diameter A S in O, et erit S O dimidium lateris recti. ⁽¹⁾ Et quoniam est T C ad T D ut C c ad D d, et ^(m) T D ad T S ut C D ad S Y, erit ex æquo T C ad T S ut C D × C c ad S Y × D d. Sed (per Corol. 1. Prop. XXXIII.) ⁽ⁿ⁾ est T C ad T S ut A C ad A O, puta si in coitu punctorum D, d capiantur linearum rationes ultimæ. Ergo A C est ad A O seu S K ut C D × C c ad S Y × D d. Porro corporis descendens velocitas in C est ad velocitatem corporis circulum intervallo S C circa centrum S describentis in subduplicatâ ratione A C ad A O vel S K (per Prop. XXXIII.) Et hæc velocitas ad velocitatem corporis describentis circulum O K k in subduplicatâ ratione S K ad S C (per Corol. VI. Prop. IV.) et ex æquo velocitas prima ad ultimam, hoc est lineola C c ad arcum K k in subduplicatâ ratione A C ad S C, ^(o) id est in ratione A C ad C D. Quare est C D × C c æquale A C × K k, et ^(p) propterea A C ad S K ut A C × K k ad S Y ×

⁽¹⁾ * Et quoniam est T C ad T D ut C c ad D d. Quia in Triangulo T C D, est c d parallela basi C D, ideoque T C : T D ut partes correspondentes C c, D d.

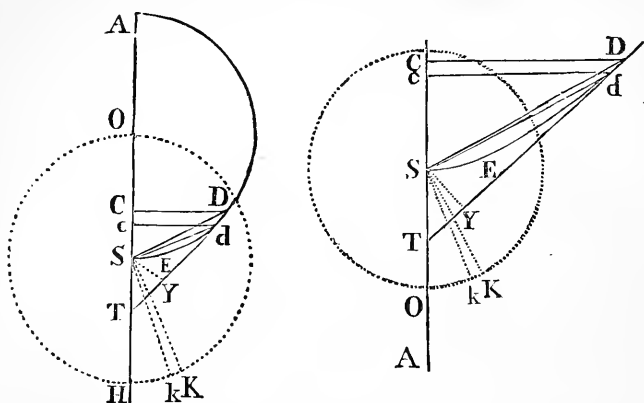
^(m) * Et T D ad T S ut C D ad S Y. Sunt enim propter angulos Y, et C, rectos et angulum T, communem, triangula T C D, T S Y, similia.

⁽ⁿ⁾ * Est T C : T S. Nam punctis D, d, coëuntibus, fit T D, tangens; adeoque (296.) T C : T S = A C : A O.

^(o) * In ratione A C ad S C, id est in ratione A C ad C D. Est enim S E D, circulus, vel hyperbola æquilatera cujus vertexes S et A, sed in circulo et hyperbolâ æquilaterâ ob axium æqualitatem est C D² = A C × S C, et proinde A C : C D = C D : S C, et hinc A C ad C D, in ratione subduplicatâ A C ad S C.

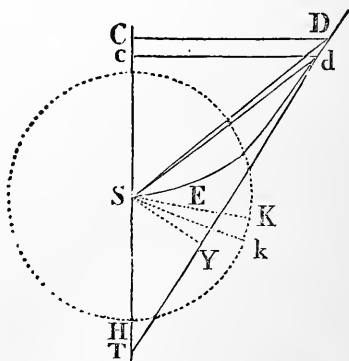
^(p) * Et propterea. Nam ex superius demonstratis A C : S K = C D × C c : S Y × D d.

D d, indeque $SK \times Kk$ æquale $SY \times Dd$, et $\frac{1}{2} SK \times Kk$ æquale $\frac{1}{2} SY \times Dd$, id est area $KS k$ æqualis areæ $SD d$. Singulis igitur



temporis particulis generantur arearum duarum particulæ $KS k$, et $SD d$, quæ, si magnitudo earum minuatur et numerus augeatur in infinitum, rationem obtinent æqualitatis, et propterea (per Corollarium Lemmatis IV.) areæ totæ simul genitæ sunt semper æquales: Q. e. d.

Cas. 2. Quod si figura $DE S$ parabola sit, invenietur esse ut supra $CD \times Cc$ ad $SY \times Dd$ ut TC ad TS , hoc ^(q) est ut 2 ad 1, ideoque $\frac{1}{4} CD \times Cc$ æquale esse $\frac{1}{2} SY \times Dd$. Sed corporis cadentis velocitas in C æqualis est velocitati quâ circulus intervallo $\frac{1}{2} SC$ uniformiter describi possit (per Prop. XXXIV.) Et hæc velocitas ad velocitatem quâ circulus radio SK describi possit, hoc est, lineola Cc ad arcum Kk (per Corol. VI.



Prop. IV.) est in subduplicatâ ratione SK ad $\frac{1}{2} SC$, id ^(r) est, in ratione SK ad $\frac{1}{2} CD$. Quare est $\frac{1}{2} SK \times Kk$ æquale $\frac{1}{4} CD \times Cc$, ideoque æquale $\frac{1}{2} SY \times Dd$, hoc est, area $KS k$ æqualis areæ $SD d$, ut supra. Q. e. d.

^(q) * Hoc est ut 2 ad 1. Cum enim sit TD tangens, CD ordinata, SC abscissa, est ex naturâ Parabolæ $TS = SC$, adeoque $TC : TS = 2 : 1$.

^(r) * Id est in ratione SK , ad $\frac{1}{2} CD$. Nam (ex hyp.) SK , æqualis est dimidio lateri recto, quare ex naturâ parabolæ $2 SK \times SC = CD^2$; et $\frac{1}{2} SC \times SK = \frac{1}{4} CD^2$. Unde

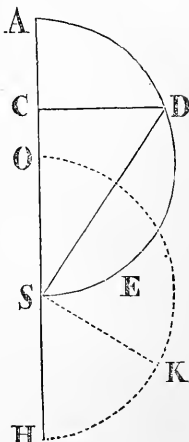
$SK : \frac{1}{2} CD = \frac{1}{2} CD : \frac{1}{2} SC$, et hinc SK , ad $\frac{1}{2} CD$ in ratione subduplicatâ SK ad $\frac{1}{2} SC$.

400. Corol. 1. Si fuerit SED circulus cujus diameter SA , corpus ex loco A demissum et solâ vi centripetâ sollicitatum cadendo percurreret totam diametrum AS , eodem tempore, quo corpus aliud ad dimidiam distantiam SO , describet semicirculum OKH ; sunt

PROPOSITIO XXXVI. PROBLEMA XXV.

Corporis de loco dato A cadentis determinare tempora descensus.

Super diametro A S distantia corporis a centro sub initio, describe semicirculum A D S, ut et huic æqualem semicirculum O K H circa centrum S. De corporis loco quovis C erige ordinatim applicatam C D. Junge S D, et areæ A S D æqualem constitue sectorem O S K. ^(s) Patet per Prop. XXXV. quod corpus cadendo describet spatium A C eodem tempore quo corpus aliud, uniformiter circa centrum S gylando, describere potest arcum O K. Q. e. f.



enim areæ semicircularum O K H et S E A æquales, tempus verò quo corpus ex A demissum cadendo percurrit spatium quodvis A C est ad tempus quo percurrit A S, ut area A S D ad semicirculum A D E S, sive ut sector O S K ad sectorem quem describit corpus in circulo O K H revolvens æqualem semicirculo A D E S, qui sector erit ipse semicirculus O K H.

401. *Corol.* 2. Si corpus ad distantiam A S, circulum describens omni motu revolutionis privaretur, et ad centrum virium S, solâ vi centripetâ urgeretur, tempus quo ex A usque ad S cadendo perveniret, esset ad tempus unius revolutionis in circulo ut 1, ad $4\sqrt{2}$: est enim tempus periodicum corporis ad distantiam S O circulum describentis (hoc est, duplum ejus temporis quo corpus ex A, cadendo percurrit A S, (400)) ad tempus periodicum corporis ad distantiam A S ($= 2 S O$) in circulo revolventis ut Radices quadratæ cuborum distantiarum 1 et 2, sive ut 1, ad $\sqrt{8}$ (191), hoc est, ut 1 ad $2\sqrt{2}$; ergo tempus quo corpus cadendo percurrit A S, est ad tempus periodicum corporis ad distantiam A S in circulo revolventis ut $\frac{1}{2}$ ad $2\sqrt{2}$, hoc est, ut 1 ad $4\sqrt{2}$.

402. *Scholium.* Si planetarum orbitas circulares esse supponamus, vimque centripetam quâ in suis orbitis retinentur, in duplicatâ ratione distantiarum a centro decrescere, ex datis temporibus periodicis, facile erit tempora definire quibus usque ad centrum sui motus cadendo pervenirent. Exempli causâ, cum tempus periodicum lunæ circa terram revolventis sit dierum 27. hor. 7. minutorum primorum 43, hoc est, minutorum primorum 39343, erit $4\sqrt{2}$,

ad 1, hoc est, quam proximè 565685, 100000, ut 39343, ad 6955. 5, seu dies 4, hor. 19, min. prim. 55, et secund. 30, tempus quo luna cadendo ad centrum telluris perveniret.

^(s) * Patet per Prop. XXXV. Cum enim semicircularum A D S, O K H, et sectorum O S K, A S D, areæ æquales sint respectivè, erit quoque sector H S K æqualis segmento S E D, adeoque (401.) tempus quo corpus ex A cadendo percurrit C S, æquatur tempori, quo corpus aliud in circulo O K H revolvens describit arcum K H, et quoniam tempus per A S cadendo æquatur tempori quo corpus revolvens totum semicirculum O K H, describit (401), erit tempus per A C, æquale tempori per arcum O K.

403. *Corol.* Arcus O K, æqualis est summae arcus A D et lineæ C D. Est enim sector A S D, æqualis sectori A O D, + triangulo D O S, sive $\frac{1}{2} A O \times A D + \frac{1}{2} A O \times C D$: sector verò O S K, $= \frac{1}{2} S O \times O K = \frac{1}{2} A O \times O K$, sed est sector O S K $= A S D$. Quare $\frac{1}{2} A O \times O K = \frac{1}{2} A O \times A D + \frac{1}{2} A O \times C D$, atque adeò $O K = A D + C D$. Si itaque fiat ut radius ad arcum grad. 57. 29578, qui radio æqualis est, ita C D, ad 4^{um} . B, erit B arcus rectæ C D æqualis, et obtinebitur $O K = A D + B$. Hinc dato tempore quo corpus datam A S ex puncto A cadendo percurrit, invenitur tempus quo datam rectæ A S partem A C describit, si fiat ut semicirculus O K H, seu grad. 180., ad arcum A D + B, seu O K, ita tempus quo corpus ex A cadendo percurrit A S, ad tempus quo percurrit A C.

PROPOSITIO XXXVIII. THEOREMA XII.

A geometric diagram showing a circular segment. The left boundary is a vertical line with points A at the top, C in the middle, S below C, and E at the bottom. The right boundary is a circular arc with points P, R, and F marked on it. Lines connect A to P, C to P, S to P, S to R, and S to F. There are also horizontal lines connecting C to P and S to F. The diagram is used to illustrate a geometric proof or construction.

Corol. 1. (*) Hinc æqualia sunt tempora, quibus corpus unum de loco A cadendo pervenit ad centrum S, et corpus aliud revolvendo describit arcum quadrantalem A D E.

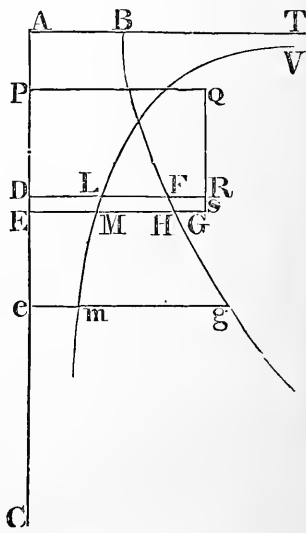
Corol. 2. Proinde æqualia sunt tempora omnia quibus corpora de locis quibusvis ad (y) usque centrum cadunt. Nam revolvantium tempora omnia periodica (per Corol. III. Prop. IV.) æquantur.

PROPOSITIO XXXIX. PROBLEMA XXVII.

Positâ cujuscumque generis vi centripetâ, et concessis figurarum curvilinearum quadraturis, requiritur corporis rectâ ascendentis vel descendantis tum velocitas in locis singulis, tum tempus quo corpus ad locum quemvis perveniet: Et contra.

De loco quovis A in rectâ A D E C cadat corpus E, (z) deque loco ejus E erigatur semper perpendicularis E G, vi centripetæ in loco illo ad centrum C tendenti proportionalis: Sitque B F G linea curva quam punctum G perpetuo tangit. Coincidat autem E G ipso motus initio cum perpendiculari A B, et erit corporis velocitas in loco quovis E (a) ut recta, quæ potest aream curvilineam A B G E. Q. e. i.

In E G capiatur E M rectæ, quæ potest aream A B G E, reciprocè proportionalis, et sit V L M linea curva, quam punctum M perpetuo tangit, et cujus asymptotos est recta A B producta; et erit tempus, quo corpus C cadendo describit lineam A E, ut area curvilinea A B T V M E. Q. e. i.

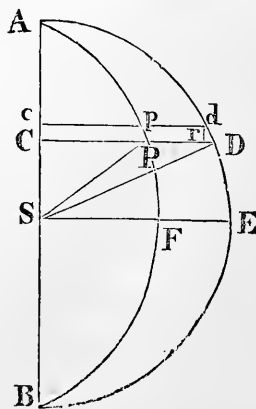


(x) * *Corol. 1.* Hinc æqualia. Nam per Cor. 2. Prop. X. tempora revolutionum in ellipsis quibusvis A P F, A D B, adeoque et tempora per ellipseon quadrantes A P F seu A S, A D E, sunt æqualia.

(y) * *Ad usque centrum.* Ex quiete cadunt.

405. Æqualia sunt tempora quibus corpus unum de loco A cadendo pervenit ad locum C, et corpus aliud revolvendo describit arcum circuli A D; Cum enim corpus in circulo uniformiter revolvatur, erit tempus per A D ad tempus per A E seu ad tempus per A S, ut arcus A D, ad quadrantem A E, sed est etiam tempus per A C, ad tempus per A S, ut arcus A D, ad quadrantem A E, ergo tempus per A C, æquatur tempori per A D.

(z) * *Deque loco ejus E.* Id est, per omnia lineæ A C puncta erigantur perpendiculara ut E G, vi centripetæ in singulis illis punctis



Etenim in rectâ A E capiatur linea quam minima D E datæ longitudinis, sitque D L F locus lineæ E M G, ubi corpus versabatur in D et si ea sit vis centripeta, ut recta, quæ potest aream A B G E, sit ut descendens velocitas: erit area ipsa in duplicatâ ratione velocitatis, id est, si pro velocitatibus in D et E, scribantur V et V + I, erit area A B F D ut V V, et area A B G E ut V V + 2 V I + I I, et divisim area D F G E ut 2 V I + I I, ideoque $\frac{D F G E}{D E}$ ut $\frac{2 V I + I I}{D E}$, id (b)

est si primæ quantitatum nascentium rationes sumantur, longitudo D F ut quantitas $\frac{2 V I}{D E}$, ideoque etiam ut quantitatis hujus dimidium $\frac{I \times V}{D E}$.

Est autem tempus, quo corpus cadendo describit lineolam D E, ut lineola illa directè et velocitas V inversè, estque vis ut velocitatis incrementum I directè et tempus inversè, ideoque si primæ nascentium rationes sumantur, ut $\frac{I \times V}{D E}$, hoc est, ut longitudo D F. Ergo vis ipsi D F vel E G proportionalis facit ut corpus eâ cum velocitate descendat, quæ sit ut recta quæ potest aream A B G E. Q. e. d.

(c) Porro cum tempus, quo quælibet longitudinis datæ lineola D E describatur, sit ut velocitas inversè, ideoque inversè ut linea recta quæ potest aream A B F D; (d) sitque D L, atque ideo area nascent D L M E, ut eadem linea recta inversè: erit tempus ut area D L M E,

proportionalia, sitque B F G curva ad quam omnia illa perpendiculara terminentur. Possunt autem perpendiculara illa ad arbitrium assumi, dummodò singula vi centripetæ in singulis locis proportionalia sint.

(a) *Ut recta, quæ potest aream curvilineam A B G E.* In prioribus Editionibus erat, *ut areæ curvilineæ A B G E latus quadratum*; hæ scilicet phrasæ synonymæ sunt; phrasis quæ hic juxta Editionem Londinensem adhibetur, veteribus Geometris est familiaris: Ea autem linea quæ potest figuram datam, est linea cujus quadratum est æquale illi figuræ datæ.

(b) 406. * *Id est, si primæ quantitatum nascentium, &c.* Seu coëuntibus punctis, D et E, F et G, fit area D F G E, æqualis rectangulo D F × D E (107) et velocitatis finitæ V, incrementem nascentis I, evanescit respectu V, (107) ac proinde cum sit I : V = II : VI, quadratum II, evanescit respectu rectanguli V I, aut 2 V I; Quarè in hoc casu $\frac{D F G E}{D E}$, $\frac{D F \times D E}{D E} = D F$, et $\frac{2 V I + I I}{D E} =$

$\frac{2 V I}{D E}$; Est igitur longitudo D F, ut quanti-

tas $\frac{2 V I}{D E}$, ideoque etiam, ut quantitatis hujus dimidium $\frac{I \times V}{D E}$: Quoniam autem velocitas

per spatium evanescens D E, est uniformis (145), si tempus quo D E percurritur, dicatur T, erit $T = \frac{D E}{V}$, (5). Est autem vis ut $\frac{I}{T}$

(13) adeoque si loco T ponatur $\frac{D E}{V}$, erit vis ut $\frac{I \times V}{D E}$, hoc est, ut longitudo D F, ergò vis ipsi D F, vel E G, &c.

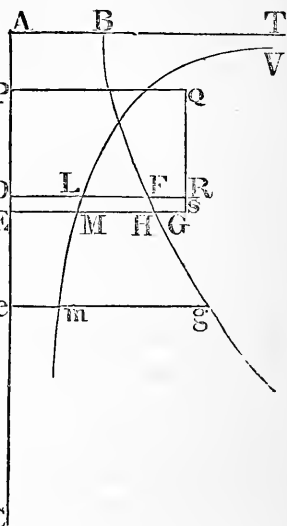
(c) * *Porro cum tempus.* Tempus enim est ut spatium uniformiter percursum directè et velocitas inversè (5), quarè si spatium constans fuerit, tempus est ut velocitas inversè.

(d) * *Sitque D L.* Est enim D L, ut D L in constantem D E ducta, hoc est, ut area nascent D L M E, sed D L est ut latus quadratum areæ A B F D inversè (per constr.) ergò area nascent D L M E, est ut idem latus quadratum inversè, hoc est, ut velocitas inversè, sive, ut tempus per D E. Quarè summa omnium temporum est ut summa omnium arearum nascentium. Hoc est, &c.

et summa omnium temporum ut summa omnium arearum, hoc est (per Corol. Lem. IV.) tempus totum quo linea A E describitur ut area tota A T V M E. Q. e. d.

Corol. 1. Si P sit locus, de quo corpus cadere debet, ut urgente aliquâ uniformi vi centripetâ notâ (qualis vulgo supponitur gravitas) velocitatem acquirat in loco D æqualem velocitati, quam corpus aliud vi quâcunque cadens acquisivit eodem loco D, et in perpendiculari D F capiatur D R, quæ sit ad D F ut vis illa uniformis ad vim alteram in loco D, et compleatur rectangulum P D R Q, eique æqualis abscindatur area A B F D; erit A locus de quo corpus alterum cecidit. Namque completo rectangulo D R S E, (e) cum sit area A B F D ad aream D F G E ut V V ad 2 V I, ideoque ut $\frac{1}{2}$ V ad I, id est, ut semissis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis vi inæquabili cadentis; (f) et similiter area P Q R D ad aream D R S E ut semissis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis uniformi vi cadentis; sintque incrementa illa (ob æqualitatem temporum nascentium) ut vires generatrices, id est, ut ordinatim applicatæ D F, D R, ideoque ut areæ nascentes D F G E, D R S E; erunt ex æquo areæ totæ A B F D, P Q R D ad invicem ut semisses totarum velocitatum, et propterea, ob æqualitatem velocitatum, æquantur.

Corol. (g) 2. Unde si corpus quodlibet de loco quocunque D datâ



(e) * Cum (coëuntibus punctis D, E) sit area A B F D ad aream D F G E, ut V V, ad 2 V X I; Si enim A sit locus ex quo corpus cadere debet ut quâcunque ut eandem in D velocitatem V acquisiverit ac si ex P vi gravitatis decidisset erit area A B F D, ut V V, et area D F G E, ut 2 V I + I I, hoc est, (406) ut 2 V I. Quare A B F D : D F G E = V V : 2 V I = $\frac{1}{2}$ V : I.

(f) * Et similiter area P Q R D ad aream D R S E, hoc est, linea P D ad lineam D E (propter altitudinem communem D R = S E) ut semissis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis uniformi vi cadentis, scilicet cum velocitas in D sit V, ejus incrementum in E sit X, ex naturâ gravitatis altitudines ex quibus corpus cadit sunt ut quadrata velocitatum in fine lapsus acquisitarum, ergo erit P D

ad P E ut V V ad V V + 2 V X + X², et dividendo P D : D E = V V : 2 V X + X² = (et omisso X² ut pote infinite parvo) V V : 2 V X = $\frac{1}{2}$ V : X; unde P Q R D : D R S E = $\frac{1}{2}$ V : X, sive invertendo D R S E : P Q R D = X : $\frac{1}{2}$ V; sunt verò incrementa illa I et X (15) ut vires generatrices id est ut D F ad D R, sive ut D F G E ad D R S E. Est ergo per hanc demonstrationem.

A B F D : D F G E = $\frac{1}{2}$ V : I
D F G E : D R S E = D F : D R = I : X
D R S E : P Q R D = X : $\frac{1}{2}$ V
Unde ex compositione rationum A B F D : P Q R D = $\frac{1}{2}$ V × I × X : I × X × $\frac{1}{2}$ V sive in ratione æqualitatis.

(g) * Corol. 2. demonstratur. Sit A punctum ex quo corpus cadere debet ut acquirat in loco D velocitatem cum quâ sursum vel deorsum

cum velocitate vel sursum vel deorsum projiciatur, et detur lex vis centripetæ, inveniatur velocitas ejus in alio quovis loco e, erigendo ordinatam e g, et capiendo velocitatem illam ad velocitatem in loco D ut est recta, quæ potest rectangulum P Q R D areâ curvilineâ D F g e vel auctum, si locus e est loco D inferior, vel diminutum, si is superior est, ad rectam quæ potest rectangulum solum P Q R D.

Corol. 3. Tempus quoque innotescet erigendo ordinatam e m reciproce proportionalem lateri quadrato ex P Q R D + vel — D F g e, et capiendo tempus quo corpus descripsit lineam D e ad tempus quo corpus alterum vi uniformi cecidit a P et cadendo pervenit ad D, ut area curvilinea D L m e ad rectangulum 2 P D × D L. Namque tempus quo corpus vi uniformi descendens descripsit lineam P D est ad tempus quo corpus idem descripsit lineam P E in ^(h) subduplicatâ ratione P D ad P E, id est (lineola D E jamjam nascente) in ratione P D ad P D + $\frac{1}{2}$ D E seu 2 P D ad 2 P D + D E, et ⁽ⁱ⁾ divisim, ad tempus quo corpus idem descripsit lineolam D E ut 2 P D ad D E, ideoque ut rectangulum 2 P D × D L ad aream D L M E; estque tempus quo corpus utrumque descripsit lineolam D E ad tempus quo corpus alterum inæquabili motu descripsit lineam D e, ut area D L M E ad aream D L m e, et ex æquo tempus primum ad tempus ultimum ut rectangulum 2 P D × D L ad aream D L m e.

projicitur, erit, (ex Dem.) area A B g e proportionalis quadrato velocitatis corporis in loco e; Est autem (ex Dem.) area A B F D, æqualis rectangulo P Q R D, adeoque area A B g e = P Q R D + D F g e si locus e loco D inferior fuerit, et A B g e = P Q R D — D F g e, si locus e loco D superior, hoc est, si corpus sursum projectum sit; ergo velocitas corporis in loco e, est ut $\sqrt{P Q R D \mp D F g e}$; cumque sit velocitas in D, ut $\sqrt{A B F D}$, sive ut huic æqualis $\sqrt{P Q R D}$ (ex Dem.) erit velocitas in e. ad velocitatem in D, ut $\sqrt{P Q R D \mp D F g e}$, ad $\sqrt{P Q R D}$.

^(h) * In subduplicatâ ratione P D, ad P E (27), id est, lineola D E, jamjam nascente in ratione P D, ad P D + $\frac{1}{2}$ D E; quadratis enim his ultimis terminis fiet P D² : P D² + P D × D E + $\frac{1}{4}$ D E²; et cum sit P D quantitas finita; et D E nascentis, evanescit (107) $\frac{1}{4}$ D E² respectu P D × D E; adeoque P D × D E + $\frac{1}{4}$ D E² = P D × D E. Unde est P D² : P D² + P D × D E + $\frac{1}{4}$ D E² = P D² : P D² + P D × D E = P D : P D + D E, seu P E; est igitur P D : P E in ratione duplicatâ P D ad P D + $\frac{1}{2}$ D E, atque adeo P D ad P D + $\frac{1}{2}$ D E, in ratione subduplicatâ P D, ad P E.

⁽ⁱ⁾ * Et divisim. Tempus per P D, vi uniformi descriptum est ad tempus per D E, ut 2 P D, ad D E, adeoque ut rectangulum 2 P D × D L, ad rectangulum D E × D L, seu ad aream D L M E; tempus per rectam P D, vi uniformi descriptam sit T, tempus per D E, sit t, et tempus per D e, sit t, erit (ex Dem.) T : t = 2 P D × D L : D L M E, estque idem tempus t, quo utrumque corpus describit lineam D E, siquidem utriusque eadem est velocitas in D : sed (ex constructione) tempus quo corpus inæquabili motu describit lineam D E est ad tempus quo describit lineam D e, ut area D L M E, ad aream D L m e, ergo t : t = D L M E : D L m e; unde ex æquo T : t = 2 P D × D L : D L m e.

407. Sit spatium a corpore cadente descriptum A E = x, velocitas in E acquisita = v, tempus quo A E, percurritur = t, vis centripeta in E, hoc est, E G = y, erunt d x, d v, d t, quantitarum x, v, t, fluxiones seu incrementa nascentia vel evanescentia (146. 158), cumque velocitas per spatium nascentis D E, sit uniformis

(145) erit $v = \frac{d x}{d t}$ (5), ac proinde velocitatis incrementum $d v = \frac{d d x}{d t}$, si sumatur d t, con-

stans (164) sed est (13) $y = \frac{d v}{d t}$, adeoque

si loco $d v$, substituat $\frac{d d x}{d t}$, invenietur $y =$

$\frac{d d x}{d t^2}$. Hæ sunt formulæ quas tradidit Varig-

nonius in Comm. Paris. an. 1700. Harum formularum ope, datâ inter duas ex variabilibus quatuor y, x, v, t , æquatione quâvis, obtinebuntur tres æquationes quæ simul quatuor duntaxat variabiles complectentur, ex quibus proinde æquationibus per calculum fluxionum et solitas reductiones inveniri poterit æquatio inter duas quaslibet ex quatuor variabilibus y, x, v, t , ut demonstravit Varignonius in Comm. Paris. an. 1700, qui in iisdem Commentariis an. 1707. 1720. præclara de ascensu et descensu corporum perpendiculari theorematâ edidit.

408. Corol. Cum sit juxta superiores formulâs $d t = \frac{d x}{v}$, et $d t = \frac{d v}{y}$, ac proinde $\frac{d x}{v}$

$= \frac{d v}{y}$, vel $y d x = v d v$, erit S. $y d x = \frac{1}{2}$

2. Sed $y d x = E G \times D E$, seu fluxioni areæ $A B G E$; ergo (147) S. $y d x = \text{areæ } A B G E$, $= \frac{1}{2} v^2$, et $v = \sqrt{2 A B G E}$. Est igitur ob constantem 2, velocitas in loco E, ut recta quæ potest aream curvilineam $A B G E$. Hinc est 1^{us}. casus Prop. XXXIX. Newt.

Quoniam verò $d t = \frac{d x}{v}$ et $v = \sqrt{2 A B G E}$, erit $d t = \frac{d x}{\sqrt{2 A B G E}}$; quare si capitur

$E M = \frac{1}{\sqrt{2 A B G E}}$, erit $d t = E M \times d x = E M \times D E$, et sumptis utrinque fluentibus $t = A L M E$. Hic est casus 2^{us}. Prop. XXXIX. Newt.

409. Superior expressio vis

centripetæ $y = \frac{d v}{d t}$ si vis cen-

tripetæ consideretur ut gravitas in centrum, supponit massam corporum aut eandem esse aut ponderibus proportionalem. Verùm si pondera non sint massis proportionalia, diversæque inter se massæ conferantur, tum habenda est massarum ratio ut determinetur tota corporis gravitas, seu vis tota quâ centrum versus urgetur. Sit vis illa $= y$, et massa $= m$,

erit quidem semper $v = \frac{d x}{d t}$

(5), at fiet $y = \frac{m d v}{d t}$. Ete-

nim vis centripetæ considerari potest ut potentia motrix, quæ corpori indesinenter applicata, motum in eo suâ actione producit, quæque tempusculo evanescente eadem constanter permanet, et uniformiter agit (117). Porro factum ex

potentiâ motrice uniformiter agente et tempore actionis æquivaleret quantitati actionis; crescit enim actionis quantitas cum potentiâ motrice et tempore actionis proportionaliter, et factum ex massâ corporis et celeritate, seu quantitas motus producti est id quod actione illâ effectum est, seu quantitati actionis æquipollet, cum necessarius sit nexus inter quantitatem actionis et quantitatem effectûs et alter alteri æquivalet. Quare

$$y d t = m d v, \text{ et } y = \frac{m d v}{d t}.$$

410. Si itaque pondera non supponantur massis proportionalia, et corpora duo A, a , quorum massæ M, m ad idem vel diversa virium centra C , perpendiculariter cadant, earumque vires centripetæ in singulis locis E, e , sint $Y = E G, y = e g$, velocitates V, v , spatia descripta $X = A E, x = a e$, tempora quibus descripta sunt

T, t , invenietur (409) $v = \frac{d x}{d t}, V = \frac{d X}{d T}$,

et $y d t = m d v, Y d T = M d V$, adeoque (408), S. $y d x = a b g e = \frac{1}{2} m v v$; et similiter S. $Y d X = A B G E = \frac{1}{2} M V V$.

ob constantes M, m ; unde $v = \sqrt{\frac{2 a b g e}{m}}$,

$V = \sqrt{\frac{2 A B G E}{M}}$; proindeque $v : V =$

$\sqrt{\frac{2 a b g e}{m}} : \sqrt{\frac{2 A B G E}{M}}$. Quare $d t =$

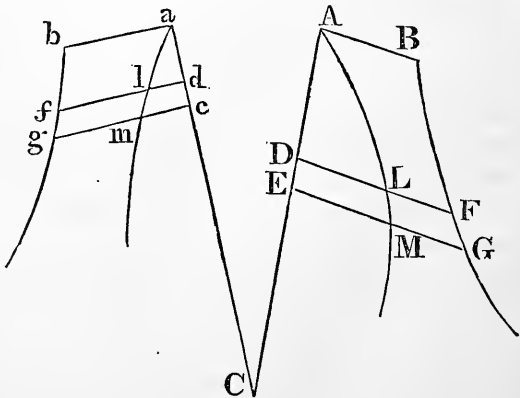
$\frac{d x}{v} = \frac{d x \sqrt{m}}{\sqrt{2 a b g e}}$, et $d T = \frac{d X \sqrt{M}}{\sqrt{2 A B G E}}$;

unde si ponatur $e m = \frac{1}{\sqrt{2 a b g e}}$ et $E M$

$= \frac{1}{\sqrt{2 A B G E}}$, erit $d t = d e \times e m \times$

\sqrt{m} , et $d T = D E \times E M \times \sqrt{M}$, ac

consequenter $t = a l m e \times \sqrt{m}$: et $T =$



$A L M E \times \sqrt{M}$. Unde $t : T = a l m e \times \sqrt{m} : A L M E \times \sqrt{M}$.

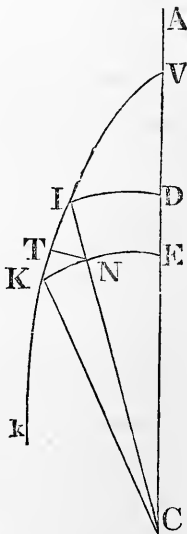
SECTIO VIII.

De inventione orbium in quibus corpora viribus quibuscunque centripetis agitata revolvuntur.

PROPOSITIO XL. THEOREMA XIII.

St corpus, cogente vi quâcunque centripetâ, moveatur utcunque, et corpus aliud rectâ ascendat vel descendat, sintque eorum velocitates in aliquo æqualium altitudinum casu æquales, velocitates eorum in omnibus æqualibus altitudinibus erunt æquales.

Descendat corpus aliquod ab A per D, E, ad centrum C, et moveatur corpus aliud a V in lineâ curvâ V I K k. Centro C intervallis quibusvis describantur circuli concentrici D I, E K rectæ A C in D et E, curvæque V I K in I et K occurrentes. Jungatur I C occurrens ipsi K E in N; et in I K demittatur perpendiculum N T; sitque circumferentiarum circularum intervallum D E vel I N quam minimum, et habeant corpora in D et I velocitates æquales. Quoniam distantie C D, C I æquantur, erunt vires centripetæ in D et I æquales. Exponentur hæ vires per æquales lineolas D E, I N; et si vis una I N (per legem Corol. 2.) resolvatur in duas N T et I T, vis N T, agendo secundum lineam N T corporis cursui I T K perpendiculari, nil mutabit velocitatem corporis in cursu illo, sed retrahet solummodo corpus a cursu rectilineo, facietque ipsum de orbis tangente perpetuo deflectere, inque viâ curvilineâ I T K k progredi. In hoc effectu producendo vis illa tota consumetur: vis autem altera I T, secundum corporis cursum agendo, tota accelerabit illud, ac dato tempore quam minimo accelerationem generabit sibi ipsi proportionalem. ^(k) Proindè corporum in D et I accelerationes æqualibus



(k) * Proindè corporum in D et I accelerationes æqualibus temporibus factæ sunt ut lineæ D E, I T. Sunt enim vires acceleratrices ut accelerationes nascentes, seu celeitatum incrementa nascentia directè et tempora inversè (13), undè temporibus æqualibus accelerationes nascentes sunt ut vires acceleratrices, temporibus

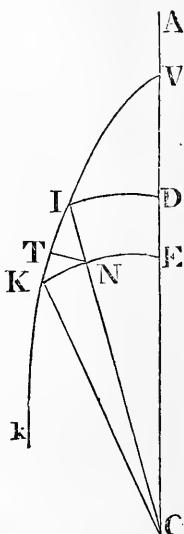
autem inæqualibus ut vires acceleratrices et tempora conjunctim; sed lineæ D E, I T, sunt ut vires acceleratrices in directionibus D E, I T; ergò corporum in D et I accelerationes æqualibus temporibus factæ sunt ut lineæ D E, I T; temporibus autem inæqualibus ut lineæ illæ et tempora conjunctim.

temporibus factæ (si sumantur linearum nascentium DE , IN , IK , IT , NT rationes primæ) sunt ut lineæ DE , IT : temporibus autem inæqualibus ut lineæ illæ et tempora conjunctim. Tempora autem quibus DE et IK describuntur, ob æqualitatem velocitatum sunt ut viæ descriptæ DE et IK , ideoque accelerationes, in cursu corporum per lineas DE et IK , sunt ut DE et IT , DE et IK conjunctim, id est ut DE quad. et $IT \times IK$ rectangulum. ⁽¹⁾ Sed rectangulum $IT \times IK$ æquale est IN quadrato, hoc est, æquale DE quad. et propterea accelerationes in transitu corporum a D et I ad E et K æquales generantur. Æquales igitur sunt corporum velocitates in E et K : et eodem argumento semper reperientur æquales in subsequentibus æqualibus distantiiis. Q. e. d.

Sed et ^(m) eodem argumento corpora æquielocia et æqualiter a centro distantia, in ascensu ad æquales distantias æqualiter retardabuntur. Q. e. d.

Corol. 1. Hinc si corpus vel oscilletur pendens a filo, vel impedimento quovis politissimo et perfectè lubrico cogatur in lineâ curvâ moveri, et corpus aliud rectâ ascendat vel descendat, sintque velocitates eorum in eâdem quâcunque altitudine æquales: erunt velocitates eorum in aliis quibuscunque æqualibus altitudinibus æquales. Namque corporis penduli filo vel ⁽ⁿ⁾ impedimento vasis absolutè lubrici idem præstatur quod vi transversâ NT . Corpus eo non retardatur, non acceleratur, sed tantum cogitur de cursu rectilineo discedere.

Corol. 2. Hinc etiam si quantitas P sit maxima a centro distantia, ad quam corpus vel oscillans vel in trajectoriâ quâcunque revolvens, deque quovis trajectoriæ puncto, eâ quam ibi habet velocitate sursum projectum ascendere possit; sitque quantitas A distantia corporis a centro in alio quovis orbitæ puncto, et vis centripeta semper sit ut ipsius A dignitas



⁽¹⁾ * Sed rectangulum $IT \times IK$ æquale est IN quadrato, cum sit $KN I$ angulus rectus, et linea NT ab basim IK normalis, adeoque crus IN medium proportionale inter hypothenusam IK et illius abscissam IT .

^(m) 411. Et eodem argumento. Vis enim acceleratrix motum corporis ascendentis eodem modo retardat, quo motum descendentis accelerat in iisdem locis (25); undè vera est propositio sive corpus utrumque descendat aut ascendat, sive descendente uno, alterum ascendat.

412. Si centrum C in infinitum abeat, rectæ AC , IC fiunt parallelæ et arcus DI , EK in rectas, lineis AC , IC perpendiculares, mutantur. Valet igitur propositio etiam ubi vis centripetæ directio AC , IC sibi perpetuò parallela est, dummodò puncta D , I æque alta sint, hoc est, in eâdem rectâ ad directionem vis centripetæ perpendiculari sumantur.

⁽ⁿ⁾ * Impedimento vasis. (Vid. not. 83. 86. 89. 90 91.)

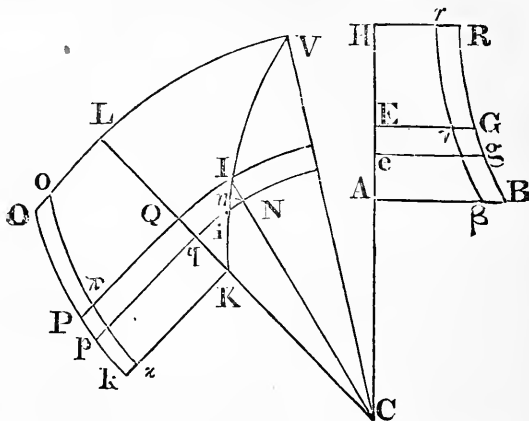
$= \frac{1}{2} M b b$ dum area $H R G E$ evanescit, itaque (170) ex fluente $\frac{1}{2} M V V$ detrahenda est quantitas constans $\frac{1}{2} M b b$ ut areae $H R G E$ sit æqualis; coëuntibus verò E et A , cum in puncto A scilicet $V = a$ erit in eo casu $H R G E$ sive $H R B A = \frac{1}{2} M a a - \frac{1}{2} M b b$, et sumpto quovis puncto E erit $H R B A - H R E G$ sive $E G B A = \frac{1}{2} M a a - \frac{1}{2} M b b - \frac{1}{2} M V V + \frac{1}{2} M b b = \frac{1}{2} M a a - \frac{1}{2} M V V$. Unde sic tandem incidimus in duas æquationes

$H R G E = \frac{1}{2} M V V - \frac{1}{2} M b b$ et $E G B A = \frac{1}{2} M a a - \frac{1}{2} M V V$ quibus comparatis cum iis quas respectu corporis m in curvâ $V I K$ moti simili modo deducemus, velocitates corporum in quibusvis æqualibus vel inæqualibus altitudinibus, in quâvis virium centripetarum hypothesi et in quâlibet ponderum et massarum proportionem conferri poterunt.

Secundò itaque, per locum K datum in curvâ $V I K$ agatur recta $C K L$ æqualis $C V$ et centro C per punctum quodvis I lineæ $V I K$ describatur arcus circularis $I Q$ rectæ $C L$ occurrans in Q per punctum Q erigatur semper perpendicularum $P Q$ proportionale vi centripetæ quâ corpus in distantia $C Q$ versus C urgetur: sitque $O I k$ curva quam punctum P perpetuò tangit, et perpendiculares in punctis datis L et K sint $L O$ et $K k$. Dicatur arcus $V I$, x , et linea $L Q$, y ; sit linea $I i$ fluxio arcus $V I$, et radio $C i$ describatur arcus lineæ $G L$ occurrans in q , et lineæ $C I$ in N , erit $Q q = I N$, ex q erigatur perpendicularis $q p$ usque ad curvam $O P k$, et ex N ducatur $N n$ perpendicularis in arcum $I i$.

Velocitates corporis m in punctis datis L et K dicantur e et c velocitas in puncto variabili Q sit u : Vis totalis centripeta in Q semper exprimat per $Q P$, eadem vis $Q P$ aget in I (propter æquales $C Q$, $C I$) secundum directionem $I N$, resolvatur ergo illa vis in vires duas quarum una agit in corpus m secundum directionem $I n$, altera secundum directionem $N n$, erit $I N$ ad $I n$ ut vis tota $Q P$ ad vim quâ corpus urgetur secundum curvam, sed ob triangula $I N n$, $I N i$ similis est $I N$ ad $I n$ sicut $I i$ ad $I N$ sive $Q q$, ideoque $I i$ ad $Q q$ ut vis $Q P$ ad vim agentem secundum curvam quæ itaque erit $\frac{Q P \times Q q}{I i}$; sit $d t$, tempusculum quo describetur $I i$ per eam vim, eritque (13 et 409) ea vis $\frac{Q P \times Q q}{I i} = \frac{m d u}{d t}$; unde erit $Q P \times Q q = \frac{m d u}{d t} \times I i$ sed (5) est $I i$ spatium percursum tempore $d t$ velocitate u est ergo

æquale $u d t$ ideoque $Q P \times Q q, \frac{m d u}{d t} \times u d t = m u d u$, sed $Q P \times Q q = m u d u$ est fluxio areae $L O Q P$, hujus fluens est



$\frac{1}{2} m u u$ (165) additâ aut detractâ quâdam constanti quantitate, coëuntibus enim Q et L , fit in L , $u = e$ ideoque fit $\frac{1}{2} m u u = \frac{1}{2} m e e$ dum area $L O Q P$ evanescit, itaque (170) ex fluente $\frac{1}{2} m u u$ detrahenda est quantitas constans $\frac{1}{2} m e e$, eritque $L O Q P = \frac{1}{2} m u u - \frac{1}{2} m e e$, et coëuntibus Q et K sit $u = c$ et $L O K k = \frac{1}{2} m c c - \frac{1}{2} m e e$ et $L O K k - L O Q P$ sive $Q P K k = \frac{1}{2} m c c - \frac{1}{2} m u u$, sicque tandem incidimus in has duas æquationes

$L O Q P = \frac{1}{2} m u u - \frac{1}{2} m e e$ et $Q P K k = \frac{1}{2} m c c - \frac{1}{2} m u u$ eadem methodo quâ in primo calculo sumus usi.

415. Corol. 1. Ex primâ æquatione primi calculi est $V = \frac{\sqrt{2 H R G E + M b b}}{\sqrt{M}}$, ex

primâ æquatione secundi calculi est $u = \frac{\sqrt{2 L O Q P + m e e}}{\sqrt{m}}$, unde invenitur $V : u =$

$$\frac{\sqrt{2 H R G E + M b b}}{\sqrt{M}} : \frac{\sqrt{2 L O Q P + m e e}}{\sqrt{m}}.$$

Ex secundâ verò æquatione primi calculi est

$$V = \frac{\sqrt{M a a - 2 E G B A}}{\sqrt{M}} \text{ et ex secunda æquatione } 2^{\text{da}} \text{ calculi } u = \frac{\sqrt{m c c - 2 Q P K k}}{\sqrt{m}},$$

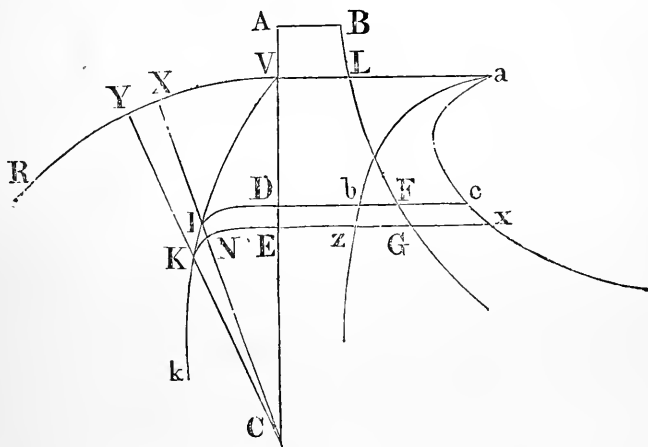
$$\text{et hinc est } V : u = \frac{\sqrt{M a a - 2 E G B A}}{\sqrt{m c c - 2 Q P K k}}.$$

416. Corol. 2. Si in perpendicularo $Q P$, itâ capiatur $Q \pi$, ut factum $\pi Q \times m$, sit ubique

PROPOSITIO XLI. PROBLEMA XXVIII.

Positâ cujuscunque generis vi centripetâ et concessis figurarum curvilinearum quadraturis, requiruntur tum trajectorye in quibus corpora movebuntur, tum tempora motuum in trajectoryis inventis.

Tendat vis quaelibet ad centrum C et invenienda sit trajectory V I K k. Detur circulus V R centro C intervallo quovis C V descriptus, centroque eodem describantur alii quivis circuli I D, K E trajectoryam secantes in



I et K rectamque C V in D et E. Age tum rectam C N I X secantem circulos K E, V R in N et X, tum rectam C K Y occurrentem circulo V R in Y. Sint autem puncta I et K sibi invicem vicinissima, et pergat corpus ab V per I et K ad k; sitque punctum A locus ille de quo corpus aliud cadere debet, ut in loco D velocitatem acquirat æqualem velocitati

gravitati corporis in I proportionale, seu rectæ Q P æquale, erit $\frac{2 L O \pi Q \times m}{\sqrt{2 L O Q P + m e e}} = \frac{\sqrt{2 L O Q P + m e e}}{\sqrt{m}}$
 $= \sqrt{2 L O \pi Q + e e}$ et $u = \sqrt{c c - 2 Q \pi z K}$.
 Et similiter si ponatur $E \gamma \times M = E G$,
 erit $V = \sqrt{2 H r \gamma E + b b}$ et $V = \sqrt{a a - 2 E \gamma \beta A}$.

417. Corol. 5. Si puncta H et V, E et I, fuerint æquæ alta, et in illis lineæ E G, Q P vi centripetæ proportionales, sint semper æquales, erit $H R G E = L O P Q$. Quare si præterea massæ M, m, et velocitates b, e, in punctis H, V, æquantur, erit

$\frac{2 H R G E + M b b}{M} = \frac{2 L O Q P + m e e}{m}$,
 adeoque $V = u$, in omnibus punctis æquæ altis E et I. Si in punctis æquæ altis H et V, E et I, vires centripetæ massarum M et m rationem semper habeant, erit $H R G E : L O Q P = M : m$, proindeque $\frac{2 H R G E}{M} = \frac{2 L O Q P}{m}$. Unde si præterea ponatur $b b = e e$, erit $V = u$, quæ est Propositio XL. Newtoni. Patet etiam in 4. superioribus formulis (415), Massas M et m exterminari, si fuerint ponderibus proportionales.

ad ZZ ut IK q ad KN q, et divisim $ABFD - ZZ$ ad ZZ ut IN (^r) quad. ad KN quad. ideoque $\sqrt{ABFD - ZZ}$ ad Z seu $\frac{Q}{A}$ ut IN

ad KN , et propterea $A \times KN$ æquale $\frac{Q \times IN}{\sqrt{ABFD - ZZ}}$. (^s) Un-

de cum $YX \times XC$ sit ad $A \times KN$ ut CX q ad AA , erit rectangulum $XY \times XC$ æquale $\frac{Q \times IN \times CX \text{ quad.}}{AA \sqrt{ABFD - ZZ}}$. Igitur si in per-

pendiculo DF capiantur semper $D b$, $D c$ ipsis $\frac{Q}{2 \sqrt{ABFD - ZZ}}$,

$\frac{Q \times CX \text{ quad.}}{2 AA \sqrt{ABFD - ZZ}}$ æquales respectivè, et describantur curvæ

lineæ $a b$, $a c$, quas puncta b , c perpetuo tangunt; deque puncto V ad lineam AC erigatur perpendicularum $V a$ abscindens areas curvilineas $VD b a$, $VD c a$, et erigantur etiam ordinatæ $E z$, $E x$: quoniam rectangulum $D b \times IN$ seu $D b z E$ æquale est dimidio rectanguli $A \times KN$ seu triangulo ICK ; et rectangulum $D c \times IN$ seu $D c x E$ æquale est dimidio rectanguli $YX \times XC$ seu triangulo $XC Y$; hoc est, quoniam arearum $VD b a$, VIC æquales semper sunt nascentes particulæ $D b z E$, ICK , et arearum $VD c a$, VCX æquales semper sunt nascentes particulæ $D c x E$, $XC Y$, erit area genita $VD b a$ æqualis areæ genitæ VIC , ideoque tempori proportionalis, et area genita $VD c a$ æqualis sectori genito VCX . Dato igitur tempore quovis ex quo corpus discessit de loco V , (+) dabitur area ipsi proportionalis $VD b a$, et inde dabitur corporis altitudo CD vel CI ; et area $VD c a$, eique æqualis sector VCX unâ cum ejus angulo VCI . Datis autem angulo VCI et altitudine CI datur locus I , in quo corpus completo illo tempore reperietur. Q. e. i.

Corol. 1. Hinc maximæ minimæque corporum altitudines, id est, ap-

1, et pariter velocitas in I (adeoque \sqrt{ABFD}) est ut Cq reciproçè, id est, ut $\frac{1}{Cq}$ directè, et

proindè $Cq \times \sqrt{ABFD}$, ut quantitas constans 1, adeoque $Cq \times \sqrt{ABFD} = CQ \times \sqrt{ABL V}$.

Si itaque capiatur $Q = CQ \times \sqrt{ABL V} = Cq \times \sqrt{ABFD}$, et $Z = \frac{Q}{IC}$ (unde est

$Q = Z \times IC$) erit semper $\sqrt{ABFD} : Z = IC : Cq = IK : KN$. Nam propter triangula IKN , ICq similia, est IK ad KN ut IC ad Cq , sed quia $Z \times IC (= Q)$

$= Cq \times \sqrt{ABFD}$ est $IC : Cq = \sqrt{ABFD} : Z$ ergo $IK : KN = IC : Cq = \sqrt{ABFD} : Z$.

(^r) $\times Ut IN^2$, ad KN^2 . Est enim ob angulum INK rectum, $IK^2 - KN^2 = IN^2$.

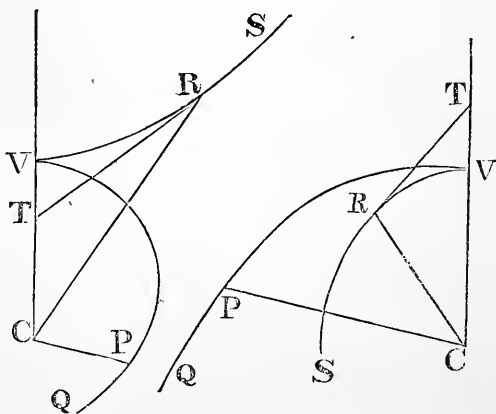
(^s) * Undè cum $YX \times XC : A \times KN = CX^2 : AA$. Sunt enim triangula nascentia CKN , CYX similia et eorum proindè areæ duplæ $YX \times XC$, $IC \times KN$, seu $A \times KN$, in ratione duplicatâ homologorum laterum CX , CI , sive A .

(+) 419. Dabitur area ipsi proportionalis. Datâ corporis velocitate et directione seu tan-

trajectoriam $V I K$, id ⁽¹⁾ quod fit ubi rectæ $I K$ et $N K$ æquantur, ideoque ubi area $A B F D$ æqualis est $Z Z$.

^(u) *Corol.* 2. Sed et angulus $K I N$, in quo trajectory alicubi secat lineam illam $I C$, ex datâ corporis altitudine $I C$ expeditè invenitur; nimirum capiendò sinum ejus ad radium ut $K N$ ad $I K$, id est, ut Z ad latus quadratum areæ $A B F D$.

^(s) *Corol.* 3. Si centro C et vertice principali V describatur sectio quælibet conica $V R S$, et a quovis ejus puncto R agatur tangens $R T$ occurrens axi infinitè producto $C V$ in puncto T ; dein junctâ $C R$ ducatur recta $C P$, quæ æqualis sit abscissæ $C T$, angulumque $V C P$ sectori $V C R$ proportionalem constituat; tendat autem ad centrum C vis centripeta cubo distantiae locorum a centro reciproçè proportionalis, et exeat corpus de loco V justâ cum velocitate secundum



lineam rectæ $C V$ perpendicularem: progredietur corpus illud in trajectoryâ $V P Q$ quam punctum P perpetuò tangit; ideoque si conica sectio $V R S$ hyperbola sit, descendet idem ad centrum: Sin ea ellipsis sit, ascendet illud perpetuò et abibit in infinitum. Et contra, si corpus quâ-

compositionem rationum et ex æquo $n n : 1 = R P : P L$. Si ergò fuerit $n n$, ad 1, ut numerus ad numerum, dato arcu $P L$, inveniri poterit arcus $R P$ per æquationem finitam, cum possit semper arcus datus in datâ ratione numeri ad numerum per æquationem finitam dividi. Quoniam igitur assumptæ $C I$ positio et punctum I , in curvâ $V I K$ per finitas æquationes determinantur, erit $V K$ curva algebraica seu geometricè rationalis. Hermannus Prop. XXV. Lib. 1. Phoron. hoc elegans et difficile problema solvit: invenire canonem generalem determinandæ gravitatis variabilis pro omnibus curvis algebraicis in infinitum, quantitativis finitis expressum.

^(t) * Id quod fit ubi rectæ $I K$ et $K N$ æquantur. Tunc enim punctum N coincidit cum puncto I , ob angulum $K I N$ rectum, adeoque ob proportionem $\sqrt{A B F D} : Z = I K : K N$, fit $A B D F = Z Z = \frac{Q Q}{I C^2}$, et

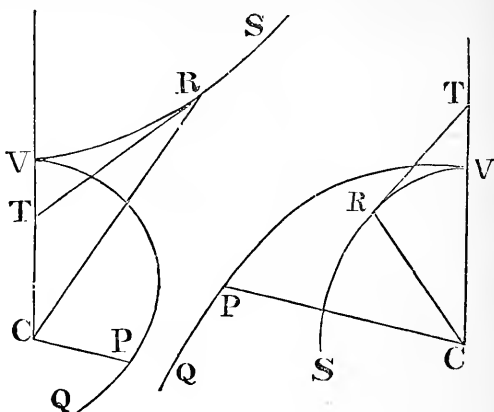
$I C^2 \times A B F D = Q Q$ quantitati datæ. Hinc cum concessis curvarum quadraturis data sit area $A B F D$ in quantitativis constantibus et variabili $I C$ seu $C D$, invenietur valor $I C$, hoc est, maximæ et minimæ altitudines corporis trajectoryam $V K$ describentis.

^(u) * *Corol.* 2. Ob angulum $K N I$ rectum in triangulo nascente $K I N$, sinus anguli $K I N$ est ad sinum totum, ut $K N$ ad $I K$, id est, ut Z (seu $\frac{Q}{I C}$) ad $\sqrt{A B F D}$. Verum datâ $I C$ datur area $A B F D$, et indè ob quantitatem Q datam datur ratio $\frac{Q}{I C}$ ad

$\sqrt{A B F D}$, hoc est, ratio sinus anguli $K I N$, ad radium. Invenietur ergò sinus anguli $K I N$, et hinc angulus ipse cognoscetur.

^(s) 423. *Lemma.* Si fuerit $D V C$, circuli quadrans cujus radius $C V = r$ abscissa $C B = z$, ordinatæ infinitè propinquæ $B R$, $b r$,

cunque cum velocitate exeat de loco V, et perinde ut incœperit vel obliquè descendere ad centrum, vel ab eo obliquè ascendere, figura V R S vel hyperbola sit vel ellipsis, inveniri potest trajectory augendo vel minuendo angulum V C P in datâ aliquâ ratione. Sed et, vi centripetâ in centrifugam versâ, ascendet corpus obliquè in trajectoryâ V P Q, quæ invenitur capiendo angulum V C P sectori elliptico V R C proportionalem, et longitudinem C P longitudini C T æqua-



fluxio arcûs D R erit $\frac{r dz}{\sqrt{rr - zz}}$, et fluxio

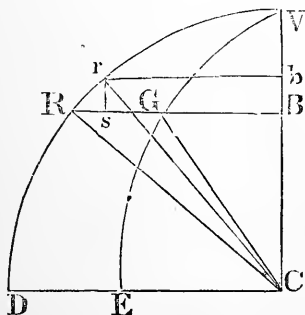
sectoris C D R = $\frac{\frac{1}{2} r r dz}{\sqrt{rr - zz}}$.

Est enim B R = $\sqrt{rr - zz}$, et demissâ ex puncto r in R B, perpendiculari r s, triangula similia R C B, r R s, dant R B ($\sqrt{rr - zz}$):

R C (r) = r s (dz) : R r = $\frac{r dz}{\sqrt{rr - zz}}$.

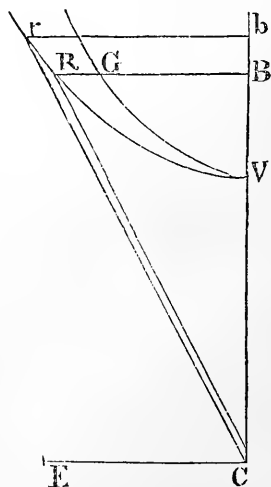
Q. e. 1. Porro sector nascens C R r = $\frac{1}{2}$ C R

\times R r = $\frac{\frac{1}{2} r r dz}{\sqrt{rr - zz}}$. Q. e. 2.



424. Corol. Si fuerit E G V C, quadrans ellipseos cujus centrum C, semiaxis unus C V = r, alter semiaxis C E = c, abscissa C B = z, et B G ordinatim applicata ad axem C V, sectoris C E G fluxio erit = $\frac{\frac{1}{2} r c dz}{\sqrt{rr - zz}}$.

Sunt enim sectores C D R, C E G, adeoque et eorum fluxiones in datâ ratione r ad c, (251).



425. Lemma. Si fuerit V R r, hyperbola æquilatera cujus centrum C, semiaxis transversus C V = r, abscissa C B = z, R B ad axem ordinatim applicata, sectoris hyperbolici C R V fluxio erit $\frac{\frac{1}{2} r r dz}{\sqrt{zz - rr}}$. Agatur enim r b ordinata, priori R B infinitè propinqua, sitque R B = y, erit (ex naturâ hyperbolæ æquilateræ) y y = z z - r r, et y = $\sqrt{zz - rr}$.

Undè $2y \, dy = 2z \, dz$, et $dy = \frac{z \, dz}{\sqrt{zz - rr}}$
 Porrò triangulum $CRB = \frac{1}{2} z y$, et illius
 fluxio $= \frac{1}{2} z \, dy + \frac{1}{2} y \, dz =$ trapezium $BbrR$
 $+ \text{triang. } CrR$; sed trapezium nascens $BbrR$
 $= y \, dz$, ergò sector nascens $CrR = \frac{1}{2} z \, dy$
 $-\frac{1}{2} y \, dz = \frac{\frac{1}{2} z z \, dz}{\sqrt{zz - rr}} - \frac{1}{2} dz \times \sqrt{(zz$
 $- rr)} = \frac{\frac{1}{2} z z \, dz}{\sqrt{zz - rr}} - \frac{1}{2} z z \, dz + \frac{1}{2} r r \, dz$
 $= \frac{\frac{1}{2} r r \, dz}{\sqrt{zz - rr}}$ Q. e. d.

426. *Corol.* 1. Quoniam (ex demonstratis)

$$d y = \frac{z z d z}{\sqrt{z z - r r}}, \text{ et } y y = z z - r r, \text{ erit}$$

$$\frac{d y}{\sqrt{z z - r r}} = \frac{d y}{z}, \text{ et } z = \sqrt{y y + r r},$$

$$\text{adeoque } C r R = \frac{\frac{1}{2} r r d z}{\sqrt{z z - r r}} = \frac{\frac{1}{2} r r d y}{\sqrt{y y + r r}}.$$

427. *Corol. 2.* Si descripta fuerit altera hy-
perbola G V, cuius idem centrum C, idem
semiaxis transversus C V = r. semiaxis conju-
gatus C E = c; sectoris C G V fluxio erit =
 $\frac{1}{2} r c d z = \frac{1}{2} r c d y$. Est enim sector C R V
 $\sqrt{z z - r r} = \sqrt{y y + r r}$
ad sectorem C G V, adeoque prioris fluxio ad
fluxionem posterioris in datâ ratione r ad c. (374.)
ad c. (374.)

428. *Lemma.* Iisdem positis quæ in superioribus Newtoni propositionibus, sit $CV = r$, $CA = a$, CD vel $C\Delta = x$, DF vel $\Delta\Phi = y$; et si fuerit vis centripeta in loco quovis D ut $\frac{1}{CD^3}$, sitque $2f^4$ quanti-

tas data, erit $y = \frac{2f^4}{x^3}$, æquatio ad
curvam B F G, et quoniam in
æquatione y infinita evadit si x po-
natur = 0, et similiter x infinita fit
si y = 0, liquet rectas sibi mutuò
perpendiculares C O, C S esse curvæ
B F G asymptotos. Area D F G E
= y d x = $\frac{2f^4 dx}{x^3}$, undè sump-
tis fluentibus additæque constanti Q,
erit area in infinitum versùs S pro-
tensa C D F s S C = $Q - \frac{f^4}{x}$;

Ponatur x infinita, et erit $\frac{f^4}{x^4} = 0$,

et area C D F s S, mutabitur in aream utrinque infinitè protensam C O o s S C; quare $C O o s S C = Q$; et hinc $C O o s S C - C D F s S C = O D F o = Q - Q +$

$\frac{f^4}{x^4} = \frac{f^4}{x^4}$, id est, area $ODFO$, vel $O\Delta\Phi\Theta$
versus O in infinitum extensa, æqualis est quan-
titati finitæ $\frac{f^4}{x^4}$.

429. *Corol.* 1. Area infinitè protensa
 $OVL o = \frac{f^4}{r r}$; area $OAB o = \frac{f^4}{a a}$ et
 proinde $\sqrt{OVL o} = \frac{f f}{r}$, $\sqrt{OAB o} =$
 $\frac{f f}{a}.$

430. *Corol. 2.* Area A B L V = O V L o

$$- O A B o = \frac{f^4 \times a a - r r}{r r a a} = \frac{f^4 c c}{r r a a},$$
ponendo $a a - r r = c c$ (429) undè

$$\sqrt{A B L V} = \frac{f^2 c}{r a}.$$

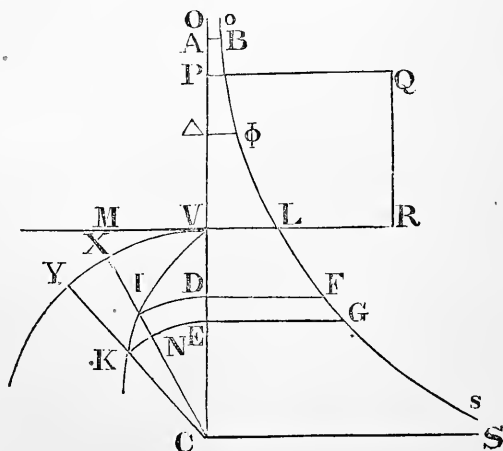
431. *Corol. 3.* Similiter si punctum D sit inter puncta data C, V, et punctum Δ inter puncta data V, A; erit area A B Φ Δ, vel

$$A B F D = \frac{f^4 \times a a - x x}{r r x x}, \text{ area } V L F D$$

$$= \frac{f^4 \times r r - x x}{r r x x}, \Delta \Phi L V = \frac{f^4 \times x x - r r}{r r x x}.$$

(428. 429. 430.)

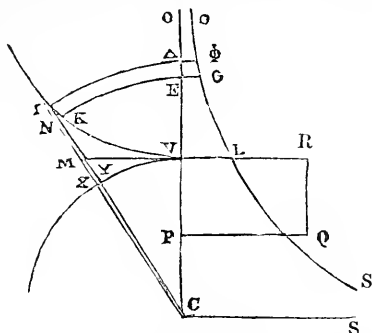
432. Iisdem manentibus quæ in Lemmate superiori (428) si corpus de loco V, cum velo-



citae quâlibet secundum directionem $V M$ ad $C V$ perpendicularem projiciatur ut curvam $V I K$ describat, erit $V M$ hujus curvæ tangens in puncto V , $C V$ ad tangentem $V M$ normalis,

cum puncto V coeunt, et fit CT seu $CI = CV$, adeoque punctum R coïncidit etiam cum puncto V , et sector CRE , aequalis fit quadranti CEV ; ergo $Q = CEV$. Est igitur semper $CXV = CEV - CRE = CRV$. Itaque ut inveniantur trajectorye VIK punctum I , capiatur sector circuli CXV , aequalis sectori elliptico CRV , et in lineâ CX , productâ capiatur $CI = CT$, erit I punctum in trajectoryâ quaesitâ.

$\sqrt{ee + \Delta \Phi LV}$, quæ (in formulâ Prop. 41.) rium centripetarum in ratione triplicatâ distantie substitui debet loco \sqrt{ABFD} . Invenietur a centro decreſcentium generatim ac perspicuè



etiam (430) $Q = re$, $ZZ = \frac{ree}{xx} + \Delta \Phi LV$
 $= ee + \frac{f^4 \times xx - rr^2}{rrxx} \quad (451) = \frac{rrcexx + f^4 xx - f^4 rr}{rrxx}$
 Hinc quantitas $ABFD - ZZ$ (Prop. 41.) fiet
 hic $= \frac{rrcexx + f^4 xx - f^4 rr - r^4 ee}{rrxx}$
 $= \frac{hbrrxx - hbr^2}{rrxx}$, ponendo $rrcexx + f^4 = hbr^2$. Quare $\sqrt{ABFD - ZZ} = \frac{h\sqrt{xx - rr}}{x}$. Factis igitur debitis substitutioni-

bus, formula Prop. XLI. $\frac{Q \times CX^2 \times IN}{2AA\sqrt{ABFD - ZZ}}$,
 in hanc mutatur $\frac{\frac{1}{2}r^3 dx}{bx\sqrt{xx - rr}} = \frac{\frac{1}{2}r^2 cdx}{x\sqrt{xx - rr}}$,
 ponendo $\frac{re}{b} = c$. Quare sector circuli CXY
 $= \frac{\frac{1}{2}r^2 cdx}{bx\sqrt{xx - rr}}$, ut in cas. 3°. (437). Igi-
 tur trajectory VI construetur per sectores el-
 lipticos prorsus ut in hoc 3°. casu.

442. *Schol.* Keillius ad calcem Introductionis
 ad Veram Astronomiam, inversum Problema vi-

solvit, et trajectoryarum quæ in hac hypothesi
 describuntur plures proprietates demonstravit,
 inter alias istam, earum omnium, si circulum
 exceperis, areas esse perfectè quadrabiles, quæ
 quidem de omnibus trajectoryis per Constr. Co-
 rol. 5. Prop. 41. descriptis facillè demonstratur.
 Nam (per Prop. 41.) arearum illarum fluxio

$$CIK = \frac{Q \times IN}{2\sqrt{ABFD - ZZ}} = \frac{-\frac{1}{2}cx dx}{\sqrt{rr - xx}}$$

in cas. 2°. et $CIK = \frac{Q \times IN}{2\sqrt{ABFD - ZZ}}$

$$= \frac{\frac{1}{2}cx dx}{\sqrt{xx - rr}} \text{ in casu 5°. (437. 441.) Po-}$$

natur 1°. $\sqrt{rr - xx} = z$; et erit $rr - xx$

$$= zz, - x dx = z dz, \text{ et } -\frac{\frac{1}{2}cx dx}{\sqrt{rr - xx}}$$

$= CIK = \frac{1}{2}cdz$, et sumptis fluentibus, sec-

tor $CIK = \frac{1}{2}cz = \frac{1}{2}c\sqrt{rr - xx}$, nulla

enim est addenda quantitas constans. Ponatur

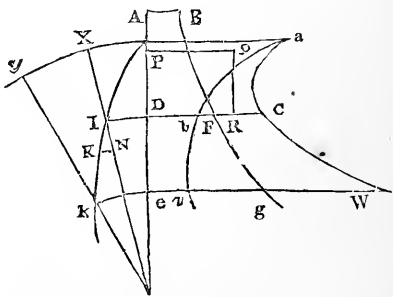
$$2°. \sqrt{xx - rr} = y, \text{ et proindè } xx - rr = yy, x dx = y dy, \text{ erit } CIK = \frac{\frac{1}{2}cx dx}{\sqrt{xx - rr}}$$

$$= \frac{1}{2}cdy, \text{ et sector fluens } CIV = \frac{1}{2}cy = \frac{1}{2}c\sqrt{xx - rr}.$$

PROPOSITIO XLII. PROBLEMA XXIX.

Datâ lege vis centripetæ, requiritur motus corporis de loco dato, datâ cum velocitate, secundum datam rectam egressi.

Stantibus quæ in tribus propositionibus præcedentibus: exeat corpus de loco I secundum lineolam I K, eâ cum velocitate quam corpus aliud, vi aliquâ uniformi centripetâ, de loco P cadendo acquirere posset in D: sitque hæc vis uniformis ad vim, quâ corpus primum urgetur in l, ut D R ad D F. Pergat autem corpus versus k; centroque C et intervallo C k describatur circulus k e occurrens rectæ P D in e, et erigantur curvarum B F g, a b v, a c w ordinatim applicatæ e g, e v, e w. (y) Ex dato rectangulo P D R Q, datâque lege vis centripetæ quâ corpus primum agitur, datur curva linea B F g, per constructionem Problematis XXVII. et ejus Corol. 1. (z) Deinde ex dato angulo C I K datur proportio nascentium I K, K N, et inde, per constructionem Prob. XXVIII. datur quantitas Q, unâ cum curvis lineis a b v, a c w: ideoque, completo tempore quovis D b v e, datur tum corporis altitudo C e vel C k, tum area D c w e, eique æqualis sector X C y, angulusque I C k, et locus k in quo corpus tunc versabitur. Q. e. i.



(y) * Ex dato rectangulo P D R Q, &c. Ex datâ vis centripetæ lege, datur curva linea B F G, (per constr. 1^æ. partis Prop. 39.) Dato rectangulo P D R Q, datur locus A, de quo corpus urgente vi centripetâ variabili cadere debet, ut velocitatem acquirat in loco D, æqualem velocitati quam corpus aliud urgente aliquâ uniformi vi centripetâ notâ ex loco P cadens acquisivit eodem loco D, (per Cor. 1. Prop. 39.) dato autem loco A, et descriptâ curvâ B F g, describi poterit altera curva V L M, (per constr. et fig. 2^æ. partis Prop. 39.)

(z) * Deinde. Cùm sit I K ad K N, ut sinus totus ad sinum anguli dati N I K, (per Corol. 2. Prop. 41.) dabitur quantitas constans Q, unâ cum curvis lineis a b v, a c w, est enim I K : K N = $\sqrt{A B F D}$ (sive $\sqrt{P D R Q}$) : Z; est ergo data Z (per constr. Probl. 28. et not. 418.) et $Z = \frac{Q}{A}$ sive $A \times Z = Q$ unde habetur Q, ex quibus habentur quantitates $\frac{Q}{A}$ et $\frac{Q \times C \times A^2}{2 \sqrt{A B F D} - Z Z}$ et $\frac{2 A^2 \times \sqrt{A B F D} - Z Z}{2 \sqrt{A B F D} - Z Z}$ quæ sunt ordinatæ curvarum a b v, a c w.

Supponimus autem in his propositionibus vim centripetam in recessu quidem a centro variari secundum legem quamcunque, quam quis imaginari potest, in æqualibus autem a centro distantis esse undique eandem. Atque hactenus motum corporum in orbibus immobilibus consideravimus. Superest ut de motu eorum in orbibus, qui circa centrum virium revolvuntur, adjiciamus pauca:

SECTIO IX.

De motu corporum in orbibus mobilibus, deque motu apsidum.

PROPOSITIO XLIII. PROBLEMA XXX.

- (^a) *Efficiendum est ut corpus in trajectoriâ quâcunque circa centrum virium revolvente perinde moveri possit, atque corpus aliud in eâdem trajectoriâ quiescente.*

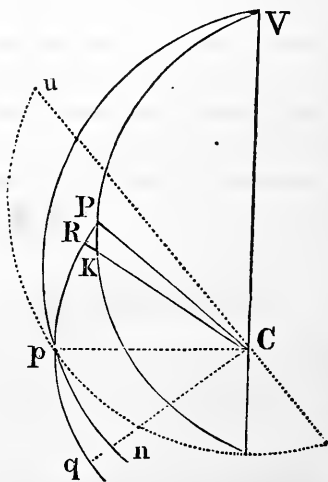
In orbe $V P K$ positione dato revolvatur corpus P pergendo a V versus K . A centro C agatur semper $C p$, quæ sit ipsi $C P$ æqualis, angulumque $V C p$ angulo $V C P$ proportionalem constituat; et (^b) area,

(^a) * *Efficiendum est.* Sit $V P K$ quælibet immota trajectoria quam corpus P ad centrum virium C tendens describat pergendo ab V versus K , invenienda est lex vis centripetæ ad C tendentis, quâ urgente corpus al'ud p feratur in perimetro figuræ $u p$, priori similis et æqualis, intereadum hæc ipsa figura $u p$, circâ C revolvitur in uno eodemque plano, itâ ut dum corpus P , arcum quemlibet ut $V P$, percurrit in orbe quiescente $V P$, aliud corpus p , similem et æqualem arcum $u p$, percurrat in orbe revolvente $u p$.

443. Si fuerit $C V$ ad trajectoriam $V P K$ in puncto V perpendicularis, hoc est, si fit $C V$ linea apsidum in orbe quiescente, et correspondens $C u$ linea apsidum in orbe revolvente, motus angularis lineæ $C u$ dicitur apsidum motus, qui in consequentia fit, ubi linea $C u$, in eandem partem fertur cum corpore P , vel p . In antecedentia verò ubi linea $C u$, et corpus P , vel p , in plagas contrarias tendunt.

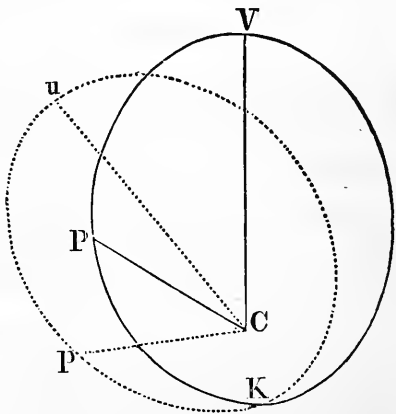
(^b) * *Et area quam linea $C p$, describit.* Sit $V p n$ curva quam corpus p in orbe mobili $u p$ revolvens describit, centro C , intervallo $C P$, vel $C p$, describatur circuli arcus $P p q$, agatur radius $C R$ orbem quiescentem $V P K$ secans in K , et radius $C q$, trajectoriam $V p n$, secans in n , sintque K, n , loca in quibus eodem tempore reperiuntur corpora P, p , id est, arcus $P K, p n$, sint eodem tempore descripti. Nascentibus arcubus $P R, p q$, sectores $P C K, p C n$, æquales sunt factis $\frac{1}{2} P C \times P R, \frac{1}{2} p C \times p q$; adeoque ob $p C = P C$ sectores illi sunt inter se ut arcus $P R, p q$, seu ut anguli $P C K, p C n$; sed quoniam angulus $V C K$, est ad angulum $V C n$, in datâ ratione anguli $V C P$, ad angulum $V C p$ (per hyp.) erit dividendo angulus $V C K - V C P$, ad angulum $V C n - V C p$, hoc est, angulus $P C K$, ad angulum $p C n$, in datâ ratione anguli $V C P$

ad $V C p$, atquæ adeò sector $P C K$, ad sectorem $p C n$, in eâdem ratione datâ. Undè (per



Cor. Lem. 4.) totus sector $V p C$, est ad totum sectorem $V P C$, eodem tempore descriptum in datâ ratione, sive sector $V p C$, est ut sector $V P C$, proindeque (per Prop. 1.) ut tempus quo sector uterque describitur. Quare manifestum est (per Prop. 2.) quod corpus p , cogente justæ quantitatis vi centripetâ revolvi possit in curvâ lineâ $V p n$, quam punctum p perpetuò tangit. Porro dato orbe $V P K$, et virium centro C , datur longitudo et positio lineæ $C P$; per (superiorem Newt. constr.) ideoque et lineæ $C p$, et hinc datur punctum quodlibet p , in trajectoriâ

quam linea Cp describit, erit ad aream VCP , quam linea CP simul describit, ut velocitas lineæ describentis Cp ad velocitatem lineæ describentis CP , hoc est, ut angulus VCP ad angulum VCP , ideoque in datâ ratione, et propterea temporî proportionalis. Cum area temporî proportionalis sit quam linea Cp in plano immobili describit, manifestum est quod corpus, cogente justæ quantitatis vi centripetâ revolvi possit unâ cum puncto p in curvâ illâ lineâ quam punctum idem p ratione jam expositâ describit in plano immobili. Fiat angulus VCu angulo PCp , et linea Cu lineæ CV , atque figura uCP figuræ VCP æqualis, et corpus in p semper existens movebitur in perimetro figuræ revolvantis uCP , eodemque tempore describet arcum ejus up quo corpus aliud P arcum ipsi similem et æqualem VP in figurâ quiescente VPK describere potest. Quærat igitur, per Corollarium quintum Propositionis VI., vis centripeta quâ corpus revolvi possit in curvâ illâ lineâ quam punctum p describit in plano immobili, et solvetur problema. Q. e. f.



PROPOSITIO XLIV. THEOREMA XIV.

Differentia virium, quibus corpus in orbe quiescente, et corpus aliud in eodem orbe revolvente æqualiter moveri possunt, est in triplicatâ ratione communis altitudinis inverse.

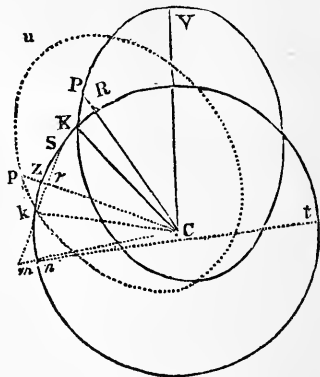
Partibus orbis quiescentis VP , PK sunt similes et æquales orbis re-

Vpn , adeoque et ipsa trajectoria datur. Inveniri igitur potest (per Cor. 5. Prop. 6.) lex vis centripetæ quâ corpus p , in trajectoriâ illâ Vpn revolvi potest.

Quoniam autem angulus VCP æqualis est angulo vcp (per constr.) erit quoque angulus Vcv æqualis angulo PCp , adeoque datâ Cp , magnitudine et positione, facillè invenitur positio lineæ apsidum Cv in orbe mobili Vp : Fiat enim angulus Vcv angulo PCp , et li-

nea Cv lineæ CV , atque figura uCP , figuræ VCP similis et æqualis, et corpus unâ cum puncto p , semper latum et figuram immotam Vpn describens, describit etiam perimetrum up , figuræ revolvantis uCP , eodemque tempore describit arcum ejus vp , quo corpus aliud P arcum ipsi similem et æqualem VP , in figurâ quiescente VPK , describere potest. Vide Varignonium Legem vis centripetæ in trajectoriâ Vpn determinantem, in Comm. Paris. 1705

volventis partes u p, p k; et punctorum P, K distantia intelligatur esse quam minima. A puncto k in rectam p C demitte perpendicularum k r, idemque produc ad m, ut sit m r ad k r ut angulus V C p ad angulum V C P. Quoniam corporum altitudines P C et p C, K C et k C, semper æquantur, manifestum est quod linearum P C et p C incrementa vel decrementa semper sint æqualia, ideoque si corporum in locis P et p existentium distinguantur motus singuli (per legum Corol. 2.) in binos, quorum hi versus centrum, sive secundum lineas P C, p C determinantur, et alteri prioribus transversi sint, et secundum lineas ipsis P C, p C perpendiculares directionem habeant; motus versus centrum erunt æquales, et motus transversus corporis p erit ad motum transversum corporis P, ut motus angularis lineæ p C ad motum angularem lineæ P C, id est, ut angulus V C p ad angulum V C P. Igitur eodem tempore quo corpus P motu suo utroque pervenit ad punctum K, corpus p æquali in centrum motu æqualiter movebitur a p versus C, ideoque completo illo tempore reperietur alicubi in lineâ m k r, quæ per punctum k in lineam p C perpendicularis est; et motu transverso acquirere distantiam a lineâ p C, quæ s't ad distantiam quam corpus alterum P acquirit a lineâ P C, ut est motus transversus corporis p ad motum transversum corporis alterius P. Quare cum k r æqualis sit distantiae quam corpus P acquirit a lineâ P C, sitque m r ad k r ut angulus V C p ad angulum V C P, hoc est, ut motus transversus corporis p ad motum transversum corporis P, (c) manifestum est quod corpus p completo illo tempore reperietur in loco m. Hæc ita se habebunt ubi corpora p et P æqualiter secundum lineas p C et P C moventur, ideoque æqualibus viribus secundum lineas illas urgentur. Capiatur autem angulus p C n ad angulum p C k ut est an-



(c) * Manifestum est quod corpus p, &c. Ex puncto K in rectam P C, demissum intelligatur perpendicularum K R, et erit P R = p r. Fingamus corpus P de loco P ita projici ut vi secundum directionem P C, urgente percurrat spatium P R, eodem tempore quo vi alterâ secundum rectam ipsi R k, parallelam impellente, percurrat spatium æquale rectæ R K, adeo ut eo tempore viribus conjunctis describat diagonalem P K. Fingamus similiter corpus p, de loco p ita projici, ut vi secundum directionem

p C urgente percurrat p r = P R, eodem tempore quo corpus P percurrat P R aut R K vel P K, et vi alterâ secundum directionem rectæ r m, parallelam impellente, corpus p, eodem tempore describat spatium æquale rectæ r m, quæ est ad R K, in ratione velocitatis transversæ corporis p, ad velocitatem transversam corporis alterius P. His positis manifestum est corpora P et p, de locis P, et p, simul egressa, eodem temporis puncto reperiri in locis K, et m.

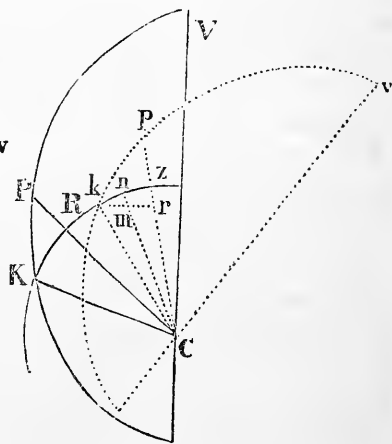
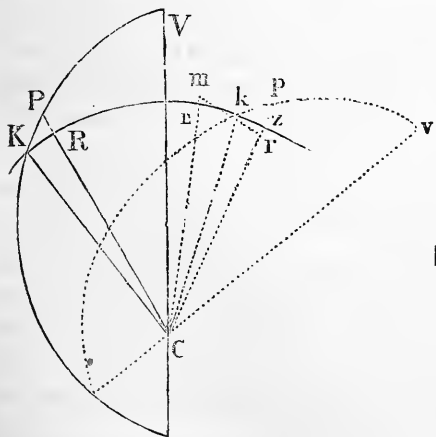
gulus $V C p$ ad angulum $V C P$, sitque $n C$ æqualis $k C$, et corpus p completo illo tempore ^(d) reverâ reperietur in n ; ^(e) ideoque vi majore urgetur quam corpus P , si modò angulus $n C p$ angulo $k C p$ major est, id est si orbis $u p k$ vel movetur in consequentia, vel movetur in antecedentia majore celeritate quam sit dupla ejus quâ linea $C P$ in consequentia fertur; et vi minore si orbis tardius movetur in antecedentia. Estque

^(d) * *Reverâ reperietur in puncto n.* Est enim angulus $p C k = P C K$ (per hyp.) et si fuerit n locus corporis p , erit (per Prop. 43.) angulus $p C n$, ad angulum $p C k$, ut angulus $V C p$, ad angulum $V C P$. et puncta C, n, m , jacent in unâ rectâ. Nascentibus enim angulis $p C n, P C K$, perpendicularia $r m, R K$, sunt ut arcus circulares nascentes radiis æqualibus $C R, C r$ descripti. seu ut anguli $m C r, K C R$, (per Lem. 7.) Est ergò angulus $m C p$, ad angulum $K C P$, seu $k C p$, ut $m r$, ad $K R$, seu $k r$, hoc est, ut angulus $V C p$, ad angulum $V C P$, sive, ut angulus $p C n$, ad angulum $k C p$, (per constr.) quare angulus $m C p = p C n$, et hinc puncta C, n, m , jacent in unâ rectâ.

^(e) 444. *Ideoque vi majore urgetur quam corpus P, si modò angulus n C p, angulo k C p major; vi minore, si angulus m C p, angulo k C p minor; et vi æquali, si angulus m C p,*

445. Porro angulus $m C p$, angulo $k C p$ seu $K C P$ major est, si orbis $v p k$, vel movetur in consequentia (ut patet) vel movetur in antecedentia majore celeritate quàm sit dupla ejus quâ linea $C P$ in consequentia fertur. Nam in hoc casu angulus $v C V$, est plusquam duplo major angulo $V C P$, seu $v C p$, adeoque angulus $V C p$, major angulo $V C P$, seu $v C p$, et hinc angulus $p C m$, major angulo $p C k$, cum sit angulus $p C m$, ad angulum $p C k$, ut $V C p$, ad $V C P$.

446. Si orbis $v p k$, movetur in antecedentia cum celeritate duplâ ejus quâ linea $C P$, in consequentia fertur, erit angulus $V C p = V C P$ cumque sit etiam $C p = C P$, corpus p describet orbem immotum $V p$, similem: et æqualem orbi $V P K$. In hoc casu corpus p , non fertur ab V , versùs P , sed in partem oppositam ut patet.



angulo $k C p$ æqualis. Nam in 1^o. casu linea $C m$, major est quam $C n$, et punctum m , extrâ peripheriam circuli radio $C k$, vel $C n$, descripti cadit, adeoque præter quam quâ corpus utrumque ad centrum urgetur, requiritur vis altera quâ corpus p , adhuc describat $m n$. In 2^o. casu $C m$, minor est quam $C n$, puncto m , cadente inter puncta k , et r , in lineâ $k r$. In 3^o. casu $C m = C n$, coincidentibus punctis m, n, k .

447. Si orbis $v p k$ movetur in antecedentia minori celeritate quam sit dupla ejus quâ linea $C P$ in consequentia fertur, erit angulus $m C p$, angulo $k C p$ minor. In hoc enim casu angulus $V C v$ minor est duplo angulo $V C P$, vel $v C p$. adeoque angulus $V C p$, minor angulo $V C P$, vel $v C p$ et hinc angulus $m C p$, minor angulo $k C p$ (per constr.)

$\frac{r k q}{2 k C}$, vel ut $m k \times m s$ ad $r k$ quadratum; hoc est, si capiantur datæ

quantitates F, G in eâ ratione ad invicem quam habet angulus $V C P$ ad angulum $V C p$, ut $G G - F F$ ad $F F$. Et ⁽ⁱ⁾ propterea, si centro C intervallo quovis $C P$ vel $C p$ describatur sector circularis æqualis areae toti $V P C$, quam corpus P tempore quovis in orbe immobili revolvens radio ad centrum ducto descripsit: differentia virium, quibus corpus P in orbe immobili et corpus p in orbe mobili revolvuntur, erit ad vim centripetam, quâ corpus aliquod, radio ad centrum ducto, sectorem illum eodem tempore, quo descripta sit area $V P C$ uniformiter describere potuisset, ut $G G - F F$ ad $F F$. Namque sector ille et area $p C k$ sunt ad invicem ut tempora quibus describuntur.

Corol. 2. Si orbis $V P K$ ellipsis sit umbilicum habens C et apsidem summam V ; eique similis et æqualis ponatur ellipsis $u p k$, ita ut sit semper $p C$ æqualis $P C$ et angulus $V C p$ sit ad angulum $V C P$ in datâ ratione G ad F ; pro altitudine autem $P C$ vel $p C$ scribatur A , et pro ellipseos latere recto ponatur $2 R$: erit vis, quâ corpus in ellipsi mobili revolvi potest, ut $\frac{F F}{A A} + \frac{R G G - R F F}{A \text{ cub.}}$ et contra. Exponatur enim

vis quâ corpus revolvatur in immotâ ellipsi per quantitatem $\frac{F F}{A A}$, et vis in

V erit $\frac{F F}{C V \text{ quad.}}$. ^(k) Vis autem quâ corpus in circulo ad distantiam

$m n : Z r = m k \times m s : k r^2$, ob $m t = 2 k C$. Si verò capiantur duæ quantitates G, F , in eâ ratione ad invicem quam habet angulus $V C p$, ad angulum $V C P$, seu quam habet $m r$, ad $k r$, erit $m k \times m s : k r^2 = G G - F F : F F$; ut ex suprâ demonstratis liquet, ergo $m n : Z r = G G - F F : F F$.

⁽ⁱ⁾ * Et propterea si centro C . Corpus P , in orbitâ $V P K$ revolvens dato tempore datum sectorem $P C K$, radio ad centrum C ducto describit (per Prop. 1.) et corpus in circulo radio $C K$ descripto uniformiter revolvens, et arcum $R K$, seu sectorem $C R K = C P K$, describens eodem tempore quo corpus P describit arcum $P K$, seu sectorem $C P K$, dato tempore datum quoque sectorem describit. Quare corpus P , in orbitâ $V P K$, et corpus in circulo prædicto revolvant. radiis ad centrum C ductis, sectores æquales temporibus æqualibus describunt. Et propterea si centro C , intervallo $C P$, vel $C p$, describatur, &c.

^(k) * Vis autem quâ corpus in circulo, &c. Demonstratio Newtoniana ita procedit: Vis quâ corpus in ellipsi circa ejus focum revolvitur, est semper æqualis cuidam quantitati con-

stanti divisæ per quadratum distantiae a foco (per Prop. XI.) Sumatur ergo pro illâ quantitate constanti, quadratum $F F$ cujus latus F est primâ ex illis indeterminatis (sed constantibus) quæ exprimunt rationem anguli $V C P$ ad angulum

$V C p$, erit vis in $V = \frac{F F}{V C^2}$. Sit corpus cir-

câ centrum quodvis in circulo revolvens, ad distantiam $C V$, eâdem velocitate quâ corpus in ellipsi revolvens urgetur in apside V , sumantur in circulo et in ellipsi arcus quamminimi eodem tempore descripti, illi arcus erunt inter se æquales, ob æquales velocitates (ex hypoth.) et eorum sagittæ erunt inter se ut vires centrales (per Corol. 4. Prop. 1.): in ellipsis autem omnibus in quibus vis centripeta ad focum tendit (et iis annumeratur circulus) latera recta sunt inversè ut arcuum quamminimo tempore descriptorum sagittæ et directè ut quadrata perpendiculari ducti ab extremitate eorum arcuum in lineam ad centrum virium tendentem (per Corol. 2. Prop. XIII.) sed in apside ellipsios et circuli, illa perpendiculara sunt ipsius arcûs, ideoque sunt æqualia; ergo latera recta hujus ellipsis et hujus circuli erunt inversè ut sagittæ

C V eâ cum velocitate revolvi posset quam corpus in ellipsi revolvens habet in V, est ad vim quâ corpus in ellipsi revolvens urgetur in apside V, ut dimidium lateris recti ellipseos ad circuli semidiametrum C V, ideoque valet $\frac{R F F}{C V \text{ cub.}}$: et vis, quæ sit ad hanc ut G G

— F F ad F F, valet $\frac{R G G - R F F}{C V \text{ cub.}}$:

estque hæc vis (per hujus Corol. 1.) differentia virium in V quibus corpus P in ellipsi immotâ V P K, et corpus p in ellipsi mobili u p k revolvuntur. Unde cum (per hanc Prop.) differentia illa in aliâ quâvis altitudine A sit ad seipsam in altitudine

C V ut $\frac{1}{A \text{ cub.}}$ ad $\frac{1}{C V \text{ cub.}}$, eadem differentia in omni altitudine A valebit $\frac{R G G - R F F}{A \text{ cub.}}$. Igitur ad vim $\frac{F F}{A A}$,

quâ corpus revolvi potest in ellipsi immobili V P K, addatur excessus $\frac{R G G - R F F}{A \text{ cub.}}$; et componetur vis tota $\frac{F F}{A A} + \frac{R G G - R F F}{A \text{ cub.}}$

quâ corpus in ellipsi mobili u p k iisdem temporibus revolvi possit.

Corol. 3. (1) Ad eundem modum colligetur quòd, si orbis immobilis

arcum sive inversè ut vires centrales; latus rectum circuli est ipsa diameter, ergo sumendo dimidium utriusque lateris recti est vis quâ corpus in ellipsi revolvens urgetur, &c. Reliqua demonstratio est plana.

(1) Ad eundem modum, &c. Si corpus revolvatur in ellipsi vi centripetâ tendente ad centrum ellipseos. vis centralis est directè ut distantia a centro, ideoque erit æqualis quantitati constanti multiplicatæ per distantiam (per Prop. X.), posito 2 T pro axe transverso et 2 R pro latere recto, sit ea quantitas constans $\frac{F F}{T^3}$,

vis in V erit $\frac{F F \times C V}{T^3}$ vel quoniam C V =

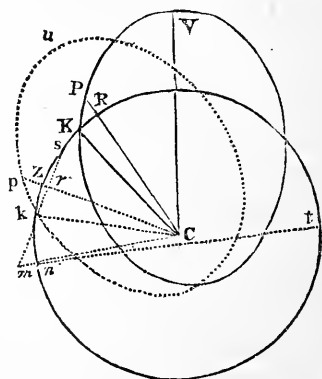
T, erit $\frac{F F}{T T}$ in aliis verò omnibus punctis erit $\frac{F F \times A}{T^3}$.

Sit corpus in circulo revolvens circa centrum C ad distantiam C V, quâlibet vi centripetâ. sed tali ut eadem velocitate feratur quâ corpus in ellipsi latum urgetur in extremitate axis transversi, sumantur in eo circulo et in extremitate axis transversi ellipseos arcus quamminimi eo-

dem tempore descripti illi arcus erunt æquales, ob æquales velocitates, et eorum sagittæ erunt ut vires centrales quibus corpora in circulo et ellipsi retinentur (per Cor. 4. Prop. I.); in ellipsis autem diversis (et iis annumeratur circulus) in quibus vis centripeta ad centrum tendit, in distantis æqualibus a centro, dupla quadrata facti axium sunt inversè ut sagittæ quam minimo tempore descriptæ, et directè ut quadrata arearum dato tempore descriptarum (per constr. Prop. X.), cum ergo hic sumantur arcus æquales et perpendiculares in lineam ad centrum ductam, et distantia a centro sint æquales, illæ arææ utrinque sunt æquales, ergo sagittæ arcuum in ellipsi et in circulo sunt inversè ut ipsa quadrata facti axium, seu quia axis transversus ellipseos et circuli diameter idem sunt, sagittæ arcuum in ellipsi et circulo sunt inversè ut quadratum axis conjugati ad quadratum transversi, sive inversè ut latus rectum ad axem transversum, ergo 2 T : 2 R (sive T : R)

= $\frac{F F}{T T}$; ad vim in circulo quæ itaque erit $\frac{R \times F F}{T^3}$ sed hæc vis est ad differentiam virium

in orbe mobili et immobili, ut F F ad G G —



V P K ellipsis sit centrum habens in virium centro C; eique similis, æqualis et concentrica ponatur ellipsis mobilis u p k; sitque 2 R ellipsos hujus latus rectum principale, et 2 T latus transversum sive axis major, atque angulus V C p semper sit ad angulum V C P ut G ad F; vires, quibus corpora in ellipsi immobili et mobili temporibus æqualibus revolvi possunt, erunt ut $\frac{F F A}{T \text{ cub.}}$ et $\frac{F F \Lambda}{T \text{ cub.}}$ + $\frac{R G G - R F F}{A \text{ cub.}}$ respectivè.

Corol. 4. Et universaliter, si corporis altitudo maxima C V nominetur T, et radius curvaturæ quam orbis V P K habet in V, id est radius circuli æqualiter curvi, nominetur R, et vis centripeta, quâ corpus in trajectoryâ quâcunque immobili V P K revolvi potest in loco V dicatur $\frac{V F F}{T T}$, atque aliis in locis P indefinitè dicatur X, altitudine C P nominatâ A, et capiatur G ad F in datâ ratione anguli V C p ad angulum V C P: erit ^(m) vis centripeta, quâ corpus idem eosdem motus in eâdem trajectoryâ u p k circulariter motâ temporibus iisdem peragere potest, ut summa virium $X + \frac{V R G G - V R F F}{A \text{ cub.}}$.

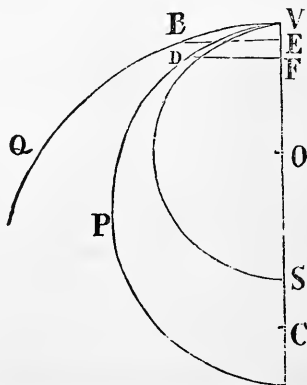
F F, ergo illa differentia est $\frac{R G G - R F F}{T^3}$, hæc autem differentia in V, est ad differentiam in alio quovis loco inversè ut cubi altitudinum ergo $A^3 : C V^3$ (sive T^3) = $\frac{R G G - R F F}{T^3}$:

$\frac{R G G - R F F}{A^3}$, cum ergo vis in orbe immobili sit ut $\frac{F F A}{T^3}$ in orbe mobili erit $\frac{F F A}{T^3}$ + $\frac{R G G - R F F}{A^3}$. Q. e. d.

^(m) * Erit vis centripeta. Ut hæc commodè demonstrantur adhibendum Lemina sequens.

448 *Lemma.* Si corpus ad centrum virium C tendens describat trajectoryam immotam V P, vis centripeta quâ in apside V urgetur est ad vim centripetam corporis alterius in circulo V B Q, ad eandem distantiam C V, eâdem cum velocitate revolvantis, ut distantia C V ad V O radium circuli V D S, trajectoryam V P osculantis in V. Capiantur in circulo V B Q et in trajectoryâ V P arcus quam minimi et æquales V B, V D, et ex punctis B et D ad rectam C V demissa intelligantur perpendicularia B E, D F; arcus evanescentes V B, V D eodem tempore a corporibus duobus percurrerentur, ob utriusque corporis velocitatem æqualem. eruntque perpendicularia B E, D F æqualia (per Lem. VII.) Quoniam autem arcus evanescens V D usurpari potest pro arcu circuli curvam V P osculantis in V, erit ex naturâ circuli V F : D F = D F :

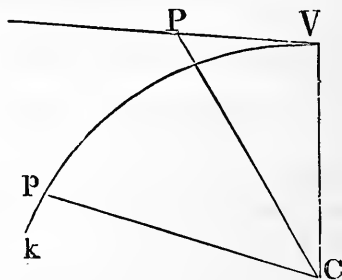
V O + F O, seu 2 V O, adeoque D F² = 2 V O × V F, et similiter B E² = 2 V C × V E = 2 V O × V F; undè V F : V E = V C : V O; sed vis centripeta corporis arcum



V D describentis, est ad vim centripetam alterius corporis arcum V B describentis ut V F ad V E, quæ sunt spatia viribus illis urgentibus eodem tempusculo descripta, quare vis centripeta quâ corpus in apside V urgetur, est ad vim centripetam alterius corporis in circulo ad eandem distantiam eâdem cum velocitate revolvantis, ut distantia illa C V ad radium V O circuli osculatoris in V. Q. e. d.

Corol. 5. Dato igitur motu corporis in orbe quocunque immobili, augeri vel minui potest ejus motus angularis circa centrum virium in ratione datâ, et inde inveniri novi orbes immobiles in quibus corpora novis viribus centripetis gyrentur.

Corol. 6. Igitur si ad rectam C V positione datam erigatur perpendicularum V P longitudinis indeterminatæ, jungaturque C P, et ipsi æqualis agatur C p, constituens angulum V C p, qui sit ad angulum V C P in datâ ratione; vis quâ corpus gyriari potest in curva illa V p k quam punctum p perpetuò tangit, erit reciprocè ut cubus altitudinis C p. Nam ⁽ⁿ⁾ corpus P per vim inertiae, nullâ aliâ vi urgente, uniformiter progredi potest in rectâ V P. Addatur vis in centrum C, cubo altitudinis C P vel



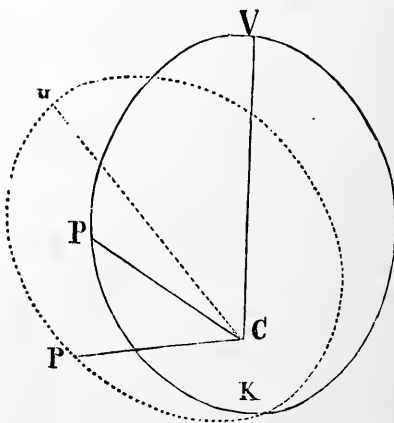
449. *Corol. 1.* Si radius VO circuli trajectorym V P osculantis in apside V dicatur R, distantia CV, T, distantia C P, A, vis centripeta in V, $\frac{V F F}{T T}$, hæc erit ad vim centripetam in circulo V Q, ad eandem distantiam C V eadem cum velocitate descripto ut T ad R, (448) hæc ergo erit $\frac{V F F}{T^3}$, quæ erit ad differentiam virium centripetarum in apsidibus V et u, orbis immobilis V P, et orbis mobilis u p, ut F F ad G G — F F (per Cor. 1. Newt.) ideoque differentia illa erit $\frac{V R G G - V R F F}{T^3}$ quæ erit ad differentiam in aliis locis P ut A³ ad T³, ideoque in quibusvis locis erit differentia virium in orbe mobili et immobili $\frac{V R G G - V R F F}{A^3}$.

Quod aliâ ratione demonstravit Hermannus Prop. 25. Lib. 1. Phoronomiæ.

450. *Corol. 2.* Hinc si vis centripeta in quovis puncto P, orbitæ immobilis V P, dicatur X, vis in puncto æquè alto p, orbitæ mobilis u p erit $= X + \frac{V R G G - V R F F}{A^3}$. Q. e. d.

451. *Corol. 3.* Si orbitæ V P et u p sint ellipses quarum umbilicus communis C, erit (240) radius osculi R æqualis dimidio lateri recto ellipsos V P, vel u p: et (per Prop. XI.) $X: \frac{V F F}{T T} = T T: A A$, adeoque $X = \frac{V F F}{A A}$. Ergo (450) vis in orbitâ mobili erit $\frac{V F F}{A A} + \frac{V R G G - V R F F}{A^3}$, et divis omnibus terminis per V ut $\frac{F F}{A A} + \frac{R G G - R F F}{A^3}$;

et si vis centralis ad centrum ellipseos dirigatur erit $X: \frac{V F F}{T T} = A: T$ et $X = \frac{V F F \times A}{T^3}$



et vis in orbita mobili erit $\frac{V F F \times A}{T^3} + \frac{V R G G - V R F F}{A^3}$ et divis terminis per V erit $\frac{F F \times A}{T^3} + \frac{R G G - R F F}{A^3}$; sicut in Cor. 3. et 4. Newt. inventum fuerat.

⁽ⁿ⁾ * Nam corpus P. Linea V P considerari potest tanquam trajectory immota, in quâ vis centripeta X in loco quovis P nulla est, et radius osculi R infinitus; erit igitur in hoc casu (per Cor. 4.) vis centripeta in loco p, trajectory

C p, reciprocè proportionalis, et (per jam demonstrata) detorquebitur motus ille rectilineus in lineam curvam V p k. Est (°) autem hæc curva V p k eadem cum curvâ illâ V P Q in Corol. 3. Prop. XLI. inventâ, in quâ ibi diximus corpora hujusmodi viribus attracta obliquè ascendere.

PROPOSITIO XLV. PROBLEMA XXXI.

(P) *Orbium qui sunt circulis maxime finitimi requiruntur motus apsidum.*

(q) Problema solvitur arithmetice faciendo ut orbis, quem corpus in

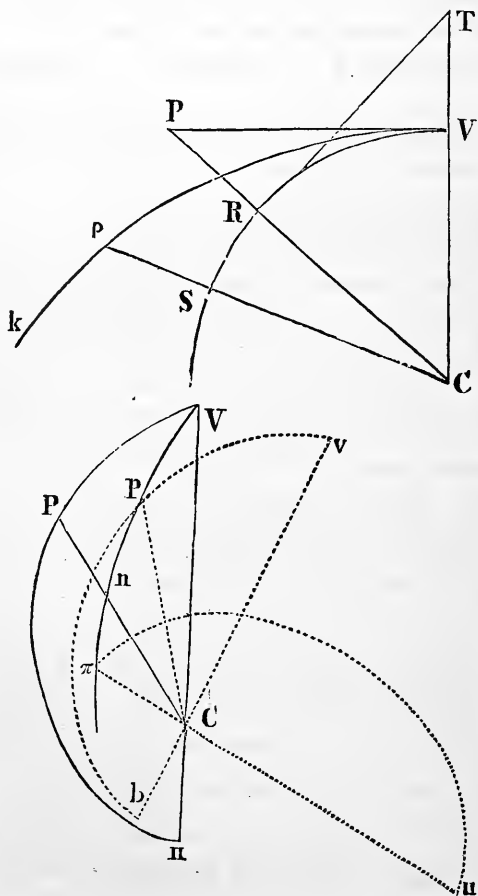
mobilis, æqualis $\frac{V R G G - V R F F}{A^3}$, adeo-
que ob datam quantitatem $V R G G - V R F F$,
erit X, seu vis in p, ut $\frac{1}{A^3}$.

proximè accedet, nam si ellipsis V P Π, in circulum perfectum mutetur, orbis V p n π fit quoque circulus.

(q) * *Problema solvitur arithmetice. Revol.*

(°) * *Est autem hæc curva V p k eadem, &c.* Nam si centro C intervallo C V describatur circulus V R S quem recta C P secat in R, recta C p, in S, sitque angulus S C V ad angulum R C V in datâ ratione, erit quoque sector S V C ad sectorem R V C in datâ illâ ratione, et ductâ per punctum R tangente R T, quæ radio C V producto occurrat in T, ejusdem anguli R C V secantes C P, C T erunt æquales, atque adeo curva V p k, eadem cum curvâ V P Q, in Corol. 3°. Prop. 41. inventâ, in quâ recta C p est semper æqualis abscissæ C T, et angulus V C p est semper sectori V C R proportionalis.

(P) * *Orbium qui sunt, &c.* Iisdem positis quæ in Propositione 44. et ejus Corollariis 1. et 2. sit V p n π orbis quem corpus p in ellipsi mobili u p b revolvens describit in plano immobili, et V Π, v b, ellipseon immobilis et mobilis axes transversi, manifestum est punctum V esse apsidem summam tam in ellipsi immotâ V P Π, quàm in orbe V p n π, et esse π apsidem imam in orbe V p n π si fuerit C π = C b = C Π, in quâ hypothese corpus p pervenit ad locum π, ubi corpus P, in ellipsi immotâ pervenit ad apsidem imam Π et in ellipsi revolvente corpus p pervenit ad b, ac in orbe V p n π, puncta p, b, π, coincidunt. Jam verò datâ vi centripetâ in orbe V p n π, quæritur motus apsidum, hoc est, motus axis u C b, seu quod idem est, quæritur ratio F, ad G, vel anguli V C P ad angulum V C p, aut anguli V C Π, 180°. ad angulum V C π; quod si ellipsis V P Π, sit circulo maxime finitima, orbis V p n π ad circuli formam quam

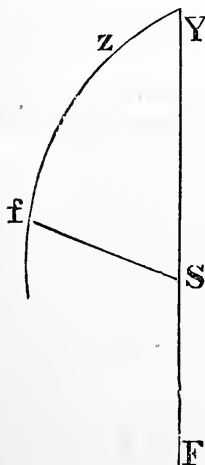


ellipsi mobili (ut in Propositionis superioris Corol. 2. vel. 3.) revolvens describit in plano immobili, accedat ad formam orbis cujus apsides requiruntur, et quærendo apsides orbis quem corpus illud in plano immobili describit. Orbis autem eandem acquirunt formam, si vires centripetæ quibus describuntur, inter se collatæ, in æqualibus altitudinibus reddantur proportionales. Sit punctum V apsis summa, et scribantur T pro altitudine maximâ C V, A pro altitudine quâvis aliâ C P vel C p, et X pro altitudinum differentiâ C V — C P; et vis, quâ corpus in ellipsi circa umbilicum suum C (ut in Corol. 2.) revolvente movetur,

quæque in Corol. 2. erat ut $\frac{F F}{A A} + \frac{R G G - R F F}{A \text{ cub.}}$, id est ut $\frac{F F A + R G G - R F F}{A \text{ cub.}}$, substituendo T — X pro A, erit ut $\frac{R G G - R F F + T F F - F F X}{A \text{ cub.}}$. Reducenda similiter est vis alia

quævis centripeta ad fractionem cujus denominator sit A cub. et numeratores, factâ homologorum terminorum collatione, statuendi sunt analogi. Res exemplis patebit.

vatur corpus Y in orbe immoto Y Z f vi centripetâ datâ tendente ad centrum S, sitque punctum Y apsis summa, f apsis ima in illo orbe.



Umbilico S, et axe transverso Y S F = Y S + S f, descriptæ intelligantur ellipses immobiles et mobilis, efficiendum est ut corpus Y orbem Y Z f describens, simul revolvatur in hac ellipsi mobili, dum corpus aliud ellipsim immotam des-

cribit eâ ratione quam exposuimus Prop. 43. et inveniendus est apsidum motus. Id autem absolvitur faciendo ut orbis V p n π (fig. superiori) qui omnes orbis ut Y Z f quæcumque sit in illis vis centripetæ lex generaliter exhibet accedat ad formam orbis Y Z f, sive ei similis et æqualis fiat, ac quærendo apsides V π , vel rationem angularum V C P, V C p, in orbe illo V p n π . Porro si supponamus orbem V p n π , similem et æqualem factum esse orbi Y Z f, erit vis centripeta in ellipsi immotâ cujus umbilicus S vel C ut $\frac{F F}{A A}$, et vis centripeta in loco quovis Z

$$\text{orbis Y Z f, vel in loco P, orbis V p n } \pi, \text{ ut } \frac{F F}{A A} + \frac{R G G - R F F}{A^3} = \frac{F F A + R G G - R F F}{A^3} = \frac{R G G - R F F + T F F - F F X}{A^3} = \frac{P}{A^3},$$

substituendo T — X pro A in numeratore, et P pro numeratore toto. Unde si quantitas $\frac{Q}{A^3}$ vim centripetam in loco quovis Z orbis Y Z f

exponat, eaque sit data, erit $\frac{P}{A^3}$ ad $\frac{Q}{A^3}$ in datâ ratione. Sit illa ratio I ad B, et erit $\frac{P B}{A^3} = \frac{Q}{A^3}$,

et P B — Q = 0. Loco A, in quantitate Q, substituat T — X, et æqualitatis P B — Q = 0. termini omnes analogi se mutuo destruere debent, hoc est, termini omnes dati seu in quibus

(^r) *Exempl.* 1. Ponamus vim centripetam uniformem esse, ideoque ut $\frac{A \text{ cub.}}{A \text{ cub.}}$, sive (scribendo $T - X$ pro A in numeratore) ut $\frac{T \text{ cub.} - 3 T T X + 3 T X X - X \text{ cub.}}{A \text{ cub.}}$; et collatis numeratorum

terminis correspondentibus; nimirum datis cum datis, et non datis cum non datis, fiet $R G G - R F F + T F F$ ad $T \text{ cub.}$ ut $- F F X$ ad $- 3 T T X + 3 T X X - X \text{ cub.}$ sive ut $- F F$ ad $- 3 T T + 3 T X - X X$. Jam cum orbis ponatur circulo quam maximè finitimus, coëat orbis cum circulo; et ob factas R, T æquales, atque X in infinitum diminutam, rationes ultimæ erunt $R G G$ ad $T \text{ cub.}$ ut $- F F$ ad $3 T T$, seu $G G$ ad $T T$ ut $F F$ ad $3 T T$, et vicissim $G G$ ad $F F$ ut $T T$ ad $3 T T$, id est, ut 1 ad 3; ideoque G ad F , hoc est angulus $V C p$ ad angulum $V C P$, ut 1 ad $\sqrt{3}$. Ergo cum corpus in ellipsi immobili, ab apside summâ ad apsidem imam descendendo conficiat angulum $V C P$ (ut ita dicam) graduum 180; corpus aliud in ellipsi mobili, atque ideo in orbe immobili de quo agimus, ab apside summâ ad apsidem imam descen-

dendo conficiet angulum $V C p$ graduum $\frac{180}{\sqrt{3}}$: id ideo ob similitudinem orbis hujus, quem corpus agente uniformi vi centripetâ describit, et orbis illius quem corpus in ellipsi revolvante gyros peragens describit in plano quiescente. Per superiorem terminorum collationem similes redduntur ni orbes, non universaliter sed tunc cum ad formam circularem quam maximè appropinquant. Corpus igitur uniformi cum vi centripetâ in orbe propemodum circulari revolvens, inter apsidem summam et apsidem

non reperitur quantitas variabilis X erunt simul nihilo æquales, et termini non dati, seu in quibus variabilis X invenitur, erunt etiam simul nihilo æquales, atque inde determinabitur ratio G ad F seu anguli $V C p$ ad angulum $V C p$, faciendo ut sint termini dati in quantitate P ad terminos non datos ejusdem quantitatis, ita termini dati in quantitate Q , ad terminos non datos ejusdem quantitatis. Quod exemplis patebit.

(^r) * *Exemplum 1^{um}.* Ponamus vim centripetam in orbe $Y Z f$ uniformem seu constantem esse, ideoque ut 1, seu ut $\frac{A^3}{A^3}$, erit $Q = A^3 =$

$T^3 - 3 T T X + 3 T X X - X^3$, et $P B = B R G G - B R F F + B T F F - B F F X$ atque adeo $B R G G - B R F F + B T F F - B F F X = T^3 + 3 T T X - 3 T X X + X^3 = 0$, et termini dati $B R G G - B R F F + B T F F - T^3 = 0$, seu $B R G G - B R F F + B T F F = T^3$, et termini non dati $- B F F X +$

$3 T T X - 3 T X X + X^3 = 0$, seu $B F F X = 3 T T - 3 T X + X^2$, unde hæc proportio deducitur $B R G G - B R F F + B T F F : B F F = T^3 : 3 T T - 3 T X + X^2 = R G G - R F F + T F F : F F$. Jam cum orbis $Y Z f$, ponatur circulo quam maximè finitimus, coëat orbis cum circulo et ob factas R et T æquales, atque $X = 0$, erit $X^2 = 0$, $3 T X = 0$, $R F F = T F F$, et hinc $T^3 : 3 T T = R G G : F F = T G G : F F$, et $T^2 : 3 T^2 = 1 : 3 = G G : F F$, adeoque $G : F = 1 : \sqrt{3}$, hoc est, angulus $V C p$, est ad angulum $V C P$, ut 1, ad $\sqrt{3}$. Ergo cum corpus in ellipsi immobili $V P \Pi$, ab apside summâ V ad apsidem imam Π descendendo, conficiat angulum $V C \Pi$ grad. 180. corpus aliud in ellipsi mobili $u p b$, atque adeo in orbe immobili $V p u \pi$, seu $Y Z f$, ab apside summâ V vel Y , ad apsidem imam π vel f , descendendo conficiet angulum $V C \pi$, vel $Y S f$ grad. $\frac{180}{\sqrt{3}}$.

imam conficiet semper angulum $\frac{180}{\sqrt{3}}$ graduum, seu 103 gr. 55 m. 23 sec. ad centrum; perveniens ab apside summâ ad apsidem imam ubi semel confecit hunc angulum, et inde ad apsidem summam rediens ubi iterum confecit eundem angulum; et sic deinceps in infinitum.

Exempl. 2. Ponamus vim centripetam esse ut altitudinis A dignitas quælibet A^{n-3} seu $\frac{A^n}{A^3}$: ubi $n-3$ et n significant dignitatum indices quoscunque integros vel fractos, rationales vel irrationales, affirmativos vel negativos. Numerator ille A^n seu $T-X|^n$ in seriem indeterminatam per (*) methodum nostram serierum convergentium reductus, evadit $T^n - n X T^{n-1} + \frac{n n - n}{2} X X T^{n-2}$, &c. Et collatis hujus terminis cum terminis numeratoris alterius $R G G - R F F + T F F - F F X$, fit $R G G - R F F + T F F$ ad T^n ut $- F F$ ad $- n T^{n-1} + \frac{n n - n}{2} X T^{n-2}$, &c. Et sumendo rationes ultimas ubi orbes ad formam circularem accedunt, fit $R G G$ ad T^n ut $- F F$ ad $- n T^{n-1}$, seu $G G$ ad T^{n-1} ut $F F$ ad $n T^{n-1}$, et vicissim $G G$ ad $F F$ ut T^{n-1} ad $n T^{n-1}$ id est ut 1 ad n ; ideoque G ad F , id est angulus $V C p$ ad angulum $V C P$, ut 1 ad \sqrt{n} . Quare cum angulus $V C P$, in descensu corporis ab apside summâ ad apsidem imam in ellipsi confectus, sit graduum 180; conficietur angulus $V C p$, in descensu corporis ab apside summâ ad apsidem imam, in orbe propemodum circulari quem corpus quodvis vi centripetâ dignitati A^{n-3} proportionali describit, æqualis angulo graduum $\frac{180}{\sqrt{n}}$; et hoc angulo repetito angulus redibit ab apside imâ ad apsidem summam, et sic deinceps in infinitum. Ut si vis centripeta sit ut distantia corporis a centro, id est, ut A seu $\frac{A^4}{A^3}$, erit n æqualis 4 et \sqrt{n} æqualis 2; ideoque angulus inter apsidem summam et apsidem imam æqualis $\frac{180}{2}$ gr. seu 90 gr. Com-

(*) * *Per methodum nostram.* Vide fragmentum Epistolæ Newtoni ad Oldenburgium, et theorematibus ibi propositi demonstrationem requiras ex Elementis Algebræ clarissimorum Virorum Wolfii, Abbatis de Molieres, vel ex Analysis demonstratâ Patris Reyneau, aut ex aliis passim authoribus. Interim cùm hic satis sit duos priores terminos dignitatis $(T-X)^n$

reperire ob evanescentes terminos in quibus reperitur ipsius X dignitas primâ altior, facile demonstratur ex dignitatibus per continuam radicis multiplicationem formatione duos illos priores terminos esse $T^n - n X T^{n-1}$. Ut si fuerit $n = 2$, duo priores termini dignitatis $(T-X)^2$, erunt $T^2 - 2 X T X$; si $n = 3$, erunt $T^3 - 3 X X T^2$, et ita porro; atque hinc patet

pletâ igitur quartâ parte revolutionis unius corpus perveniet ad apsidem imam, et completâ aliâ quartâ parte ad apsidem summam, et sic deinceps per vices in infinitum. Id ^(t) quod etiam ex Propositione X. manifestum est. Nam corpus urgente hâc vi centripetâ revolvitur in ellipsi immobili, cujus centrum est in centro virium. Quod si vis centripeta sit reciprocè ut distantia, id est directè ut $\frac{1}{A}$ seu $\frac{A^2}{A^3}$, erit n æqualis 2, ideo-

que inter apsidem summam et imam angulus erit graduum $\frac{180}{\sqrt{2}}$ seu 127 gr. 16 m. 45 sec. et propterea corpus tali vi revolvens, perpetuâ anguli hujus repetitione, vicibus alternis ab apside summâ ad imam et ab imâ ad summam perveniet in æternum. Porro si vis centripeta sit reciprocè ut latus quadratoquadratum undecimæ dignitatis altitudinis, id est

reciprocè ut $A^{\frac{11}{4}}$, ^(u) ideoque directè ut $\frac{1}{A^{\frac{11}{4}}}$ seu ut $\frac{A^{\frac{1}{4}}}{A^3}$ erit n æqualis $\frac{1}{4}$,

et $\frac{180}{\sqrt{11}}$ gr. æqualis 360 gr. et propterea corpus de apside summâ discedens et subinde perpetuò descendens, perveniet ad apsidem imam ubi complevit revolutionem integram, dein perpetuo ascensu complendo aliam revolutionem integram, redibit ad apsidem summam: et sic per vices in æternum.

Exempl. 3. Assumentes m et n pro quibusvis indicibus dignitatum altitudinis, et b, c pro numeris quibusvis datis, ponamus vim centripetam

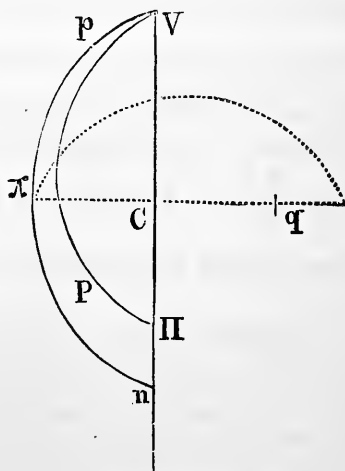
quàm compendiosa sit Newtoniana methodus motum apsidum determinandi, nam præterquam quod sufficit duos dignitatum terminos invenire, possunt quoque termini æquales R F F, T F F, in formulâ R G G — R F F + T F F — F F X, deleri; undè tantummodò conferendus terminus datus R G G cum aliis terminis datis, et terminus non datus — F F X cum aliis non datis.

^(t) * *Id quod etiam ex Prop. X., &c.* Nam corpus urgente hâc vi centripetâ revolvitur in ellipsi immobili V p π n, cujus centrum est in centro virium C, axis transversus V n, axis conjugatus π q, apsides summæ duæ V, n, imæ π , q; ellipseos autem mobilis V P Π , umbilicus erit C, axis transversus V Π = V C + C Π .

^(u) * *Ideoque directè ut* $\frac{1}{A^{\frac{11}{4}}}$, *seu ut* $\frac{A^{\frac{1}{4}}}{A^3}$,

cum sit $A^3 = A^{\frac{12}{4}}$, et proindè est $\frac{A^3}{A^{\frac{11}{4}}} =$

$A^{\frac{1}{4}}$, atquè ità $\frac{1}{A^{\frac{11}{4}}} = \frac{A^{\frac{1}{4}}}{A^3}$.



esse ut $\frac{b A^m + c A^n}{A \text{ cub.}}$, id est, ut $\frac{b \text{ in } \overline{T-X}^m + c \text{ in } \overline{T-X}^n}{A \text{ cub.}}$

seu (*) (per eandem methodum nostram serierum convergentium) ut

$$\frac{b T^m + c T^n - m b X T^{m-1} - n c X T^{n-1} + \frac{m m - m}{2} b X X T^{m-2} - \frac{n n - n}{2} c X X T^{n-2}, \&c.}{A \text{ cub.}}$$

+ $\frac{n n - n}{2} c X X T^{n-2}, \&c.$ et collatis numeratorum terminis, fiet

$$R G G - R F F + T F F \text{ ad } b T^m + c T^n, \text{ ut } - F F \text{ ad } - m b T^{m-1} - n c T^{n-1} + \frac{m m - m}{2} b X T^{m-2} + \frac{n n - n}{2} c X T^{n-2}, \&c.$$

Et sumendo rationes ultimas quæ prodeunt ubi orbes ad formam circularem accedunt, fit $G G$ ad $b T^{m-1} + c T^{n-1}$, ut $F F$ ad $m b T^{m-1} + n c T^{n-1}$, et vicissim $G G$ ad $F F$ ut $b T^{m-1} + c T^{n-1}$ ad $m b T^{m-1} + n c T^{n-1}$. Quæ proportio, exponendo altitudinem maximam $C V$ seu T arithmetice per unitatem, fit $G G$ ad

$F F$ ut $b + c$ ad $m b + n c$, ideoque ut 1 ad $\frac{m b + n c}{b + c}$. Unde est G

ad F , id est angulus $V C p$ ad angulum $V C P$, ut 1 ad $\sqrt{\frac{m b + n c}{b + c}}$.

Et propterea cum angulus $V C P$ inter apsidem summam et apsidem

imam in ellipsi immobili sit 180 gr. erit angulus $V C p$ inter easdem apsidem, in orbe quem corpus vi centripetâ quantitati $\frac{b A^m + c A^n}{A \text{ cub.}}$ proportionali describit, æqualis angulo graduum $180 \sqrt{\frac{b + c}{m b + n c}}$. Et (†)

eodem argumento si vis centripeta sit ut $\frac{b A^m - c A^n}{A \text{ cub.}}$, angulus inter

apsides inveniatur graduum $180 \sqrt{\frac{b - c}{m b - n c}}$. Ne secus resolvatur

(*) * *Sec. per eandem methodum.* Etenim dignitas $\overline{T-X}^m$ evoluta, est $T^m - m X T^{m-1}, \&c.$ adeoque $b \times \overline{T-X}^m = b T^m - m b X T^{m-1}, \&c.$ et similiter $c \times \overline{T-X}^n = c T^n - n c X T^{n-1}, \&c.$ unde $b \times \overline{T-X}^m + c \times \overline{T-X}^n = b T^m + c T^n - m b X T^{m-1} - n c X T^{n-1}, \&c.$

(†) * *Et eodem argumento.* Si vis centripeta sit ut $\frac{b A^m - c A^n}{A^3}$, id est ut

$b \times \overline{T-X}^m - c \times \overline{T-X}^n$, seu ut

$$\frac{b T^m - c T^n - m b X T^{m-1} + n c X T^{n-1}}{A^3},$$

&c. collatis terminis fiet $R G G$, hoc est $T G G$ ad $b T^m - c T^n$, ut $- F F$ ad $- m b T^{m-1} + n c T^{n-1}$, adeoque $G G$ ad $b T^{m-1} - c T^{n-1}$, ut $F F$ ad $m b T^{m-1} - n c T^{n-1}$, et ponendo $T = 1$, erit $G G : F F = b - c : m b - n c = 1 : \frac{m b - n c}{b - c}$, et $G : F = 1 : \sqrt{\frac{m b - n c}{b - c}}$.

problema in casibus difficilioribus. Quantitas, cui vis centripeta proportionalis est, resolvi semper debet in series convergentes denominatorem habentes A cub. Dein pars data numeratoris qui ex illâ operatione provenit ad ipsius partem alteram non datam, et pars data numeratoris hujus $R G G - R F F + T F F - F F X$ ad ipsius partem alteram non datam in eâdem ratione ponendæ sunt: Et quantitates superfluas delendo, scribendoque unitatem pro T , obtinebitur proportio G ad F .

Corol. 1. Hinc si vis centripeta sit ut aliqua altitudinis dignitas, inveniri potest dignitas illa ex motu apsidum; et contra. Nimirum si motus totus angularis, quo corpus redit ad apsidem eandem, sit ad motum angularem revolutionis unius, seu graduum 360, ut numerus aliquis m ad numerum alium n , et altitudo nominetur A : erit vis ut altitudinis dignitas illa

$A^{\frac{n n}{m m}} - 5$, cujus index est $\frac{n n}{m m} - 3$. Id ⁽²⁾ quod per exempla secunda manifestum est. ^(a) Unde liquet vim illam in majore quàm triplicatâ altitudinis ratione, in recessu a centro, decrescere non posse: ^(b) Corpus tali

⁽²⁾ 452. * *Id quod per exempla secunda manifestum est.* Si in exemplo secundo loco indicis n , ad confusionem tollendam scribatur p , erit vis centripeta, ut $A^p - 3$, et angulus confectus in descensu ab apside summâ ad apsidem imam

æqualis angulo $\frac{180^\circ}{\sqrt{p}}$, adeoque duplus ille angulus seu motus totus angularis quo corpus ab apside summâ redit ad eandem erit $\frac{360}{\sqrt{p}}$ in exemplo secundo. Est autem in casu corollarii hujus, motus totus angularis quo corpus redit ad apsidem eandem æqualis angulo $\frac{360 m}{n}$,

ergo $\frac{360}{\sqrt{p}} = \frac{360 m}{n}$, et $\frac{1}{\sqrt{p}} = \frac{m}{n}$, et $\frac{1}{p} = \frac{m m}{n n}$, et $\frac{n n}{m m} = p$; quare $A^p - 3 =$

$A^{\frac{n n}{m m}} - 3$.

^(a) 453. *Unde liquet vim illam.* Nam si vis esset ut $\frac{1}{A^3 + q}$, seu ut $A^{-3 - q}$, sitque $+q$

quantitas positiva, esset $\frac{n n}{m m} - 5 = -5 -$

q , et $\frac{n n}{m m} = -q$, hoc est, quadratum quanti-

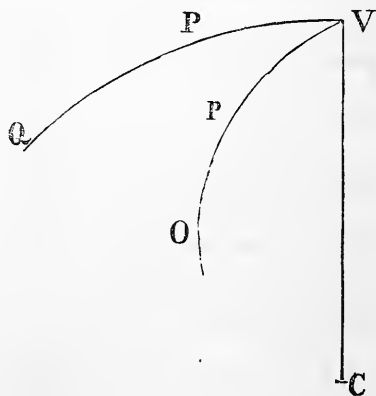
tatis $\frac{n}{m}$ negativum quod absurdum est: non

potest igitur vis in majore quam in triplicatâ alti-

tudinis ratione seu in ratione $\frac{1}{A^3 + q}$, in recessu a centro decrescere.

Vol. I.

^(b) * *Corpus tali vi revolvens; hoc est, vi quæ in recessu a centro decrescat in ratione altitudinis triplicatâ deque apside discedens, &c.* Sint enim ut in Corol. 3^o. Prop. 41. duæ curvæ

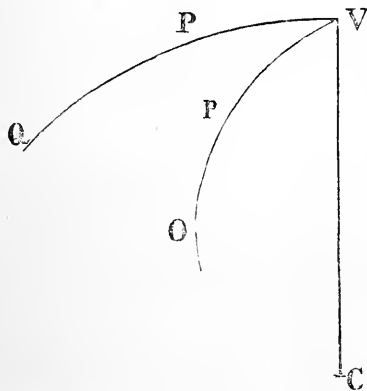


$V p O$, $V P Q$, quas corpora duo de loco V , secundum directionem ad C V perpendicularem egressa, vi centripetâ ad C tendente, et in triplicatâ altitudinis ratione decrescente in recessu a centro describunt, et corpus in curvâ $V p O$ latum ad centrum semper accedat, corpus verò in curvâ $V P Q$, motum a centro semper recedat ut in eodem Cor. 5^o. Prop. 41. manifestum est punctum V esse apsidem summam in curvâ $V p O$, et esse apsidem imam in curvâ $V P Q$;

S

vi revolvens deque apside discedens, si cœperit descendere nunquam perveniet ad apsidem imam seu altitudinem minimam, sed descendet usque ad centrum, describens curvam illam lineam de quâ egimus in Corol. 3. Prop. XLI. Sin cœperit illud, de apside discedens, vel minimum ascendere; ascendet in infinitum, neque unquam perveniet ad apsidem summam. Describet enim curvam illam lineam de quâ actum est in eodem Corol. et in Corol. 6. Prop. XLIV. Sic (^c) et ubi vis, in recessu a centro, decrescit in majore quam triplicatâ ratione altitudinis, corpus de apside discedens, perinde ut cœperit descendere vel ascendere, vel descendet ad centrum usque vel ascendet in infinitum. At (^d) si vis, in recessu a centro, vel decrescat in minore quam triplicatâ ratione altitudinis, vel crescat in altitudinis ratione quâcumque; corpus nunquam descendet ad

Quare cum in curvâ V p O, corpus ad centrum semper accedat, nunquam pervenire potest ad apsidem imam, seu altitudinem minimam quæ nulla est, sed gyris infinitis descendit usque ad



centrum; in curvâ verò V P Q de apside imâ discedens corpus ascendit in infinitum, neque unquam pervenit ad apsidem summam quæ nulla est. Hæc demonstrari etiam possunt hâc ratione; Si fuerit vis ut $\frac{1}{A^3}$, seu ut A^{-3} , erit

$\frac{n n}{m m} - 3 = -3$, et $\frac{n n}{m m} = 0 = p$ (452) et motus totus angularis ab apside ad eandem apsidem erit $\frac{360^\circ}{\sqrt{p}} = \frac{360}{0}$; motus verò angularis ab apside summâ ad imam, vel ab imâ ad summam erit $\frac{180^\circ}{0}$ quæ est quantitas infinita, undè liquet in nostrâ hypothesi corpus ab apside imâ ad summam aut a summâ ad imam nunquam pervenire posse.

(^c) * Sic et ubi vis in recessu a centro. Si vis fuerit ut $\frac{1}{A^3 + q}$, et q, quantitas positiva, erit

(453) $\frac{n n}{m m} = -q = p$, et (452) motus totus angularis ab apside ad apsidem eandem erit $\frac{180^\circ}{\sqrt{-q}}$, et ab apside unâ ad alteram erit $\frac{180^\circ}{\sqrt{-q}}$; quare ob imaginariam quantitatem $\sqrt{-q}$, impossibile est ut corpus de apside summâ discedens, adeoque ad centrum accedens, ad apsidem imam unquam perveniat, et ut de apside imâ discedens ac proinde a centro recedens unquam perveniat ad apsidem summam.

(^d) * At si vis in recessu a centro. Sit vis ut $\frac{1}{A^3 - q}$, et q, quantitas positiva erit $\frac{n n}{m m} - 3 = -3 + q$, et $\frac{n n}{m m} = q = p$ (452). Undè motus totus angularis ab apside ad eandem erit $\frac{360^\circ}{\sqrt{p}} = \frac{360 m}{n}$, motus angularis ab apside unâ

ad alteram $= \frac{180}{\sqrt{p}} = \frac{180 m}{n}$, quæ sunt quantitates reales et positivæ, quare in hâc hypothesi corpus ab apside ad apsidem eandem redire et ab apside summâ ad imam atque ab imâ ad summam pervenire poterit. Est autem $\frac{1}{A^3 - q}$,

altitudinis A dignitas, si fuerit q major quam 3, è contrâ $\frac{1}{A^3 - q}$ est dignitas quantitatis $\frac{1}{A}$, si fuerit q minor quam 3. Liquet igitur, si vis in recessu a centro vel decrescat in minore quam triplicatâ ratione altitudinis, (quod fit ubi q minor quam 3) vel crescat in altitudinis ratione quâcumque (quod fit ubi q, major quam 3) corpus nunquam descendere ad centrum usque, sed ad apsidem imam aliquandò pervenire.

centrum usque, sed ad apsidem imam aliquando perveniet: et (e) contra, si corpus de apside ad apsidem alternis vicibus descendens et ascendens nunquam appellat ad centrum; vis in recessu a centro aut augebitur, aut in minore quam triplicatâ altitudinis ratione decrescet: et quo citius corpus de apside ad apsidem redierit, eo longius ratio virium recedet a ratione illâ triplicatâ. Ut si corpus revolutionibus 8 vel 4 vel 2 vel $1\frac{1}{2}$ de apside summâ ad apsidem summam alterno descensu et ascensu redierit;

hoc est, si fuerit m ad n ut 8 vel 4 vel 2 vel $1\frac{1}{2}$ ad 1, ideoque $\frac{n}{m} \frac{n}{m} = 3$ valeat $\frac{1}{64} = 3$ vel $\frac{1}{16} = 3$ vel $\frac{1}{4} = 3$ vel $\frac{4}{9} = 3$: erit vis ut $A^{\frac{1}{64}} = 3$ vel $A^{\frac{1}{16}} = 3$ vel $A^{\frac{1}{4}} = 3$ vel $A^{\frac{4}{9}} = 3$, id est, reciprocè ut $A^3 = \frac{1}{64}$ vel $A^3 = \frac{1}{16}$ vel $A^3 = \frac{1}{4}$ vel $A^3 = \frac{4}{9}$. Si corpus singulis revolutionibus redierit ad apsidem eandem immotam; erit m ad n ut 1 ad 1, ideoque $A^{\frac{n}{m} \frac{n}{m}} = 3$ æqualis A^{-2} seu $\frac{1}{A^2}$; et propterea decrementum virium in ratione duplicatâ altitudinis, ut (f) in præcedentibus demonstratum est. Si corpus partibus revolutionis unius vel tribus quartis, vel duabus tertiis, vel unâ tertiâ, vel unâ quartâ, ad apsidem eandem redierit;

erit m ad n ut $\frac{3}{4}$ vel $\frac{2}{3}$ vel $\frac{1}{3}$ vel $\frac{1}{4}$ ad 1, ideoque $A^{\frac{n}{m} \frac{n}{m}} = 3$ æqualis $A^{\frac{16}{9}} = 3$ vel $A^{\frac{9}{4}} = 3$ vel $A^9 = 3$ vel $A^{16} = 3$; et (g) propterea vis aut reciprocè ut $A^{\frac{1}{9}} = 3$ vel $A^{\frac{4}{9}}$, aut directè ut A^6 vel A^{15} . Denique si corpus pergendo ab apside summâ ad apsidem summam confecerit revolutionem integram, et præterea gradus tres, ideoque apsis illa singulis

(e) * *Et contra si corpus de apside ad apsidem, &c.* Nam si vis in recessu a centro non augeatur, nec etiam minuatur in minore quàm triplicatâ altitudinis ratione, necessariò decrescet vel in triplicatâ vel in majore quàm triplicatâ altitudinis ratione, sed supra demonstratum est in his duobus casibus corpus non posse ab apside ad apsidem alternis vicibus descendere et ascendere, ergo si corpus de apside ad apsidem alternis vicibus descendens et ascendens nunquam appellat ad centrum, vis in recessu a centro augebitur, aut in minore quam triplicatâ altitudinis ratione decrescet, et quo citius corpus de apside ad apsidem redierit, eò longius ratio virium recedet a ratione illâ triplicatâ. Quo enim citius corpus de apside ad apsidem redierit, eò minor erit quantitas $\frac{360}{n}$ m, aut quantitas $\frac{m}{n}$, adeoque eò major erit quantitas $\frac{n}{m}$, ejusque quadra-

tum $\frac{n}{m} \frac{n}{m} = p = q_1$ et hinc eò longius quantitas $\frac{1}{A^3} = q$ a quantitate $\frac{1}{A^3}$ recedet.

(f) * *Ut in præcedentibus demonstratum est.* In hoc enim casu corpus describit ellipsim immotam circulo finitimam (per Cor. 1. Prop. XIII.) intereadum æqualiter movetur in ellipsi simili et æquali circa umbilicum revolvente cum celeritate duplâ ejus quâ corpus idem in eâdem ellipsi mobili fertur (446).

(g) * *Et propterea vis aut reciprocè.* Ut $A^{\frac{1}{9}} = 3$, vel $A^{\frac{4}{9}}$, aut directè ut A^6 , vel A^{15} .

Est enim $A^{\frac{16}{9}} = 3 = A - \frac{1}{9} = \frac{1}{A^{\frac{1}{9}}}$, et $A^{\frac{9}{4}} = 3 = \frac{1}{A^{\frac{1}{4}}}$ et $A^9 = 3 = A^6$ et $A^{16} = 3 = A^{15}$.

corporis revolutionibus confecerit in consequentia gradus tres; erit m ad n ut 363 gr. ad 360 gr. sive ut 121 ad 120, ^(h) ideoque $A^{\frac{n}{m} - 3}$ erit æquale $A - \frac{29525}{14641}$; et propterea vis centripeta reciprocè ut $A^{\frac{29525}{14641}}$ seu reciprocè ut $A^{\frac{4}{245}}$ proximè. Decrescit igitur vis centripeta in ratione paulo majore quam duplicatâ, sed quæ vicibus $59\frac{3}{4}$ propius ad duplicatam quam ad triplicatam accedit.

Corol. 2. Hinc etiam si corpus, vi centripetâ quæ sit reciprocè ut quadratum altitudinis, revolvatur in ellipsi umbilicum habente in centro virium, et huic vi centripetæ addatur vel auferatur vis alia quævis extranea; cognosci potest (per exempla tertia) motus apsidum qui ex vi illâ extraneâ oriatur: et contra. Ut si vis quâ corpus revolvitur in ellipsi sit ut $\frac{1}{A A}$, et vis extranea ablata ut $c A$, ideoque vis reliqua ut $\frac{A - c A^4}{A \text{ cub.}}$; erit (in exemplis tertiis) b æqualis 1, m æqualis 1, et n æqualis 4, ideoque angulus revolutionis inter apsidæ æqualis angulo graduum $180 \sqrt{\frac{1 - c}{1 - \frac{c}{4}}}$. ⁽ⁱ⁾ Po-

^(h) * Ideoque $A^{\frac{n}{m} - 3}$ erit æquale $A - \frac{29525}{14641}$.

Erit enim in hac hypothesi $\frac{n}{m} = \frac{14400}{14641}$, et $\frac{n}{m} - 3 = \frac{14400}{14641} - 3 = -\frac{29525}{14641}$. Est autem $\frac{29525}{14641} = 2 + \frac{241}{14641} = 2 + \frac{4}{245}$, proximè; nam $241 \times 245 = 58565$, et $4 \times 14641 = 58564$; decrescit igitur vis centripeta in ratione paulò majore quam duplicatâ, sed quæ vicibus $59\frac{3}{4}$, propius ad duplicatam quam ad triplicatam accedit, differentia enim inter 2, et $2 + \frac{4}{245}$, est $\frac{4}{245}$, differentia verò inter 3 et $2 + \frac{4}{245}$ est $1 - \frac{4}{245} = \frac{239}{245}$. Porro $\frac{239}{245}$ est ad $\frac{4}{245}$ seu 239 ad 4 ut $59\frac{3}{4}$ ad 1.

⁽ⁱ⁾ * Ponamus esse $c \times A$ ad $\frac{1}{A A}$, hoc est, ponendo A vel $T = 1$, c ad 1, ut 100 ad 35745, id est, ut 1 ad 357, 45, et erit $c = \frac{100}{35745}$, $1 - c = \frac{35645}{35745}$, $1 - 4c = \frac{35345}{35745}$; unde $\frac{1 - c}{1 - 4c} = \frac{35645}{35345}$, et hinc $180 \times \sqrt{\frac{1 - c}{1 - 4c}} = 180 \times \sqrt{\frac{35645}{35345}}$ &c.

454. *Scholium.* Hermannus in scholio ad Prop. 25. Lib. 1. Phoronomiæ formulam invenit quâ ex datâ vi centripetâ motus apsidum determinatur, et contrâ; hanc ipsam ex prius ostensis hic demonstrabimus. Iisdem igitur positis quæ in not. 449, sit vis centripeta in ellipseos mobilis loco quovis p , seu (451) vis $V F F A + V R G G - V R F F = \frac{y}{A^3}$.

$\frac{y}{z^3}$, ponendo altitudinem $A = z$, et erit (450) $y = V F F z + V R G G - V R F F$; capiantur utrinque fluxiones et invenietur $dy = V F F dz$, et faciendi $Q dz = dy$, erit $Q = V F F$. Loco $V F F$, ipsius valor Q substituat in superiori æquatione, et erit $y = Qz + \frac{Q R G G - Q R F F}{F F} = Qz - Q R + \frac{Q R G G}{F F}$. Jam cum orbis ponatur circulo quam maximè finitimus, erit $z = R = T$, et proindè $y = \frac{Q T G G}{F F}$ et hinc $G G : F F = y : Q T$, ac $G : F = \sqrt{y} : \sqrt{Q T}$ quæ est formula generalis quæsita. Nam sit exempli causâ, vis centripeta ut $\frac{b z^m + c z^n}{z^3}$ hoc est $y = b z^m + c z^n$, erit $dy = Q dz = m b z^{m-1} dz + n c z^{n-1} dz$; unde $Q = m b z^{m-1} + n c z^{n-1}$, atque ita per formulam inventam $G G : F F = b z^m +$

namus vim illam extraneam esse 357.45 partibus minorem quam vis altera quâ corpus revolvitur in ellipsi, id est c esse $\frac{100}{357.45}$, existente A vel T æquali 1, et $180 \sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$ evadet $180 \sqrt{\frac{356.45}{357.45}}$, seu 180.7623, id est, 180 gr. 45 m. 44 s. Igitur corpus de apside summâ discedens, motu angulari 180 gr. 45 m. 44 s. perveniet ad apsidem imam, et hoc motu duplicato ad apsidem summam redibit: ideoque apsis summa singulis revolutionibus progrediendo conficiet 1 gr. 31 m. 28 sec. Apsis lunæ est duplo velocior circiter.

Hactenus de motu corporum in orbibus quorum plana per centrum virium transeunt. Superest ut motus etiam determinemus in planis excentricis. Nam scriptores qui motum gravium tractant, considerare solent ascensus et descensus ponderum, tam obliquos in planis quibuscunque datis, quam perpendiculares: et pari jure motus corporum viribus quibuscunque centra petentium, et planis excentricis innitentium hic considerandus venit. Plana autem supponimus esse politissima et absolutè lubrica ne corpora retardent. Quinimo, in his demonstrationibus, vice planorum quibus corpora incumbunt quæque tangunt incumbendo, usurpamus plana his parallela, in quibus centra corporum moventur et orbitas movendo describunt. Et eâdem lege motus corporum in superficiebus curvis peractos subinde determinamus.

$cz^n : Tmbz^{m-1} + Tncz^{n-1}$, et ponendo $z = T = 1$, $G : F = b + c : m + n$, ut in exemplis tertiis Newtonus invenit. Sit nunc data ratio G ad F, nempe m ad n, et vis centripeta sit ut dignitas aliqua non data altitudinis z, illius dignitatis index dicatur p, sitque adeò vis centripeta ut z^p , et erit $\frac{y}{z^{\frac{p}{3}}}$

$= z^p$, ac $y = z^p + 3$, $dy = Q dz = (p + 3) \times z^{p+2} dz$, $Q = (p + 3) \times z^{p+2}$. Hinc $G^2 : F^2 = m^2 : n^2 = z^p + 3 : (p + 3) \times T z^{p+2}$, hoc est, ponendo $z = T = 1$, $mn : nn = 1 : p + 3$, atquè ità $\frac{nn}{mm} = p + 3$, et $\frac{nn}{mm} - 3 = p$, ut in Cor. 1. repertum est.

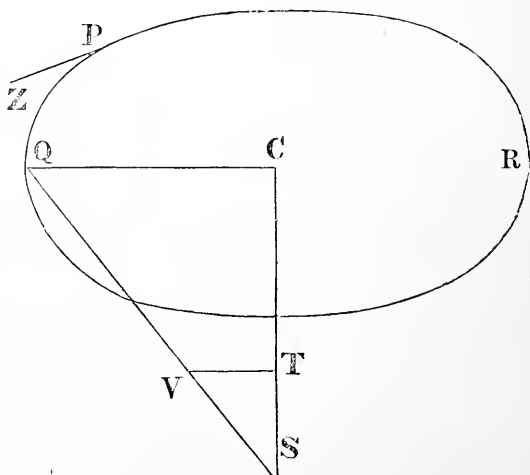
SECTIO X.

De motu corporum in superficiebus datis, deque funipendulorum motu reciproco.

PROPOSITIO XLVI. PROBLEMA XXXII.

Positâ cujuscunque generis vi centripetâ, datoque tum virium centro tum plano quocunque in quo corpus revolvitur, et concessis figurarum curvilinearum quadraturis: requiritur motus corporis de loco dato, datâ cum velocitate, secundum rectam in plano illo datam egressi.

Sit S centrum virium, S C distantia minima centri hujus a plano dato, P corpus de loco P secundum rectam P Z egrediens, Q corpus idem in trajectoriâ suâ revolvens, et P Q R trajectoria illa, in plano dato descripta, quam invenire oportet. Jungantur C Q, Q S, et si in Q S capiatur S V proportionalis vi centripetæ quâ corpus trahitur versus centrum S, et agatur V T quæ sit parallela C Q, et occurrat S C in T: Vis S V resolvetur (per legem Corol. 2.) in vires S T, T V; quarum S T trahendo corpus secundum lineam plano perpendicularem, nil mutat motum ejus in hoc plano. Vis autem altera T V, agendo secundum positionem plani, trahit corpus directè versus punctum C in plano datum, ideoque efficit, ut corpus illud in hoc plano perinde moveatur, ac si vis S T tolleretur, et corpus vi solâ T V revolveretur circa ^(k) centrum C in spa-



(k) * 455. *Circâ centrum C in spatio libero.* Vis centripeta S V, ad S tendens in loco quovis Q, dicatur Q, et erit ob triângula S V T, S Q C similia. $S Q : Q C = S V$ seu $Q : V T = \frac{Q \times Q C}{S Q}$. Sed ob angulum Q C S rectum

tio libero. Datâ autem vi centripetâ T V quâ corpus Q in spatio libero circa centrum datum C revolvitur, datur (per Prop. XLII.) tum trajectory P Q R, quam corpus describit, tum locus Q, in quo corpus ad datum quodvis tempus versabitur, tum denique velocitas corporis in loco illo Q; et contra. Q. e. i.

PROPOSITIO XLVII. THEOREMA XV.

Posito quod vis centripeta proportionalis sit distantiae corporis a centro; corpora omnia in planis quibuscunque revolventia describent ellipses, et revolutiones temporibus æqualibus peragent; quæque moventur in lineis rectis, ultrò citroque discurrendo, singulas eundi et redeundi periodos iisdem temporibus absolvent.

Nam, stantibus quæ in superiore propositione, vis S V, quâ corpus Q in plano quovis P Q R revolvens trahitur versus centrum S, est ut distantia S Q; atque ideo ob proportionales S V et S Q, T V et C Q, vis T V, quâ corpus trahitur versus punctum C in orbis plano datum, est ut distantia C Q. Vires igitur, quibus corpora in plano P Q R versantia trahuntur versus punctum C, sunt ⁽¹⁾ pro ratione distantiarum æquales viribus quibus corpora undiquaque trahuntur versus centrum S; et propterea corpora movebuntur iisdem temporibus, in iisdem figuris, in plano quovis P Q R circa punctum C, atque in spatiis liberis circa centrum S; ideoque (per Corol. 2. Prop. X. et Corol. 2. Prop. XXXVIII.) temporibus semper æqualibus, vel describent ellipses in plano illo circa centrum C, vel pe-

$SQ^2 = QC^2 + SC^2$, ergò V T, seu vis ad C tendens in loco Q, sive $\frac{Q \times Q C}{S Q}$ erit

æqualis $\frac{Q \times Q C}{\sqrt{QC^2 + SC^2}}$. Cum igitur data

sit S C distantia minimæ centri S a plano P Q C positione dato, si loco S Q in quantitate Q, scribatur $\sqrt{QC^2 + SC^2}$, obtinebitur valor vis ad C tendens in loco Q ex solâ distantia Q C et quantitatis datis compositus. Exempli causâ, si vis S V, ad S tendens in loco Q sit ut distantia S Q, erit V T, seu vis ad C tendens in eodem loco Q, ut $\frac{S Q \times Q C}{S Q}$ hoc est, ut Q C.

Si vis S V fuerit ut $\frac{1}{SQ^2}$, erit V T, ut $\frac{Q C}{SQ^3}$ hoc

est, ut $\frac{Q C}{QC^2 + SC^2} \times \sqrt{QC^2 + SC^2}$ et itâ de cæteris suppositionibus.

(1) * Sunt pro ratione distantiarum, &c. Hoc est vires absolutæ ad S et C tendentes sunt æquales, ita ut si alicubi fuerit P C = Q S, vis in loco P ad C tendens æqualis erit vi in loco Q ad S tendenti. Nam vis quâ corpus in loco Q ad C trahitur, est ad vim quâ versus S urgetur, ut Q C ad Q S, et vis in loco Q ad C tendens est etiam ad vim in loco P ad idem centrum C urgentem ut Q C ad P C seu Q S; quare vis in loco Q ad S tendens æqualis est vi ad C tendenti in loco P; Corpora verò quæ moventur viribus centripetis quæ sunt ut distantia, temporibus semper æqualibus ellipses quasvis, utut inæquales, describent circa sua centra (per Prop. X.) Si autem ellipses P Q R quam corpus in plano describit, latitudo in infinitum minuat, describet corpus rectam aliquam Q C R, motu accelerato ad centrum C accedens, et motu retardato ab ipso recedens usque ad R, deinde rursus ex loco R, ad centrum C recedens, et itâ circa centrum C, ultrò citroque oscillabitur.

riodos movendi ultrò citròque in lineis rectis per centrum C in plano illo ductis, complebunt. Q. e. d.

Scholium.

His affines sunt ascensus ac descensus corporum in superficiebus curvis. ^(m) Concipe lineas curvas in plano describi, dein circum axes quosvis datos per centrum virium transeuntes revolvi, et eâ revolutione superficies curvas describere; tum corpora ita moveri ut eorum centra in his superficiebus perpetuo reperiantur. Si corpora illa obliquè ascendendo et descendendo currant ultrò citròque; peragentur eorum motus in planis per axem transeuntibus, atque ideo in lineis curvis, quarum revolutione curvæ illæ superficies genitæ sunt. Istis igitur in casibus sufficit motum in his lineis curvis considerare.

PROPOSITIO XLVIII. THEOREMA XVI.

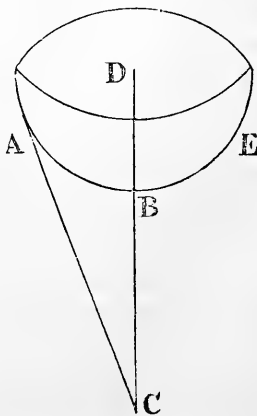
Si rota globo extrinsecus ad angulos ⁽ⁿ⁾ rectos insistat, et more rotarum revolvendo progrediatur in circulo maximo; longitudo itineris curvilinei, quod punctum quodvis in rotæ perimetro datum, ex quo globum tetigit, confecit, (quodque cycloidem vel epicycloidem nominare licet) erit ad duplicatum sinum versum arcus dimidii qui globum ex eo tempore inter eundem tetigit, ut summa diametrorum globi et rotæ ad semidiametrum globi.

PROPOSITIO XLIX. THEOREMA XVII.

Si rota globo concavo ad rectos angulos intrinsecus insistat et revolvendo progrediatur in circulo maximo; longitudo itineris curvilinei quod punctum

^(m) * Concipe lineam curvam A B in plano A C E D descriptam circà axem daturā D B C per centrum virium C transeuntem revolvi et eâ revolutione superficiem curvam A B E describi, tum corpus aliquod A ita moveri, ut illius centrum in hac superficie perpetuo reperiat. Si corpus illud obliquè descendendo et ascendendo per A B E, E B A currat ultrò citròque peragetur illius motus in plano A C E D per axem C D transeunte, atque adeò in lineâ curvâ A B E, cum (ex hyp.) nulla adsit vis quæ corpus a plano illo cogat deflectere; superficies A B E perfectè tersa ac polita supponitur.

⁽ⁿ⁾ * Ad angulos rectos, id est, ita ut planum rotæ productum per centrum globi transeat, illudque proinde in duo hæmispheria dividat ac circum maximum in ejus superficie signet.

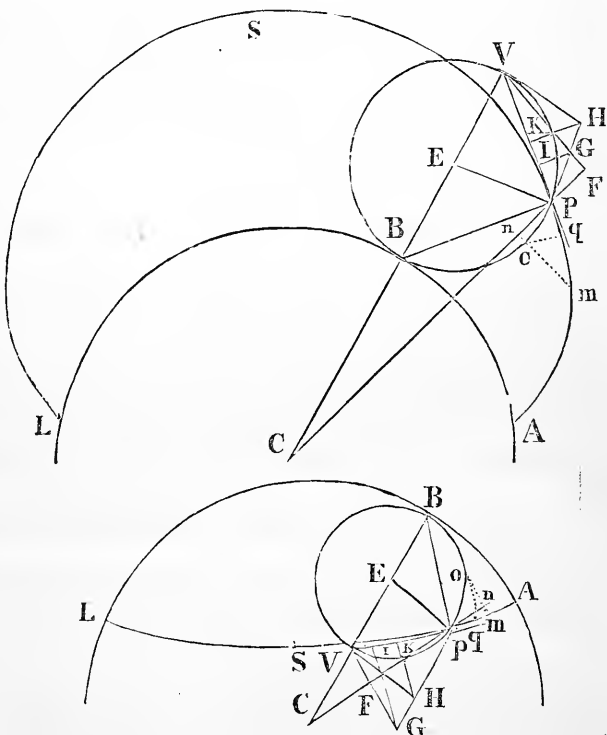


quodvis in rotæ perimetro datum, ex quo globum tetigit, confecit, erit ad duplicatum sinum versum arcus dimidii qui globum toto hoc tempore inter eundem tetigit, ut differentia diametrorum globi et rotæ ad semidiametrum globi.

Sit A B L globus, C centrum ejus, B P V rota ei insistent, E centrum rotæ, B punctum contactus, et P punctum datum in perimetro rotæ.

Concipe hanc rotam pergere in circulo maximo A B L ab A per B versus L, et inter eundem ita revolvi ut arcus A B, P B sibi invicem semper æquantur, atque punctum illud P in perimetro rotæ datum interea describere viam curvilineam A P. Sit autem A P via tota curvilinea descripta ex quo rota globum tetigit in A, et erit viæ hujus longitudo A P ad duplicatum sinum versum arcus $\frac{1}{2}$ P B, ut $2 C E$ (°) ad

C B. Nam recta C E (si opus est producta) occurrat rotæ in V, junganturque C P, B P, E P, V P, et in C P productam demittatur normalis V F. Tangant P H, V H circulum in P et V concurrentes in H, secetque P H, ipsam V F in G, et ad V P demittantur normales G I, H K. Centro item C et intervallo quovis describatur circulus n o m secans rectam C P in n, rotæ perimetro B P in o, et viam curvilineam A P in m.

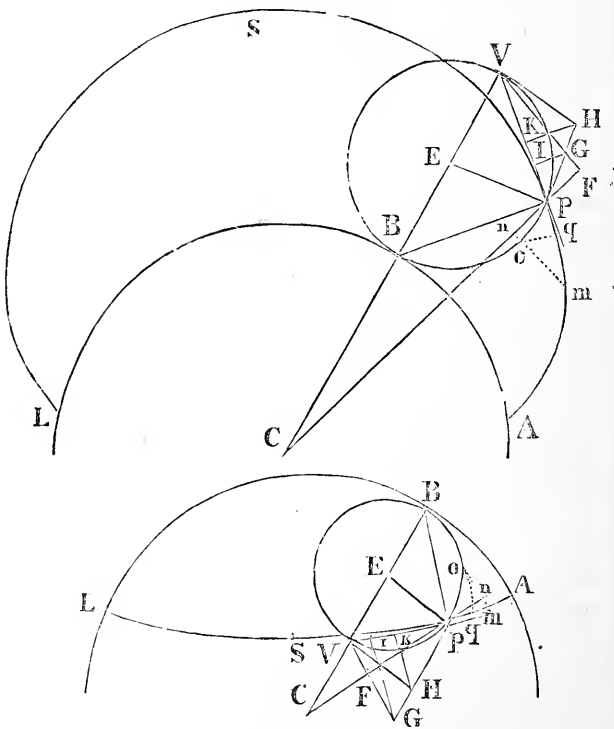


(°) * Ut $2 C E$ ad $C B$. Hoc est, ob $2 C E = 2 B E$, ut summa vel differentia diametrorum $= 2 C B + 2 B E$, vel $2 C E = 2 C B -$ globi et rotæ ad semidiametrum globi.

centroque V et intervallo $V o$ describatur circulus secans $V P$ productam in q .

Quoniam rota eundem semper revolvitur circa punctum contactus B , (^P) manifestum est quod recta $B P$ perpendicularis est ad lineam illam curvam $A P$ quam rotæ punctum P describit, atque ideo quod recta $V P$ tanget hanc curvam in puncto P . Circuli $n o m$ radius sensim auctus vel diminutus acquiescet tandem distantiae $C P$; et, ob (^q) similitudinem figuræ evanescentis $P n o m q$ et figuræ $P F G V I$,

ratio ultima lineolarum evanescentium $P m$, $P n$, $P o$, $P q$, id (^r) est, ratio mutationum momentanearum curvæ $A P$, rectæ $C P$, arcus circularis $B P$, ac rectæ $V P$, eadem erit quæ linearum $P V$, $P F$, $P G$, $P I$ respectivè. Cum autem $V F$ ad $C F$ et $V H$ ad $C V$ perpendiculares sint,



(^P) * Manifestum est quod recta $B P$, &c. Nam evidens est in circuli $B P V$ revolutione, centro B radio $B P$ singulis tempusculis describi arcum circuli seu incrementum nascentis curvæ $A P$, ad quod proinde radius $B P$ perpendicularis est, sed ob angulum $V P B$ in semicirculo rectum, linea $V P$ in eum radium $B P$ est perpendicularis, ergo linea $V P$ est tangens ejus arcus nascentis seu incrementi curvæ $A P$, ideoque ipsius curvæ $A P$.

(^q) * Et ob similitudinem figuræ evanescentis. Hæc figuræ evanescente arcus $P o$, $P q$, considerari possunt tanquam lineæ rectæ, seu partes tangentium $H P$, $V P$ productarum, et arcus

$m n$, $o q$, tanquam rectæ lineis $P n$, $P q$, perpendiculares; Hinc verò anguli ad verticem oppositi $n P o$ et $G P F$, $o P m$ et $G P I$, erunt æquales, atque adeò ob angulos $o n P$ et $G F P$, $o q P$ et $G I P$, rectos, proindeque æquales, figura evanescentis $P n o m q$, similis erit figuræ $P F G V I$.

(^r) * Id est ratio mutationum momentanearum, seu incrementorum vel decrementorum nascentium curvæ $A P$, quæ ex $A m$ fit $A P$, rectæ $C P$, quæ ex $C m$ fit $C P$ arcus circularis $B P$, qui ex $B o$ fit $B P$, ac rectæ $V P$, quæ ex $V q$, fit $V P$.

angulique ^(s) $H V G$, $V C F$ propterea æquales; et ^(t) angulus $V H G$ (ob angulos quadrilateri $H V E P$ ad V et P rectos) angulo $C E P$ æqualis est, similia erunt triangu-
la $V H G$, $C E P$; et inde fiet ut $E P$ ad $C E$ ita $H G$ ad $H V$ ^(u) seu $H P$ et ita ^(x) $K I$ ad $K P$, et ^(y) composi-
tè vel divisim ut $C B$ ad $C E$ ita $P I$ ad $P K$, et duplicatis consequen-
tibus ut $C B$ ad $2 C E$ ita ^(z) $P I$ ad $P V$, atque ita $P q$ ad $P m$. Est
^(a) igitur decrementum lineæ $V P$, id est, incrementum lineæ $B V - V P$
ad incrementum lineæ curvæ $A P$ in datâ ratione $C B$ ad $2 C E$, et prop-
terea (per Corol. Lem. IV.) longitudines $B V - V P$ et $A P$, incre-
mentis ^(b) illis genitæ, sunt in eâdem ratione. Sed, ^(c) existente $B V$
radio, est $V P$ cosinus anguli $B V P$ seu $\frac{1}{2} B E P$, ideoque $B V - V P$
sinus versus est ejusdem anguli; et propterea in hac rotâ, cujus radius
est $\frac{1}{2} B V$, erit $B V - V P$ duplus sinus versus arcus $\frac{1}{2} B P$. Ergo $A P$
est ad duplum sinum versum arcus $\frac{1}{2} B P$ ut $2 C E$ ad $C B$. Q. e. d.

Lineam autem $A P$ in propositione priore cycloidem extra globum, al-
teram in posteriore cycloidem intra globum distinctionis gratiâ nominabi-
mus.

^(s) * *Angulique $H V G$, $V C F$, propterea æqualis.* Ob angulum $V F C$ rectum, summa
angulorum $F C V$, $C V F$ æqualis est angulo
recto $C V H$, quare detracto communi angulo
 $C V F$, fit angulus $F C V = F V H$ sive
 $H V G$.

^(t) * *Et angulus $V H G$, &c.* Tangentes
 $H V$, $H P$ cum radiis $E V$, $E P$ angulos rec-
tos constituunt, adeoque quadrilateri $H V E P$,
anguli duo reliqui $V H P$ sive $V H G$ et $V E P$,
sunt simul æquales duobus rectis, quare cum
sint quoque anguli $V E P$, $C E P$ simul duo-
bus rectis æquales, liquet angulum $C E P$, æ-
qualem esse angulo $V H G$, et in secunda figura
cum anguli quadrilateri $V H P E$ in V et P
sint recti, reliqui anguli $V H P$, $V E P$ æquales
sunt duobus rectis, sed etiam $V H P$ et $V H G$
sunt æquales duobus rectis, ergo detracto com-
muni $V H P$, $V E P$ sive $C E P$ est æqualis
 $V H G$.

^(u) * *Ad $H V$. seu $H P$.* Nam circuli tan-
gentes $H V$, $H P$ sunt æquales.

^(x) * *Et ita $K I$ ad $K P$.* Etenim ob paral-
lelas $H K$, $G I$, est $H G : H P = K I :$
 $K P$.

^(y) * *Et compositè vel divisim.* Cum sit
 $E P$, seu $B E : C E = K I : K P$, si rota
globi intrinsecus insistat, erit compositè $B E +$
 $C E$, seu $C B : C E = K I + K P$; seu
 $P I : P K$. Si verò rota globi extrinsecus in-
sistat, erit divisim $C E - B E$, seu $C B : C E$
 $= K P - K I$, seu $P I : P K$.

^(z) * *Ita $P I$ ad $P V$.* Nam in triangulo

$P H V$ isoscele, est $P K = K V$, adeoque
 $2 P K = P V$.

^(a) * *Est igitur decrementum lineæ $V P$,*
&c. Dum arcus $A m$ crescit fitque $A P$, recta
 $V q$ decrescit et fit $V P$; quare est $P m$ incre-
mentum curvæ $A m$ seu $A P$, et $P q$ decre-
mentum rectæ $V P$. Cum autem sit $B V$ cir-
culi diameter constans, quantum decrescit $V P$,
tantum crescit differentia $B V - V P$, unde
decrementum lineæ $V P$, æquale est incremento
lineæ $B V - V P$. Est igitur incrementum
lineæ $B V - V P$, ad incrementum lineæ curvæ
 $A P$, &c.

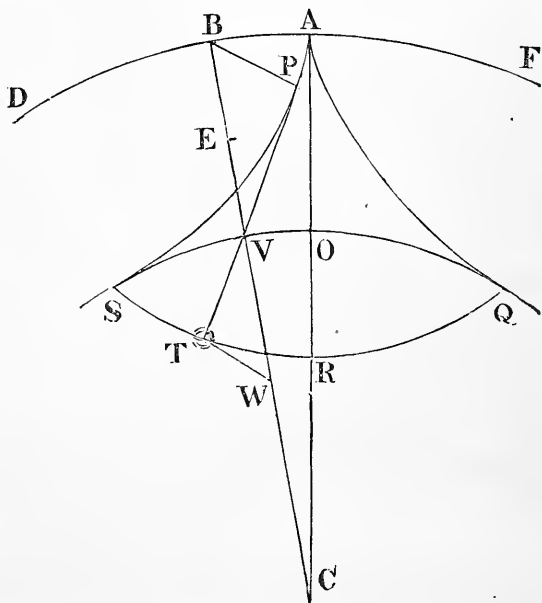
^(b) * *Incrementis illis genitæ, &c.* Cum
punctum P est in A , punctum B est etiam in
 A , fitque $V P = V B$, adeoque $B V - V P$
 $= 0$. Simul ergò crescere incipiunt lineæ
 $B V - V P$ et $A P$; et quoniam in datâ ra-
tione crescunt, erit semper $B V - V P$ ad $A P$
in datâ illâ ratione $C B$ ad $2 C E$.

^(c) 456. *Sed existente $B V$ radio, &c.* Ob
angulum $B P V$ rectum, est $B V$ ad $V P$ ut
sinus totus ad sinum anguli $V B P$ qui comple-
mentum est anguli $B V P$ ad rectum. Quare
existente $B V$ radio, est $V P$ cosinus anguli
 $B V P$ æqualis dimidio angulo ad centrum
 $B E P$. Est autem cujusvis anguli sinus ver-
sus æqualis differentiæ inter radium et cosinum
ejusdem anguli, ergò existente $B V$ radio, erit
 $B V - V P$ sinus versus anguli $\frac{1}{2} B E P$; et
quoniam in diversis circulis æqualium angulo-
rum sinus omnes sunt ut circulorum radii, in
hac rotâ cujus radius est $\frac{1}{2} B V$, erit $B V -$
 $V P$, duplus sinus versus arcus $\frac{1}{2} B P$.

PROPOSITIO L. PROBLEMA XXXIII.

Facere ut corpus pendulum oscilletur in cycloide datâ.

Intra globum $Q V S$, centro C descriptum, detur cyclois $Q R S$ bisecta in R et punctis suis extremis Q et S superficiæ globi hinc inde occurrentes. Agatur $C R$ bisecans arcum $Q S$ in O , et producatur ea ad A , ut sit $C A$ ad $C O$ ut $C O$ ad $C R$. Centro C intervallo $C A$ describatur globus exterior $D A F$, et intra hunc globum a rotâ, cujus diameter sit $A O$, describantur duæ semicycloides $A Q$, $A S$, quæ ^(f) globum interiorem tangant in Q et S et globo exteriori occurrant in A . A puncto illo A , filo $A P T$ longitudinem $A R$ æquante, pendeat corpus T , et ita intra semicycloides $A Q$, $A S$ oscilletur, ut quoties pendulum digreditur a perpendicularo $A R$, filum parte sui superiore



vulgarem, quæ describitur revolutione rotæ in lineâ rectâ progredientis, cumque sit semper (457) $A P : B V - V P = 2 C E : C B = 2 : 1$, erit $A P = 2 \times (B V - V P)$, sed $B V - V P$, est duplus sinus versus arcus $\frac{1}{2} B P$, existente $B E$ radio (456). Ergo in cycloide vulgari $A P$ æquatur quadruplicato sinui verso dimidii arcus $B P$, inter planum $A B L$ et punctum describens P intercepti; Hinc etiam erit $A S = 4 B E = 2 B S = 2 B V$; Est enim $B E$ sinus versus quadrantis.

(f) * *Quæ globum interiorem tangant in Q et S , et globo exteriori occurrant in A .* Probandum semicycloides descriptas per motum rotæ (cujus diameter est $A O$) ex A proficiscentis terminari ad superficiem globi interioris in punctis extremis Q et S cycloidis $Q R S$ datæ. Producantur itaque lineæ $C Q$, $C S$ ad F et D , eritque $F Q = D S = A O$, et super diametros $F Q$,

$D S$ intelligantur descriptæ rotæ quarum motu fiunt semicycloides, dicaturque P punctum rotæ semicycloides describens; Liqueat arcus $O Q$ et $A F$, $O S$ et $A D$ esse proportionales radiis $C O$, $C A$ sive (per const.) radiis $C R$, $C O$ et divisim rotarum diametris $O R$, $A O$, ideoque (per nat. circuli) semicircumferentiis rotarum super has diametros descriptarum; Sed cum Q et S sint puncta extrema cycloidis datæ $Q R S$ et $C O$ arcum $Q S$ bisecet; erunt arcus $O Q$ et $O S$ æquales semicircumferentiæ rotæ super diametrum $O R$ descriptæ (460) ergo etiam arcus $A F$ et $A D$ æquales erunt semicircumferentiæ rotæ super diametrum $A O$ descriptæ, sed arcus $F P$ aut $D P$ est semper æqualis arcui $A F$ aut $A D$ (460); erunt ergo arcus $F P$ et $D P$ semicirculi, et P cadet in extremitatibus Q et S diametrorum $F Q$, $D S$, sed ubi P semicircumferentiam rotæ percurrit semicyclois

A P applicetur ad semicycloidem illam A P S versus quam peragitur motus, et circum eam ceu obstaculum flectatur, parteque reliquâ P T cui semicyclois nondum objicitur, protendatur in lineam rectam; et pondus T oscillabitur in cycloide datâ Q R S. Q. e. f.

Occurrat enim filum $P T$ tum cycloidi $Q R S$ in T , tum circulo $Q O S$ in V , agaturque $C V$; et ad fili partem rectam $P T$, e punctis extremis P ac T , erigantur perpendiculara $B P$, $T W$, occurrentia rectæ $C V$ in B et W . Patet, ^(g) ex constructione et ^(h) genesi similium figurarum $A S$, $S R$, perpendiculara illa $P B$, $T W$ abscindere de $C V$ longitudines

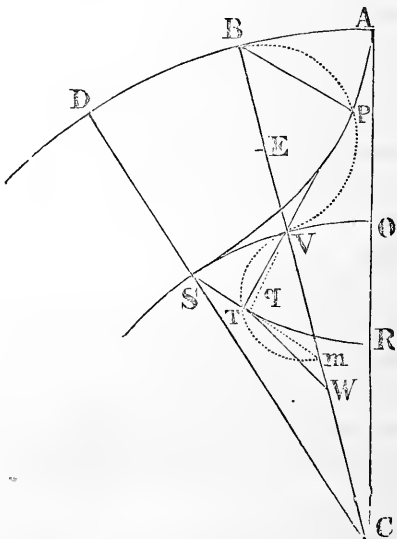
est descripta, ergo semicycloides descriptæ per motum rotæ ex A proficiscentis terminantur in Q et S. Q. e. d.

(^E) 465. *Patet ex constructione et genesi simi-
lium figurarum A S, S R; Figuræ illæ dicun-
tur similes quia A O diameter rotæ quâ descri-
buntur semicycloides A S, A Q est ad globi
D A F radium A C ut diameter O R rotæ quâ
describitur cyclois Q R S ad globi Q O S radi-
um O C, (per constr.) unde manifestum quod
cycloides A S, A Q, Q R, quæ eodem modo
describuntur ac determinantur sunt inter se si-
miles.*

(^h) * *Perpendiculara illa*, &c. 1^o. Probandum quod *perpendicularum P B abscondit de C V longitudinem V B rotæ diametro O A æqualem*. Pingatur rotam ita positam ut ejus punctum cycloidem describens sit in P, liquet, ex constructione, eam hujus rotæ diametrum quæ in hoc casu globo est perpendicularis et quæ, si producat, transire debet per centrum C, utrinque terminari debere in superficie globorum; Jam verò (per Demonstr. Prop. XLVIII. XLIX.) Tangens cycloidis transit semper per unam extremitatem ejus diametri rotæ quæ globo est perpendicularis et perpendicularum in tangentem e puncto contactus erectum transit per alteram ejusdem diametri extremitatem, ergo, cum sit (ex const.) filum P T tangens cycloidis in puncto P, et P B perpendicularum in illud, intersectiones V et B linearum P T et P B cum globis Q O S et D A F erunt extremitates ejus diametri rotæ quæ si producat, transit per centrum C, ergo ducta C V, *perpendicularum P B abscondit de C V longitudinem V B rotæ diametro O A æqualem*. Q. e. 1^o. d.

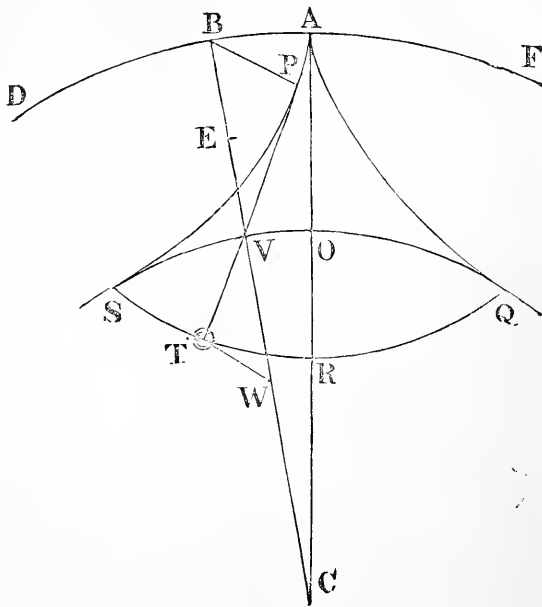
2°. Perpendicularum TW abscindit de CV longitudinem VW rotæ diametro $O R$ æqualem. Fingatur rota cycloidem $S R Q$ describens ita posita, ut ejus diameter globo $S O Q$ insitens sit in lineâ $C V$ globumque tangat in V , dicatur m altera extremitas ejus diametri, et dicatur q punctum illius rotæ cycloidem describens. Arcus $V S$ erit æqualis arcui $V q$ (460) utque totus arcus $S O$ est æqualis arcui $V m$, erit $V O = q m$, et $q m$ est mensura dupli anguli $C V q$: Sit verò rota describens cycloidem $A P S$ posita sicut in priore casu, hoc est, ejus diameter globo

D A F insistens sit in productione lineæ C V, erit arcus B A æqualis arcui B P (460) et est B P mensura dupli anguli B V P; Est autem



arcus V O sive q m ad B A sive B P, ut C O ad C A ideoque ut diametri rotarum O R ad A O (ex const.), arcus verò diversorum circulorum qui sunt inter se ut suorum circulorum diametri, sunt similes ideoque ejusdem numeri graduum; ergo angulus C V q est aequalis angulo B V P quoniam arcus qui sunt mensura eorum dupli, sunt ejusdem numeri graduum, ideoque illi anguli C V q, B V P sunt per verticem oppositi et P V q est linea recta; itaque, filum P V productum ad T transit tam per extremitatem V diametri rotæ globo insistentis quam per ipsa rotæ punctum q cycloidem describens; Ergo (per Dem. Prop. XLVIII. XLIX.) filum P T est perpendicularare in tangentem cycloidis in puncto illo q sive T, ideoque ex constructione linea T W erit ea ipsa tangens,

V B, V W rotarum diametris O A, O R æquales. Est ⁽¹⁾ igitur T P ad V P (duplum sinum anguli V B P existente $\frac{1}{2}$ B V radio) ut B W ad B V, seu A O + O R ad A O, id est (cum sint C A ad C O, C O ad C R et divisim A O ad O R proportionales) ut C A + C O ad C A, vel, si bisece- tur B V in E, ut 2 C E ad C B. Proinde (per Corol. 1. Prop. XLIX.) longitudo partis rectæ fili P T æquatur semper cycloidis arcui P S, et filum totum A P T æquatur semper cycloidis arcui dimidio A P S, hoc est (per Corol. 2. Prop. XLIX.) longitu- dini A R. Et propte- rea vicissim si filum manet semper æquale longitudini A R movebitur punctum T in cycloide datâ Q R S. Q. e. d.



Corol. Filum A R æquatur semicycloidi A S, ideoque ad globi exteri- oris semidiametrum A C eandem habet rationem quam similis illi semi- cyclois S R habet ad globi interioris semidiametrum C O.

et (per Dem. Prop. XLVIII. XLIX.) transi- bit per extremitatem m diametri rotæ quæ globo insistit, hoc est diametri jacentis in linea C V, ergo T W abscindit de C V longitudinem rotæ diametro O R æqualem. Q. e. 2^a. d.

* *Idem aliter.* Ex puncto V ducatur ad semi- cycloidem S R perpendicularis V q, et q m tangens in q radio C V occurrens in m, erit (459) V m = O R. Descriptis rotis B P V, V q m, erit angulus B V P, æqualis arcui B P, ad diametrum B V applicate, seu = $\frac{B P}{B V}$, hoc est, ob arcum B A = B P (460) et B V = A O, angulus B V P = $\frac{B A}{A O}$. Simili ratio- ne, cum sit arcus V q æqualis arcui S V, et se-

mirota V q m æqualis arcui S O, erit arcus q m = V O, adeoque angulus q V m = $\frac{V O}{O R}$.

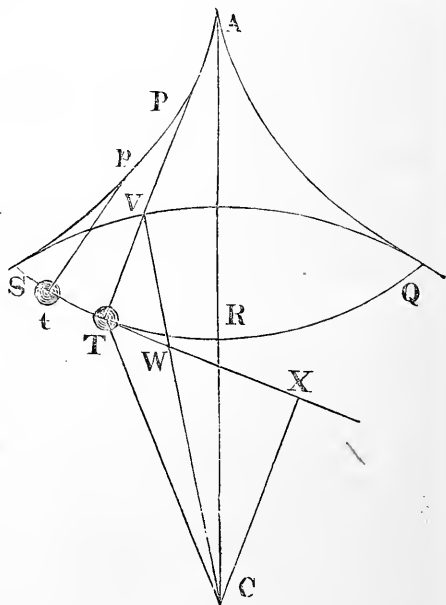
Quare angulus B V P : q V m = $\frac{B A}{A O} : \frac{V O}{O R}$ = O R × B A : A O × V O; sed B A : V O = C A : C O = A O : O R (per constr.) adeoque O R × B A = A O × V O, Ergo angulus B V P = q V m. Cum igitur anguli B V P, T V W ad verticem oppositi sint etiam æquales, perpendicularis V q coincidit cum V T, tangens q m cum T W, et V m cum V W, unde tandem est V m = V W = O R.

⁽¹⁾ Est igitur, &c. Ob triangu- la V P B, V T W similia T V : V P = V W : V B, et componendo T P : V P = B W : B V.

PROPOSITIO LI. THEOREMA XVIII.

Si vis centripeta tendens undique ad globi centrum C sit in locis singulis ut distantia loci cujusque a centro, et hâc solâ vi agente corpus T oscilletur (modo jam descripto) in perimetro cycloidis Q R S: dico quod oscillationum utcumque inæqualium æqualia erunt tempora.

Nam in cycloidis tangentem T W infinitè productam cadat perpendicularum C X et jungatur C T. Quoniam vis centripeta quâ corpus T impellitur versus C est ut distantia C T, atque hæc (per legem Corol. 2.) resolvitur in partes C X, T X, quarum C X impellendo corpus directè a P distendit filum P T et per ejus resistantiam tota cessat, nullum alium edens effectum; pars autem altera T X, urgendo corpus transversim seu versus X directè accelerat motum ejus in cycloide; manifestum est quod corporis acceleratio, huic vi acceleratrici proportionalis, sit singulis momentis ut longitudo T X, id ⁽¹⁾ est, ob datas C V, W V iisque proportionales T X, T W, ut longitudo T W, hoc est (per Corol. 1. Prop. XLIX.) ut longitudo arcus cycloidis T R. Pendulis igitur duobus A P T, A p t de perpendicularo A R inæqualiter deductis et simul dimissis, accelerationes eorum semper erunt ut arcus describendi T R, t R. Sunt ^(m) autem partes sub



⁽¹⁾ * *Id est, ob datas.* Ob triangu-
la W X C, W T V similia, est C W : W V = W X :
T W, et componendo C V : W V = T X :
T W; quare ob datas C V, W V, data est ratio
T X ad T W, id est T X est ut T W.

^(m) 464. *Sunt autem* arcuum t R, T R partes
sub initio eodem tempusculo descriptæ ut ac-
celerationes, hoc est, ut toti arcus t R, T R sub
initio describendi et propterea divisim, partes ar-
cium t R, T R quæ manent describendæ et

accelerationes subsequentes his partibus propor-
tionales sunt etiam ut toti arcus t R, T R, et
sic deinceps. Quoniam autem velocitates dato
tempore genitæ sunt ut accelerationum summæ,
quæ ob datam accelerationum rationem sunt in
eâdem ratione datâ arcuum t R, T R, liquet
accelerationes atque ideo velocitates genitas et
partes his velocitatibus descriptas, partesque des-
cribendas semper esse ut sunt toti arcus t R,
T R, et propterea si pars arcûs T R describenda

initio descriptæ ut accelerationes, hoc est, ut totæ sub initio describendæ, et propterea partes quæ manent describendæ et accelerationes subsequentes, his partibus proportionales, sunt etiam ut totæ; et sic deinceps. Sunt igitur accelerationes, atque ideo velocitates genitæ et partes his velocitatibus descriptæ partesque describendæ, semper ut totæ; et propterea partes describendæ datam servantes rationem ad invicem simul evanescent, id est, corpora duo oscillantia simul perveniunt ad perpendicularum A R. Cumque vicissim ascensus perpendicularorum de loco infimo R, per eosdem arcus cycloides motu retrogrado facti, retardentur in locis singulis a viribus iisdem a quibus descensus accelerabantur, patet velocitates ascensuum ac descensuum per eosdem arcus factorum æquales esse, atque ideo temporibus æqualibus fieri; et propterea, cum cycloidis partes duæ R S et R Q ad utrumque perpendiculari latus jacentes sint similes et æquales, pendula duo oscillationes suas tam totas quam dimidias iisdem temporibus semper peragent. Q. e. d.

Corol. Vis ⁽ⁿ⁾ quâ corpus T in loco quovis T acceleratur vel retardatur in cycloide, est ad totum corporis ejusdem pondus in loco altissimo S vel Q, ut cycloidis arcus T R ad ejusdem arcum S R vel Q R.

evanescat, quod fit dum corpus pendulum T pervenit ad R, pars arcus t R, simul evanescet, ob datam harum partium rationem. Unde corpora duo oscillantia t et T ex punctis t et T simul demissa, simul perveniunt in R.

⁽ⁿ⁾ * *Vis quâ corpus T in loco quovis T acceleratur vel retardatur in cycloide, est ad vim quâ in loco altissimo S, vel Q acceleratur vel retardatur in cycloide, ut arcus T R, ad arcum S R, (ex demonstr. Prop. 51.) sed vis quâ corpus in loco S vel Q acceleratur vel retardatur in cycloide, est vis tota quâ ad centrum C, perpendiculariter urgetur; radius enim C S cycloidem S R tangit in S, (458), adeoque directio vis in loco S in cycloide coincidit cum directione vis rectâ trahentis ad centrum C.*

465. *Corol. 1.* Si centro A radio A R circulus describatur, cycloidis S R Q arcus nascentis in loco infimo R cum circuli illius arcu nascente coincidit. Quare si longitudo penduli A R magna sit, eodem propè modo in exiguis circuli arcubus oscillabitur corpus quo in cycloide, et quò major est longitudo penduli minorque circuli arcus in quem excurrit, eò major erit motum in circulo et in cycloide consonantia, atque hinc non abludent experientiâ, oscillationes in exiguis circuli arcubus sunt ad sensum isochronæ.

466. *Corol. 2.* Ex his deducitur quænam sit æquatio ad hanc cycloidem intrâ globum descriptam pertinens, sive, inveniatur æquatio exprimens rationem distantiae cujusvis puncti T a centro ad perpendicularum in tangentem ex eo

puncto ductam demissum: Dicatur enim globi radius C V, a, diameter rotæ V W, a — c, erit distantia C R sive C W, c; Ducatur ex puncto quovis T linea T C ad centrum quæ dicatur x, ducatur tangens T X ex eo puncto T et ex centro demittatur in eam tangentem perpendicularum C X, sit T X = z et C X = p. Erit ubique $p^2 = \frac{a a c c - c c x x}{a a - c c}$; Nam ob sim-

ilia triangula V T W, W C X est
 $C W (c) : V W (a - c) = C X (p) : T V$
 $= \frac{p}{c} \times \frac{a - c}{a}$ et

$C V (a) : W V (a - c) = T X (z) : T W$
 $= \frac{z}{a} \times \frac{a - c}{a}$; est itaque $T V^2 + T W^2$

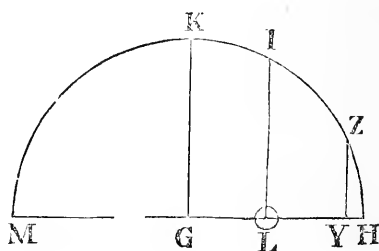
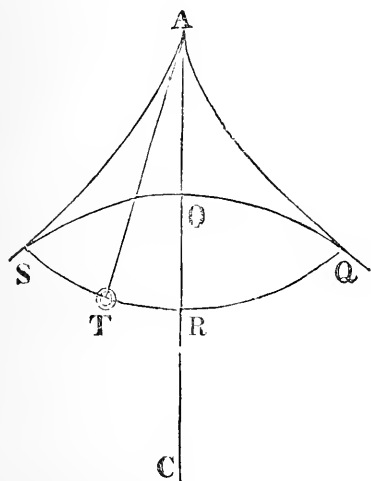
$= \frac{p^2}{c^2} \times (a - c)^2 + \frac{z^2}{a^2} \times (a - c)^2$. Sed
 $T V^2 + T W^2 = V W^2 = (a - c)^2$, ergo
 $\frac{p^2}{c^2} \times (a - c)^2 + \frac{z^2}{a^2} \times (a - c)^2 = (a - c)^2$

et dividendo utrumque membrum æquationis per $(a - c)^2$ erit
 $\frac{p^2}{c^2} + \frac{z^2}{a^2} \left(\text{sive } \frac{a^2 p^2 + c^2 z^2}{a^2 c^2} \right)$
 $= 1$, et multiplicato utroque membro æquationis per $a^2 c^2$ est $a^2 p^2 + c^2 z^2 = a^2 c^2$, sed est $z^2 = x^2 - p^2$ (per const.). Ergo
 $a^2 p^2 + c^2 x^2 - c^2 p^2 = a^2 c^2$ et factâ transpositione $a^2 p^2 - c^2 p^2 = a^2 c^2 - c^2 x^2$, ideoque $p^2 = \frac{a^2 c^2 - c^2 x^2}{a^2 - c^2}$. Q. e. d.

PROPOSITIO LII. PROBLEMA XXXIV.

Definire et velocitates pendulorum in locis singulis, et tempora quibus tum oscillationes totæ, tum singulæ oscillationum partes peraguntur.

Centro quovis G, intervallo G H cycloidis arcum R S æquante, describe semicirculum H K M semidiametro G K bisectum. Et si vis cen-

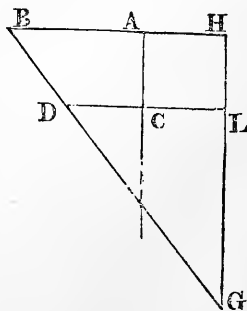


tripeta, distantis locorum a centro proportionalis, tendat ad centrum G, sitque ea in perimetro H I K æqualis vi centripetæ in perimetro globi

Simili ratiocinio inveniatur æquatio ad epicycloidem sive cycloidem extra globum descriptam in versis solummodo terminis et signis ut sit $p = \frac{c^2 x^2 - a^2 c^2}{c^2 - a^2}$.

467. *Lemma.* Ad punctum G tendat vis centripeta distantie ab illo puncto proportionalis quam in locis H, L exhibeant lineæ H B, L D rectæ G H perpendiculares, sitque recta G D B locus punctorum B, D, capiatur H A ad H B ut vis centripeta constans ad vim variabilem in loco dato H, et agatur A C rectæ H G parallela lineam L D secans in C, de loco H cadant corpora duo, quorum alterum vi constante H A, alterum vi variabili H B vel L D urgeatur, sintque illorum velocitates in eodem loco L, V, v, et erit V^2 ad v^2 , ut area H A C L ad aream H B D L, (per Prop. 39. et not. 408.) id est $V^2 : v^2 = H L \times H A : H L \times \frac{B H + D L}{2} = 2 H A : B H + D L$. Et quoniam in centro G evanescit D L erit in illo

centro $V^2 : v^2 = 2 H A : B H$, et $V : v = \sqrt{2 H A} : \sqrt{B H}$. Quare datis in loco H



viribus H A, H B, et velocitate in loco quovis L vel G vi constante acquisitâ, datur velocitas vi variabili in eodem loco acquisita.

Q O S ad ipsius centrum tendenti; et ^(o) eodem tempore quo pendulum T dimittitur e loco supremo S, cadat corpus aliquod L ab H ad G: quoniam vires quibus corpora urgentur sunt æquales sub initio et spatiis describendis T R, L G semper proportionales, atque ideo, si æquantur T R et L G, æquales in locis T et L; patet corpora illa describere spatia S T, H L æqualia sub initio, ^(p) ideoque subinde pergere æqualiter urgeri, et æqualia spatia describere. Quare (per Prop. XXXVIII.) tempus quo corpus describit arcum S T est ad tempus oscillationis unius, ut arcus H I, tempus quo corpus H perveniet ad L, ad semiperipheriam H K M, tempus quo corpus H perveniet ad M. Et velocitas corporis penduli in loco T est ad velocitatem ipsius in loco infimo R, (hoc est, velocitas corporis H in loco L ad velocitatem ejus in loco G, seu ^(q) incrementum momentaneum lineæ H L ad incrementum momentaneum lineæ H G, arcubus H I, H K æquabili fluxu crescentibus) ut ordinatim applicata L I ad radium G K, sive ut ^(r) $\sqrt{S R^2 - T R^2}$ ad S R. ^(s) Unde

^(o) * Et eodem tempore. Id est, simul demittantur ex locis S et H corpora T et L.

^(p) * Ideoque subinde pergere æqualiter urgeri et æqualia spatia iisdem nempe temporibus describere.

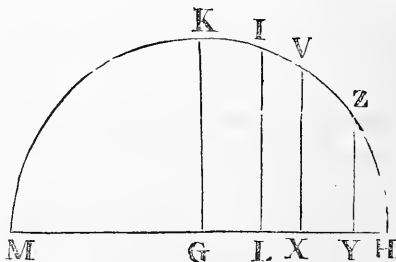
^(q) * Seu incrementum momentaneum, &c. Nam incrementa illa sunt spatia eodem tempusculo uniformiter descripta, quæ proinde sunt ut velocitates in locis L et G, quibus describuntur, arcus autem H I, H K, quæ tempora exhibent, crescunt ut tempora, hoc est, æquabili fluxu.

^(r) Sive ut $\sqrt{S R^2 - T R^2}$ ad S R. Est enim, ex naturâ circuli $L I^2 = M L \times L H = G H^2 - G L^2 = S R^2 - T R^2$, adeoque $L I = \sqrt{S R^2 - T R^2}$, et $L I : G K = \sqrt{S R^2 - T R^2} : G K$, seu S R.

^(s) 468. Unde cum, &c. Datâ vi centripetâ in perimetro globi Q O S vel in H datur tum velocitas quâ corpus hæc vi sollicitatum describit circumulum H K M, tum tempus quo semiperipheriam H K M percurrit (201) hoc est, tempus unius oscillationis integræ; et contrâ, dato tempore unius oscillationis integræ, datur vis centripeta in H vel S (202). Porro dato arcu S T, vel rectâ æquali H L, datur L I sinus arcus H I, et hinc datur hic arcus, adeoque et ratio H I, ad H K M, id est, ratio temporis quo percurritur H L vel S T ad tempus datum oscillationis integræ. Et contrâ, dato tempore quo describitur H L vel S T, datur arcus H I, et hinc datur illius sinus rectus L I sinusque versus H L vel arcus S T. Datâ vi centripetâ in S vel H, datur velocitas corporis de loco S vel H in R vel G pervenientis (467); hinc verò datur velocitas corporis in loco quovis dato T vel L; cum (ex demonstr.) velocitas in R vel G, sit ad velocitatem in T vel L, ut G K ad

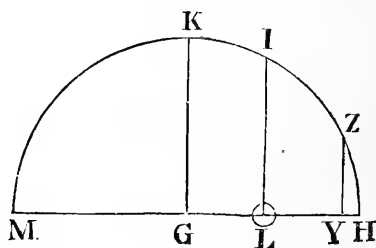
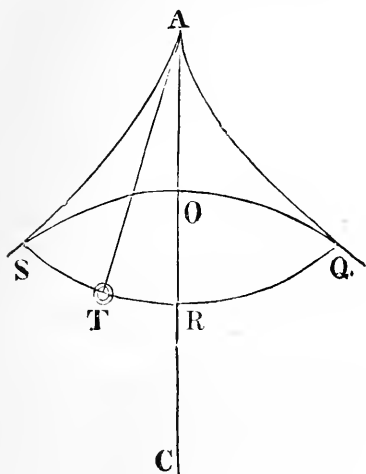
L I, seu ut S R ad $\sqrt{S R^2 - T R^2}$. Dato tempore quo describitur S T vel H L, datur arcus H I, et illius sinus rectus L I, adeoque et velocitas in L et contrâ.

Si corpus non ex summo loco S, vel H, sed ex alio quovis t, (vid. fig. Prop. 51.) vel Y, de-



mittatur, erit tempus quo ex loco t perveniet ad R, vel ex Y ad G, æquale tempori dato dimidiæ oscillationis. Hinc dato arcu T t, vel rectâ æquali Y L, dabitur et tempus quo describitur et velocitas in T vel L, ac contrâ. Nam cum sint arcus seu spatia quævis æqualibus temporibus descripta in oscillationibus inæqualibus, ut arcus vel spatia integris oscillationibus percurra (464), dato arcu T t, vel spatio Y L dabitur spatium H X, quod corpus de loco H demissum describit eodem tempore quo aliud corpus percurrit T t vel Y L; dato spatio H X, datur arcus H V et illius sinus rectus X V, et hinc datur tempus quo describitur H X et Y L, et velocitas in X; cumque sit velocitas in X, in corpore de loco H, cadente ad velocitatem in L, in corpore de loco Y cadente ut H G, ad Y G (464) dabitur velocitas in L, vel T; et contrâ.

cùm, in oscillationibus inæqualibus, describantur æqualibus temporibus arcus totis oscillationum arcubus proportionales; habentur, ex datis temporibus, et velocitates et arcus descripti in oscillationibus universis. Quæ erant primò invenienda.



Oscillantur jam funipendula corpora in cycloidibus diversis intra globos diversos, quorum ^(t) diversæ sunt etiam vires absolutæ, descriptis: et, si vis absoluta globi cujusvis Q O S dicatur V, vis acceleratrix quâ pendulum urgetur in circumferentiâ hujus globi, ubi incipit directè versùs centrum ejus moveri, erit ut distantia corporis penduli a centro illo et vis absoluta globi conjunctim, hoc est, ut $CO \times V$. Itaque ^(u) lineola H Y, quæ sit ut hæc vis acceleratrix $CO \times V$, describetur dato tempore; et,

^(t) 469. Quorum diversæ sunt, &c. Ex centris C, c, per omne circumquaque spatium diffundi intelligantur vires centripetæ in ratione distantiarum a suis respectivè centris crescentes, vires acceleratrices in locis datis æquè altis A, a, dicantur A, a; in aliis locis æquè altis D, d, dicantur V, v, et erit (ex hyp.) $V : A = CD : CA = cd : ca = v : a$, adeoque $V : v = A : a$, sed evanescentibus distantis, C D, c d, sunt V, v, vires absolutæ (per definitio-

o
a
d
c

O
A
D
C

nem VI. Newt.) quare vires absolutæ sunt in ratione virium acceleratricium in locis æquè altis. Jam verò vires acceleratrices in locis quibuscumque O, o, dicantur B, b, erit (ex Dem.)

$$V : v = A : a$$

$$\text{Et per hyp. } CO : CA = B : A$$

$$CA \text{ vel } ca : co = a : b$$

Ergò ex æquo $V \times CO : v \times co = B : b$, id est, vis acceleratrix in loco quovis O, est ut distantia a centro et vis absoluta conjunctim.

^(u) • Itaque lineola nascens H Y, quæ sit ut hæc vis acceleratrix $CO \times V$, describetur dato tempore. Nam quadratum temporis quo descri-

bitur nascens H Y, est ut $\frac{HY}{CO \times V}$ (per Cor.

5. Lem. X.) Undè cum data sit ratio H Y ad $CO \times V$ (ex hyp.), quadratum temporis adeoque et tempus ipsum quo describitur H Y datum erit.

si ^(x) erigatur normalis $Y Z$ circumferentiæ occurrens in Z , arcus nascens $H Z$ denotabit datum illud tempus. Est autem arcus hic nascens $H Z$ in subduplicatâ ratione rectanguli $G H Y$, ideoque ut $\sqrt{G H \times C O \times V}$. Unde tempus oscillationis integræ in cycloide $Q R S$ (cum sit ut semiperipheria $H K M$, quæ oscillationem illam integram denotat, directè; utque arcus $H Z$, qui datum tempus similiter denotat, inversè) fiet ut $G H$ directè et $\sqrt{G H \times C O \times V}$ inversè, hoc est, ob æquales $G H$ et $S R$, ut $\sqrt{\frac{S R}{C O \times V}}$, sive (per Corol. Prop. L.) ut $\sqrt{\frac{A R}{A C \times V}}$. Itaque oscillationes in globis et cycloidibus omnibus, quibuscunque cum viribus absolutis factæ, sunt in ratione quæ componitur ex subduplicatâ ratione longitudinis fili directè, et subduplicatâ ratione distantie inter punctum suspensionis et centrum globi inversè, et subduplicatâ ratione vis absolutæ globi etiam inversè. Q. e. i.

Corol. 1. Hinc etiam oscillantium, cadentium et revolvantium corporum tempora possunt inter se conferri. Nam si rotæ, quâ cyclois integra globum describitur, diameter constituatur æqualis semidiametro globi cyclois ^(y) evadet linea recta per centrum globi transiens, et oscillatio jam erit descensus et subsequens ascensus in hâc rectâ. Unde datur tum tempus descensus de loco quovis ad centrum, tum tempus huic æquale quo corpus uniformiter circa centrum globi ad distantiam quamvis revolvens arcum quadrantalem describit. Est ^(z) enim hoc tempus (per casum secundum) ad tempus semioscillationis in cycloide quâvis $Q R S$ ut 1 ad $\sqrt{\frac{A R}{A C}}$.

Corol. 2. Hinc etiam consecantur quæ Wrennus et Hugenius de

^(x) * *Et si erigatur normalis, &c.* Arcus $H Z$ erit ad semiperipheriam $H K M$, ut tempus datum quo describitur $H Y$, ad tempus unius oscillationis (Prop. 58.) quod proinde erit ut semiperipheria $H K M$, seu ut radius $G H$ directè, et arcus $H Z$ inversè. Est autem arcus nascens $H Z$ æqualis chordæ $H Z$ (per Lem. 7.) adeoque (ex naturâ circuli) $H Z^2 = H Y \times M H = 2 G H \times H Y$; Quare cum sit $H Y$ ut $C O \times V$, erit $H Z^2$ ut $2 G H \times C O \times V$, seu, ut $G H \times C O \times V$; et hinc tempus unius oscillationis ut $\sqrt{\frac{G H}{C O \times V}}$

$$= \sqrt{\frac{G H}{C O \times V}} = \sqrt{\frac{S R}{C C \times V}} =$$

$$\sqrt{\frac{A R}{A C \times V}} \text{ ob } G H = S R, \text{ et } \frac{A R}{A C} = \frac{S R}{C O}$$

(per Cor. Prop. 50.)

^(y) * *Cyclois evadet linea recta* (461).

^(z) * *Est enim hoc tempus, &c.* Quoniam cycloide $Q R S$ in rectam mutatâ fit $A R = A C$, erit (per Cas. 2.) tum tempus descensus de loco quovis ad centrum, tum tempus huic æquale (Prop. 58.) per circuli quadrantem ut $\sqrt{\frac{1}{V}}$. Unde erit hoc tempus ad tempus semioscillationis in cycloide quâvis $Q R S$ in rectam non mutatâ ut $\sqrt{\frac{1}{V}}$ ad $\sqrt{\frac{A R}{A C \times V}}$, hoc est, ob datam V , ut 1 ad $\sqrt{\frac{A R}{A C}}$. Quare dato tempore unius oscillationis in cycloide quâvis $Q R S$ circa centrum C , dabitur tempus descensus de loco quovis ad idem centrum, et tempus huic æquale per quadrantem circuli ad quamvis distantiam descripti.

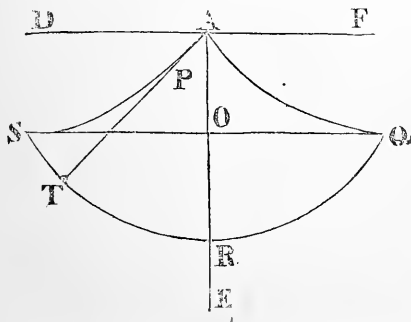
cycloide vulgari adinvenierunt. Nam ^(a) si globi diameter augeatur in infinitum : mutabitur ejus superficies sphaerica in planum ; visque ^(b) centripeta aget uniformiter secundum lineas huic plano perpendiculares, et cyclois nostra abibit in cycloidem vulgi. Isto ^(c) autem in casu longitudo arcus cycloidis, inter planum illud et punctum describens, æqualis evadet quadruplicato sinui verso dimidii arcus rotæ inter idem inter planum et punctum describens ; ut invenit Wrennus : Et ^(d) pendulum inter duas ejusmodi cycloides in simili et æquali cycloide temporibus æqualibus oscillabitur, ut demonstravit Hugenius. Sed ^(e) et descensus gravium, tempore oscillationis unius, is erit quem Hugenius indicavit.

Aptantur autem propositiones a nobis demonstratæ ad veram constitutionem terræ, quâtenus rotæ eundo in ejus circulis maximis describunt motu clavorum, perimetris suis infixorum, cycloides extra globum ; et pendula inferius in fodinis et cavernis terræ suspensa, in cycloidibus intra globos oscillari debent, ut oscillationes omnes evadant isochronæ. Nam gravitas (ut in libro tertio docebitur) decrescit in progressu a superficie terræ, sursum quidem in duplicatâ ratione distantiarum a centro ejus, deorsum vero in ratione simplici.

^(a) * Nam si globi diameter augeatur (462).

^(b) * Visque centripeta distantiae infinitae (quæ proinde non mutatur) proportionalis non mutabitur, et quoniam centro in infinitum abeunte, radii qui antè erant ad superficiem sphaericam perpendiculares fiunt paralleli ; vis centripeta aget uniformiter secundum lineas huic superficiæ in planum mutatæ perpendiculares.

^(c) * Isto autem in casu (462).



^(d) * Et pendulum inter duas, &c. Erit enim in hoc casu diameter rotæ O R quâ describitur cyclois Q R S, æqualis diametro A O rotæ quâ describitur cyclois A P S (462), quare semicycloides S R, A S similes erunt et æquales.

470. ^(e) * Sed et descensus, &c. Erit in hoc

casu tempus unius oscillationis ad tempus descensus perpendicularis per diametrum rotæ A O vel O R, seu per dimidiam penduli longitudinem ut peripheria circuli ad ejus diametrum. Nam iisdem positis quæ (in Prop. 52. et ejus Cor. 2^a.) erit tempus unius oscillationis æquale temporis semirevolutionis in circulo H K M (Prop. 38.). Est autem (200) tempus semirevolutionis in circulo H K M, ad tempus descensus uniformiter accelerati per dimidium radium H G, ut peripheria circuli ad diametrum. Quare cum sit $\frac{1}{2} H G = \frac{1}{2} S R = \frac{1}{2} A R = O R$ (462) erit tempus unius oscillationis ad tempus descensus perpendicularis per dimidiam penduli longitudinem ut circuli peripheria ad diametrum.

471. Corol. Dimidia penduli longitudo A O, est ad spatium A E descensu perpendiculari descriptum unius oscillationis tempore in duplicatâ ratione diametri ad peripheriam circuli. Sit enim tempus unius oscillationis t, diameter circuli ad peripheriam, ut d, ad p, et erit (469) tempus descensus perpendicularis per spatium

$$A O = \frac{dt}{p}; \text{ sed } (27) \frac{d dt}{p p} : t t = A O :$$

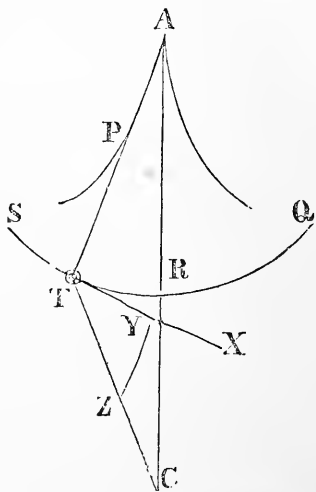
A E, ergo $A O : A E = d d : p p$. Hugenius cui pendulorum theoria debetur, Prop. 25. Part. 4. horologii oscillatorii, longitudinem penduli singulas oscillationes uno minuto secundo absolutis invenit pedum Paris. 3. et linearium $8 \frac{1}{2}$, hoc est, linearium $\frac{881}{2}$, et hinc dimi-

PROPOSITIO LIII. PROBLEMA XXXV.

Concessis figurarum curvilinearum quadraturis, invenire vires quibus corpora in datis curvis lineis oscillationes semper isochronas peragent.

Oscilletur corpus T in curvâ quâvis lineâ S T R Q, cujus axis sit A R transiens per virium centrum C. Agatur T X quæ curvam illam in corporis loco T quovis contingat, inque hâc tangente T X capiatur T Y æqualis arcui T R. Nam (f) longitudo arcus illius ex figurarum quadraturis, per methodos vulgares, innotescit. De puncto Y educatur recta Y Z tangenti perpendicularis. Agatur C T perpendiculari illi occurrens in Z, et erit vis centripeta proportionalis rectæ T Z. Q. e. i.

Nam si vis, quâ corpus trahitur de T versus C, exponatur per rectam T Z cap-



dia penduli longitudo erat linearum $\frac{881}{4} =$

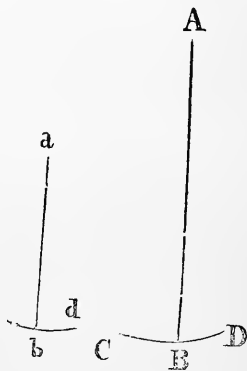
220. 25. Est autem diameter circuli ad peripheriam ut 113, ad 355, quam proximè, et proinde quadratum diametri ad quadratum peripheriæ ut 12769 ad 126025; quare spatium uno minuto secundo descriptum a corpore gravi perpendiculariter cadente, est pedum Paris. 15.

$\frac{1}{12}$, quam proximè.

472. *Corol.* Quoniam propè telluris superficiem gravium directio horizonti ad sensum perpendicularis est gravitasque constans, atque adeò V gravitas absoluta, et A C distantia a centro telluris datæ sunt, in pendulis in cycloidem vulgarem aut etiam in exiguis arcus circuli (465) excurrentibus, tempus unius oscillationis (per Cas. 2. Prop. 52.) erit ut $\sqrt{A R}$, id est, in ratione subduplicatâ longitudinis penduli et proinde longitudo penduli in ratione duplicatâ temporis unius oscillationis.

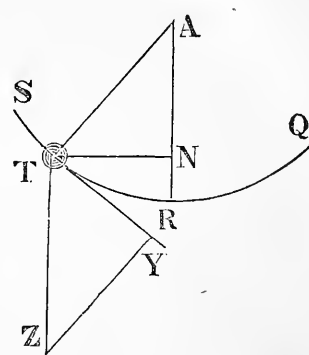
473. *Corol.* Numeri oscillationum isochronarum a duobus pendulis A B, a b, eodem tempore confectarum sunt reciproci ut tempora quibus singulæ oscillationes fiunt. Nam si pendulum a b, bis oscilletur eo tempore quo A B semel; a b, quatuor oscillationes absolvet, dum A B duas conficit, et ita porro in aliis suppositionibus, ut patet. Quare numeri oscillationum isochronarum eodem tempore a duobus pendulis

confectarum sunt in ratione subduplicatâ longitudinum pendulorum inversè (472).

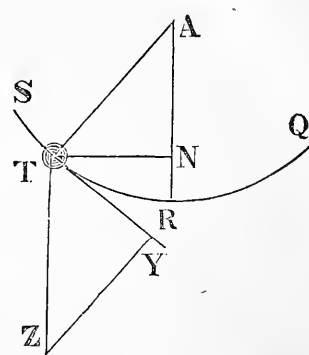


474. *Corol.* Hinc si tempus unius oscillationis penduli A B, sit T, tempus unius oscillationis penduli a b, sit t, numeri oscillationum eodem tempore confectarum N, n, erit $T : t = n : N$ (475), et $T T : t t = A B : a b$ (472) ac propterea $n n : N N = A B : a b$. Datis igitur tribus harum proportionum terminis quartus datus est.

(f) 475 Nam longitudo arcus, &c. Curvæ

Corol. 1. Hinc si corpus T, filo rectilineo A T a centro A pendens, describat arcum circulearem S T R Q, et interea ⁽ⁱ⁾ urgeatur secundum lineas parallelas deorsum a vi aliquâ, quæ sit ad vim uniformem gravitatis, ut arcus T R ad ejus sinum T N: æqualia erunt oscillationum singularum tempora. Etenim ob parallelas T Z, A R, similia erunt triangu-

A T N, Z T Y; et propterea T Z erit ad A T ut T Y ad T N; hoc est, si gravitatis vis uniformis exponatur per longitudinem datam A T; vis T Z, quâ oscillationes evadent isochronæ, erit ad vim gravitatis A T, ut arcus T R ipsi T Y æqualis ad arcûs illius sinum T N.

Corol. 2. Et propterea in horologiis, si vires a machinâ in pendulum ad motum conservandum impressæ ita cum vi gravitatis componi possint, ut vis totâ deorsum semper sit ut linea quæ oritur applicando rectangulum sub arcu T R et radio A R ad sinum T N, oscillationes ^(k) omnes erunt isochronæ.

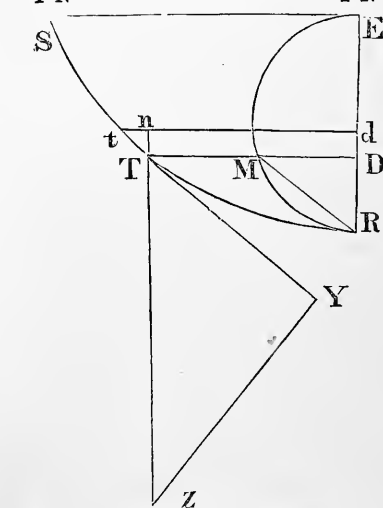
hensio, adeoque arcus A M = $\frac{B F H A}{A}$. Nam ductâ m f priori M F parallelâ et infinitè propinquâ, demissoque ad axem A P perpendiculo M P, quod rectam m f, secat in r; erit ob triangu-

A T N, Z T Y, et propterea T Z erit ad A T ut T Y ad T N; hoc est, si gravitatis vis uniformis exponatur per longitudinem datam A T; vis T Z, quâ oscillationes evadent isochronæ, erit ad vim gravitatis A T, ut arcus T R ipsi T Y æqualis ad arcûs illius sinum T N.

^(k) * Oscillationes omnes erunt isochronæ. Cum enim vis tota T Z quâ oscillationes redduntur isochronæ sit (per Cor. 1.) ad vim gravitatis A T seu A R, ut T R ad T N, erit $T Z = \frac{A R \times T R}{T N}$, adeoque vis tota T Z, ut $\frac{A R \times T R}{T N}$.

^(s) * Proinde, &c. Quæ sequuntur manifesta sunt (ex dem. Prop. 51.)

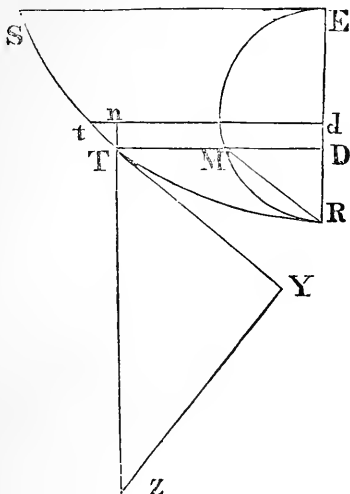
^(h) 477. Q. e. d. Datâ vi centripetâ T Z quâ corpus in datâ curvâ S R Q oscillationes semper isochronas peragit, velocitates illius corporis in locis singulis et tempora quibus tum oscillationes totæ, tum singulæ oscillationum partes peraguntur eodem modo definiuntur ac in Cas. 1^o. Prop. 52. Ductâ enim ex centro virium C rectâ quæ curvam tangat in puncto aliquo S, erit in hoc puncto T Z = T Y, hoc est, vis centripeta in curvâ S T R æqualis vi centripetæ ad C perpendiculariter tendenti in S; quare manente constructione Cas. 1. Prop. 52. et supponendo vim centripetam in H, (vid. fig. ibid.) quâ describitur circulus H K M, æqualem vi centripetæ in S, tempus unius oscillationis et singulæ oscillationum partes, et velocitates in locis singulis invenientur prorsus (ut in not. 468.) iisdemque ratiociniis res omnis demonstrabitur.

⁽ⁱ⁾ * Interea urgeatur secundum lineas parallelas, &c. Centro C figuræ superioris in infinitum abeunte.



478. Ex demonstratis solvi potest hoc problema: Datâ lege vis centripetæ, invenire curvam tautochronam S T R, in quâ nimirum, corpus oscillationes semper isochronas peragit.

Casus 1^{us}. Vis gravitatis directio TZ semper sit parallela axi ER curvæ STR , sint SE , td , TD ad axem RE ordinatim applicatæ, punctum E datum puncta D , d infinitè propin-



qua, tangens TY æqualis arcui TR , YZ ad TY perpendicularis secet TZ in Z , et ZT producta secet td in n . Dicantur $RE = a$, vis gravitatis in E vel $S = g$, in D vel $T = v$, pars lineæ verticalis per S ductæ determinata ad modum verticalis TZ , sit $= b$, $RD = x$, $DT = y$, $TR = TY = s$. Ob triangu-
la Tnt , TYZ similia, $Tn(dx) : Tt(ds) =$
 $TY(s) : TZ = \frac{s ds}{dx}$; ob angulum Tnt t
rectum $ds^2 = dx^2 + dy^2$; et (per Prop.
55.) $g : v = b : TZ \left(\frac{s ds}{dx} \right)$, ideoque $s ds$

$= \frac{b}{g} v dx$, et sumptis fluentibus $\frac{1}{2}ss = \frac{b}{g} S$.
 $v dx$; fluens autem $S. v dx$ ita sumi debet, ut
evanescente x , ea fluens evanescat. Erit igitur
 $ss = \frac{2b}{g} S. v dx$, $s = \sqrt{\left(\frac{2b}{g} S. v dx \right)}$, et

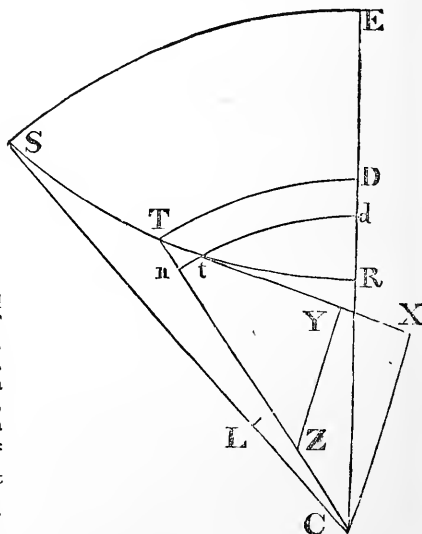
sumptis fluxionibus $ds = \frac{b v dx}{\sqrt{2b g S. v dx}}$,
proindeque $ds^2 = \frac{b b v v dx^2}{2b g S. v dx} = dx^2 +$

dy^2 , et hinc $dx \sqrt{\frac{b v v - 2g S. v dx}{2g S. v dx}} =$
 dy æquatio ad curvam tautochronam STR , in
quâ datâ lege vis gravitatis exterminabitur v .

Exemplum. Sit gravitas constans, seu $v = g$,
et erit $v dx = g dx$, $S. v dx = gx$, quæ
evanescit, ubi $x = 0$. Quare æquatio ad cur-
vam SR fiet $dx \sqrt{\frac{b - 2x}{2x}} = dy$. Quo-

niam vero $ss = \frac{2b}{g} S. v dx = 2bx$, si po-
natur $b = SR$, ut verticalis per S ducta cur-
vam tangat in S , et loco scribatur b , ac loco x
scribatur a , erit $bb = 2ba$, et proinde $b =$
 $2a$, atque $ss = 4ax$, hoc est, $SR = 2RE$,
et $TR^2 = 4RE \times RD$; porro si diame-
tro RE describatur circulus EMR secans DT
in M , erit $MR^2 = RE \times RD$, $4MR^2 =$
 $4RE \times RD$, ideoque $TR^2 = 4MR^2$,
et $TR = 2MR$, quæ est proprietas cycloidis
vulgaris circulo genitore EMR descriptæ.

Casus 2. Tendat vis centripeta ad punctum
datum C . Centro C , radii CE , CD , Cd
descripti sint arcus circulares ES , DT , dt , n ,



curvæ SR occurrentes in S , T , t , et rectæ CT
in n , sintque E punctum in axe CE datum,
 D , d puncta infinitè propinqua, tangens TX
per T ductæ pars TY æqualis arcui TR , et
 ZY , CX ad tangentem perpendiculares. Di-
cantur $CE = a$, $CR = c$, SL pars radii
 C S eodem modo determinata ac TZ pars radii
 C T sit $= b$, vis centripeta in E vel $S = g$, in
 D vel $T = v$, CD vel $CT = x$, TR vel
 $TY = s$, $CX = p$. Ob similitudinem tri-
angulorum Tnt , TYZ , TXC , est Tn
 $(dx) : Tt(ds) = T_n(s) : TZ = \frac{s ds}{dx}$ et
 $TC(x) : CX(p) = Tt(ds) : tn =$
 $\frac{p ds}{x}$, ideoque ob angulum Tnt rectum $ds^2 =$
 $dx^2 + \frac{p p ds^2}{x x}$, et proinde $ds^2 =$
 $\frac{x x dx^2}{x x - p p}$.

Verùm (per Prop. 55.) $g : v = b : T Z$
 $\left(\frac{s \, d s}{d x}\right)$, undè $s \, d s = \frac{b}{g} v \, d x$, et sumptis

fluentibus $\frac{1}{2} s s = \frac{b}{g} S. v \, d x$. Quoniam autem evanescens s , fit $x = c$, fluens $S. v \, d x$ ita accipi debet, ut, posità $x = c$, evanescat.

Erit igitur $s s = \frac{2b}{g} S. v \, d x$, $s = \sqrt{\left(\frac{2b}{g} \times \frac{S. v \, d x}{b \, v \, d x}\right)}$

$S. v \, d x$, et sumptis fluxionibus $d s = \frac{\sqrt{2 b g S. v \, d x}}{2 b v \, d x}$, unde $d s^2 = \frac{b \, v \, d x^2}{2 g S. v \, d x} = \frac{x x \, d x^2}{x x - p p}$, at-

què adeo $\frac{b \, v \, v}{2 g S. v \, d x} = \frac{x^2}{x x - p p}$ æquatio ad tautochronam $S T R$, in quâ datâ lege vis centripetæ delebitur v .

Exempum. Vis centripeta sit ut distantia a centro C , hoc est, $g : v = a : x$, adeoque $v = \frac{g x}{a}$, $v \, d x = \frac{g x \, d x}{a}$, $S. v \, d x = \frac{g x x}{2 a} + Q$ (constantem) et quoniam positâ $x = c$, evanescit $S. v \, d x$, erit $Q = -\frac{g c c}{2 a}$, atque ita

$S. v \, d x = \frac{g x x - g c c}{2 a}$. Quare erit $s s = \frac{2 b}{g} S. v \, d x = \frac{b x x - b c c}{a}$, et æquatio ad

tautochronam evadet $\frac{b x x}{a x x - a c c} = \frac{x x}{x x - p p}$, seu $p p = \frac{b x x - b c c}{b}$.

Jam si in hac æquatione ponatur $b = a$, erit $p = c$, et $s s = x x = c c$, ideoque tautochrona $S R$ linea recta ad $C R$ perpendicularis in R .

Si ponatur b major quàm a , et $c = o$, erit $p = x \sqrt{\frac{b-a}{b}}$, adeoque p ad x in ratione datâ, cumque sit p seu $C X$ sinus anguli $C T X$, existente radio x seu $C T$, erit angulus $C T X$ constans, et proinde tautochrona $S R$ spiralis logarithmica.

Si fuerit b minor quàm a , et recta $C S$ curvam $S R$ tangat in S , erit $b = S R$; cumque sit $s s = \frac{b x x - b c c}{a}$, si ponatur $s = S R$

$= b$, et proinde $x = a$, fiet $b b = \frac{b a a - b c c}{a}$,

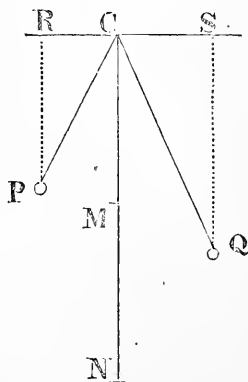
et $b = \frac{a a - c c}{a}$. Jam si in æquatione ad

curvam $S R$ loco b scribatur $\frac{a a - c c}{a}$, erit $p p = \frac{a a c c - c c x x}{a a - c c}$ æquatio ad cycloidem, quæ

describitur rotatione circuli cujus diameter est $R E$ seu $a - c$ super concavam peripheriam circuli centro C radio $C E$ seu a descripti, ut liquet per $N. 466$.

Schol. In superioribus de pendulorum motu propositionibus corporis penduli gravitatem in

centro seu puncto coactam et filum gravitatis expers supposuimus, quæ pendulum simplex constituunt. Quamobrem ne demonstratæ oscillationum leges in experimentis valdè perturbentur, filum usurpandum est tenue cum globo exiguo et ex materiâ gravissimâ conflato. Si verò filum aut virga e quâ globus pendet gravis fuerit et globus major, pendulum non amplius simplex est, sed compositum, quod pluribus ponderibus inter se connexis instructum est.



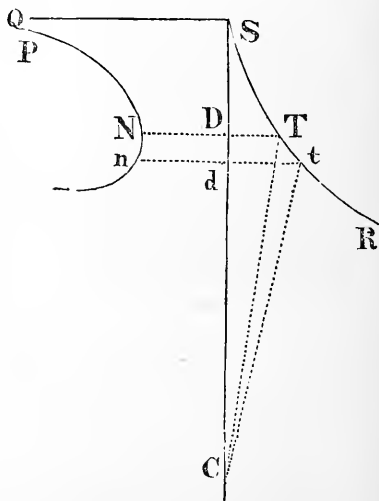
Pendulum compositum $P C Q$, onustum quocumque pondusculis P, Q , &c. quorum commune gravitatis centrum M circa punctum suspensionis C oscilletur. Recta $C M$ per punctum suspensionis C et commune gravitatis centrum M ducta vocatur axis penduli compositi $P C Q$, recta verò $R C S$ in puncto suspensionis C ad axem penduli $C M$ perpendicularis dicitur axis oscillationis. Si in axe penduli compositi $C M$, capiatur $C N$ æqualis longitudini penduli simplicis suas oscillationes in circulo eodem tempore quo pendulum compositum semper absolvitis, pendulum illud simplex composito $P C Q$ synchronum vel etiam isochronum dicitur, et punctum N centrum oscillationis penduli compositi $P C Q$ appellatur. Porro si singulorum pondusculorum P, Q , &c. gravitas in punctis P, Q , &c. collecta intelligatur, et lineæ $P C, Q C$, &c. gravitatis expertes supponantur, sitque M summa pondusculorum omnium P, Q , &c. atque ex punctis P, Q , &c. ad axem oscillationis $R C S$ demittantur perpendicularia $P R, Q S$, &c. erit $C N = \frac{P \times P R^2 + Q \times Q S^2}{M \times M C} +$, &c. id est, si

pondera singula penduli compositi ducantur in quadrata distantiarum suarum ab axe oscillationis, et summa productorum dividatur per id quod fit ducendo ponderum summam in distantiam centri gravitatis communis omnium ab eodem axe oscillationis, oriatur longitudo penduli simplicis composito isochroni, si vè distantia inter axem et centrum oscillationis ipsius penduli compositi. Hoc pulcherrimum theorema quo line-

PROPOSITIO LIV. PROBLEMA XXXVI.

Concessis figurarum curvilinearum quadraturis, invenire tempora, quibus corpora vi quâlibet centripetâ in lineis quibuscunque curvis, in plano per centrum virium transeunte descriptis, descendant et ascendant.

Descendat corpus de loco quovis S, per lineam quamvis curvam S T t R in plano per virium centrum C transeunte datam. Jungatur C S et dividatur eadem in partes innumeras æquales, sitque D d partium illarum aliqua. Centro C intervallis C D, C d describantur circuli D T, d t, lineæ curvæ S T t R occurrentes in T et t. Et ex datâ tum lege vis centripetæ, tum altitudine C S de quâ corpus cecidit; dabitur velocitas corporis in aliâ quâvis altitudine C T (per Prop. XXXIX.) (1) Tempus autem, quo corpus describit lineolam T t, est ut lineolæ hujus longitudo, id est, ut secans anguli t T C directè; et velocitas inversè. Tempori huic proportionalis sit ordinatim applicata D N ad rectam C S per punctum D perpendicularis, et ob datam D d erit rectangulum D d × D N, hoc est area D N n d, eidem tempori pro-



arum ac figurarum omnium oscillantium centrum oscillationis determinatur, primus in horologio oscillatorio invenit ac demonstravit Hugenius. Idem theorema suo quisque modo postea demonstrarunt fratres celeberrimi Jacobus et Joannes Bernoulli, ille in Actis Lipsiensibus an. 1691. et Commentariis Paris. an. 1703. Hinc verò in Actis Lipsiensibus et Commentariis Paris. an. 1714. quorum demonstrationes exposuit clariss. Wolfius in Elementis Mechanices. Hermannus quoque lib. 1^o. Phoron. cap. 5^o. et initio Tomi 3ⁱ. Acad. Petropol. duas ejusdem theorematibus demonstrationes edidit.

Hugenius horologii oscillatorii parte 4^a. Prop. 22. distantiam centri oscillationis a puncto suspensionis in sphaerâ filo tenui suspensâ æqualem esse invenit longitudini fili cum radio sphaeræ atque duabus quintis partibus tertiæ proportionalis ad lineam compositam ex radio sphaeræ ac longitudine fili et radium ipsum, hoc est, si filum dicatur L, radius sphaeræ R, distantia centri oscil-

lationis a puncto suspensionis D, erit $D = L + R + \frac{2 R R}{5 (L + R)}$. Sed hæc omnia indicare, non verò demonstrare nobis licet, cum his Propositionibus non utatur Autor noster.

(1) * *Tempus autem quo corpus, &c.* Nam, T t, est spatium nascens velocitate uniformi descriptum, est autem tempus quo spatium aliquod æquabiliter describitur ut spatium illud directè et velocitas inversè (5). Porro si centro T radio dato D d, æquali differentie rectarum T C, t C circulus describi intelligatur, erit T t secans anguli t T C, quare ob datum radium D d erit semper T t ut secans anguli t T C, atque adeo tempus quo describitur T t erit ut illa secans directè et velocitas inversè. Sed datâ tangente curvæ S T R in puncto T datur anguli C T t secans; undè dabitur D N proportionalis tempori quo describitur T t.

479. *Exemplum.* Centrum virium C, in infinitum abeat, ut sit vis centripeta constans, illius-

portionale. Ergo si $P N$ n sit curva illa linea quam punctum N perpetuo tangit, ejusque asymptotos sit recta $S Q$ rectæ $C S$ perpendiculariter insistens: erit area $S Q P N D$ proportionalis tempori quo corpus descendendo descripsit lineam $S T$; proindeque ex inventâ illâ areâ dabitur tempus. Q. e. i.

que directio rectæ $S D C$ semper parallela, et arcus $D T$, $d t$, in rectas lineas ad $S D$ norma-

Sit enim (in superioribus figuris) $D d = d x$, $T t = d s$, $t m = d y$, velocitas in $T = c$, et

circuli quadrans cujus centrum O et radius $O S$ ad $S D$ perpendicularis; producantur perpendiculara $T D$, $O S$ ad F et V , et $D F$ constans gravitatem exhibeat in loco D , punctum F perpetuò tanget rectam $V F$ lineæ $S D$ parallelam, eritque (408) velocitas in D vel $T = \sqrt{2 S D \times F D}$. Ex puncto T ad $S O$ demittatur perpendicularum $T H$ rectam $d t$ secans in m , sitque $S O = a$, $S V = F D = b$, $S D = T H = x$ et ob triangula $T O H$, $t T m$, similia, erit $HO (\sqrt{a a - x x})$: $T O (a) = T m (d x)$: $T t = \frac{a d x}{\sqrt{a a - x x}}$, velocitas in $T = \sqrt{2 S D \times F D} = \sqrt{2 b x}$.

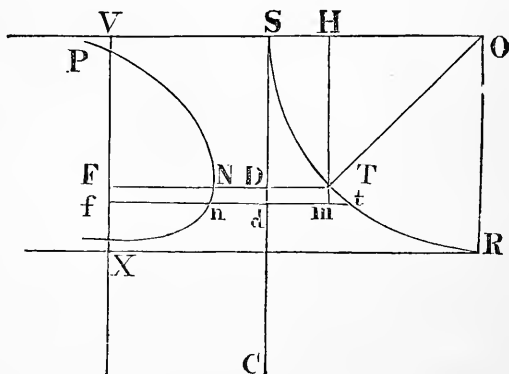
Quare tempus per arcum nascentem $T t = \frac{T t}{\sqrt{2 b x}} (5) = \frac{a d x}{\sqrt{2 a a b x - 2 b x^3}}$ undè, $D N = \frac{a}{\sqrt{2 b a a x - 2 b x^3}}$. Si $D N$ di-

catur y , erit $y y = \frac{2 b a a x - 2 b x^3}{a^2}$ æquatio ad curvam $P N n$, in quâ si ponatur $x = o$ vel $x = a$ erit y infinita, et proindè rectæ $O V$, $R X$ ad $S D$ perpendicularares sunt hujus curvæ asymptoti.

Similiter si corpus de loco R ascendat in semicirculo $R T S$, sitque ejus velocitas in R illa quâ possit ad altitudinem verticalem e ascendere, dicanturque $X V$ seu $R O = a$, $F X = x$, ideoque velocitas in $T = \sqrt{2 b c - 2 b x}$, et

$T t = \frac{a d x}{\sqrt{a a - x x}}$; erit tempus per $T t = \frac{a d x}{\sqrt{2 b c - 2 b x \times a a - x x}}$ et $D N = y = \frac{a}{\sqrt{2 b c - 2 b x \times (a a - x x)}}$, ubi $D N$ per unitatis quadratum, ut servetur homogeneitas, divisa intelligitur.

Scholium. Si ex his tribus, vi centripetâ in singulis locis, curvâ in quâ corpus ascendit vel descendit, et tempore quo singuli curvæ arcus percurruntur, duo data fuerint, tertium dabitur.



erit $d s^2 = d x^2 + d y^2$, et (5) $c d t = d s$, ideoque $c c d t^2 = d x^2 + d y^2$. Quare si, datâ vi centripetâ, seu (per Prop. 39.) æquatione inter c et x , detur etiam æquatio inter t et x vel y , dabitur æquatio inter x et y , hoc est, æquatio ad curvam $S T t$, et vice versâ. Exempli causâ, positâ vi centripetâ constante et ad distantiam infinitam tendente, corpus ita descendat in curva $S T t$, ut tempus per arcum quemvis $S T$ proportionale sit altitudini correspondenti $S d$, dicanturque $S d = x$, $D T = y$, tempus per $S T = t$, velocitas in $T = c$; et erit $d t$ ut $d x$, et c ut \sqrt{x} , ideoque $c d t$ ut $d x \times \sqrt{x}$, et hinc si fuerit a quantitas constans, $c d t = d x \frac{\sqrt{x}}{a}$ et proinde $\frac{x d x^2}{a} = d x^2 + d y^2$, et hinc $(x - a) d x^2 = a d y^2$. Ponatur

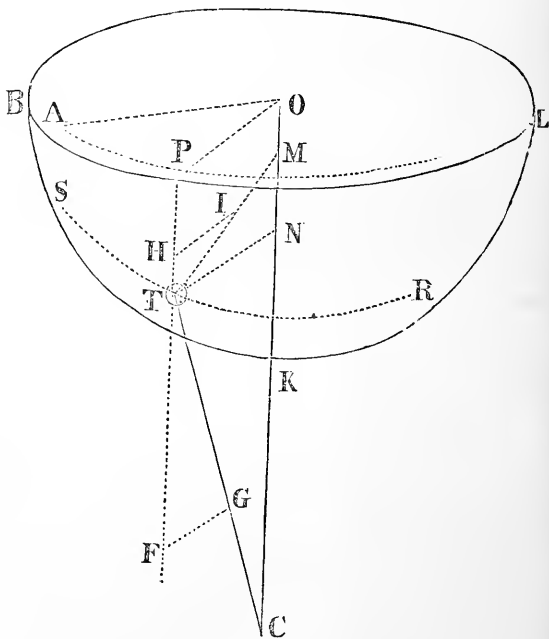
$x - a = v$, et erit $d x = d v$, et $v^{\frac{1}{2}} d v = a^{\frac{1}{2}} d y$, sumptisque fluentibus $\frac{2}{3} v^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{1}{2}} y$, $\frac{4}{9} v^3 = a y y$, $v^3 = \frac{9}{4} a y y$, æquatio ad parabolam secundi generis, cujus est latus rectum $\frac{9 a}{4}$, abscissa v , et ordinatim applicata y . Sed

quoniam in illâ parabolâ, positâ $y = o$, fit $v = o$, adeoque $x - a = v = o$, et $x = a$, patet corpus de altitudine a cadere debere antequam in parabola descendat, capiendamque esse $S D = v$, ut tempus per arcum $S T$ sit proportionale altitudini $v + a$, seu x .

PROPOSITIO LV. THEOREMA XIX.

Si corpus movetur in superficie quâcunque curvâ, cujus axis per centrum virium transit, et a corpore in axem demittatur perpendicularis, eique parallela et æqualis ab axis puncto quovis dato ducatur : dico quod parallela illa aream tempori proportionalem describet.

Sit B K L superficies curva, T corpus in eâ revolvens, S T R trajectory, quam corpus in eâdem describit, S initium trajectory, O M K axis superficiei curvæ, T N recta a corpore in axem perpendicularis, O P huic parallela et æqualis a puncto O, quod in axe datur, educta; A P^(m) vestigium trajectory a puncto P in lineæ volubilis O P plano Δ O P descriptum; A vestigii initium puncto S respondens; T C recta a corpore ad centrum ducta; T G pars ejus vi centripetæ quâ corpus urgetur in centrum C, proportionalis; T M recta ad superficiem curvam perpendicularis; T I pars ejus vi pressio- nis, quâ corpus urget superficiem vicissimque urgetur versus M a superficie, proportionalis; P T F recta axi parallela per corpus transiens, et G F, I H rectæ a punctis G et I in parallelam illam P H T F perpendiculariter demissæ. Dico jam, quod area A O P, radio O P ab initio motus descripta, sit tempori proportionalis. Nam vis T G (per legum Corol. 2.) resolvitur in vires T F, F G; et vis T I in vires T H, H I:



(^m) * A P vestigium, &c. Si corpus in superficie quâcunque curvâ moveatur, suoque motu curvam describat quæ in plano posita non sit, ad planum est referenda, idque fit si in superficie curvâ aliquod fingatur planum ad quod ex sin-

gulis curvæ descriptæ punctis erigantur perpendiculares, quarum extremitates aliam in plano lineam describent, hæc linea primæ vestigium seu linea projectionis dicitur.

Vires autem TF , TH agendo secundum lineam PF plano AOP perpendicularem mutant solummodo motum corporis quâtenus huic plano perpendicularem. Ideoque motus ejus quâtenus secundum positionem plani factus; hoc est, motus puncti P , quo trajectory vestigium AP in hoc plano describitur, idem est ac si vires TF , TH tollerentur, et corpus solis viribus FG , HI ageretur; hoc est, idem ac si corpus in plano AOP , vi ⁽ⁿ⁾ centripetâ ad centrum O tendente et summam virium FG et HI æquante, describeret curvam AP . Sed vi tali describitur area AOP (per Prop. I.) tempori proportionalis. Q. e. d.

Corol. Eodem argumento si corpus, a viribus agitatum ad centra duo vel plura in eâdem quâvis rectâ CO datâ tendentibus, describeret in spatio libero lineam quamcunque curvam ST ; foret area AOP tempori semper proportionalis.

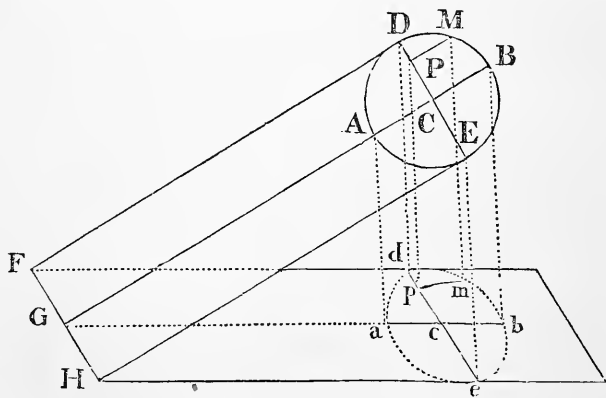
(ⁿ) * Vi centripetâ ad centrum O , &c. Nam curva superficies $BSKL$ genita supponitur revolutione curvæ lineæ BSK circa axem suum OC , undè sequitur lineas omnes PO , HI , TM , FG , PF , CO esse in eodem plano, atquè ideò vim centripetam agentem in plano illo ad centrum O juxta lineam PO dirigi.

480. *Lem.* Si linea recta AB projiciatur in planum $FHebd$, projectio est linea recta ab , quæ est ad lineam AB , ut cosinus anguli inclinationis BGb , ad sinum totum. Nam si ex punctis A , B , demittantur ad planum $FHebd$, perpendicularia duo Aa , Bb , patet planum $aABb$, esse ad planum $FHebd$ normale, adeoque perpendicularia omnia ex singulis lineæ AB punctis demissa, cadere in lineam rectam ab , quæ est communis intersectio planorum $FHebd$, $aABb$. Q. e. 1^{um}. Porro productis BA , b a ut sibi occurrant in G , ob parallelas Aa , Bb , erit a b ad AB , ut G b ad GB , id est, ut sinus anguli GBb sive cosinus anguli inclinationis BGb , ad sinum totum. Q. e. 2^{um}.

481. *Corol.* Si linea projicienda, plano in quod projicitur parallela fuerit projectio erit linea recta lineæ projiciendæ æqualis et parallela; Nam in hoc casu angulus inclinationis nullus est, et ejus cosinus fit radius. Hinc si linea ED , ad rectam AB perpendicularis, fuerit

plano $FHebd$, parallela, projectio illius e d , erit ipsi E D æqualis.

482. *Lemma.* Iisdem positis, si in plano $DFHEBA$, centro C , radio CD , describatur circulus DE , illius in planum $FHebd$ projectio d e b , erit ellipsis cujus major axis d e æqualis erit diametro circuli DE , et ad minorem axem a b , rationem habeat sinus



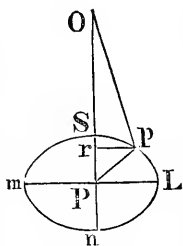
totius ad cosinum anguli BGb , inclinationis planorum. Agatur enim PM ordinatum ad diametrum circuli DE , et projiciatur in rectam Pm , erit d p $=$ D P , et p e $=$ P E (481) atque p m ad P M , ut sinus anguli PMm , seu anguli ABb , ad sinum totum (480) hoc est, ut a b , ad AB seu d e , adeoque p m^2 : P M^2 $=$ a b^2 : d e^2 , sed ex naturâ circuli P M^2 $=$ D P \times P E $=$ d p \times p e , Ergo p m^2 : d p \times p e $=$ a b^2 : d e^2 . Est igitur a b d , ellipsis. Cætera patent per Lemma superius et ejus Corol.

PROPOSITIO LVI. PROBLEMA XXXVII.

Concessis figurarum curvilinearum quadraturis, datisque tum lege vis centripetæ ad centrum datum tendentis, tum superficie curvâ cujus axis per centrum illud transit; invenienda est trajectory quam corpus in eâdem superficie describet, de loco dato, datâ cum velocitate, versus plagam in superficie illâ datam egressum.

Stantibus quæ in superiore propositione constructa sunt, exeat corpus

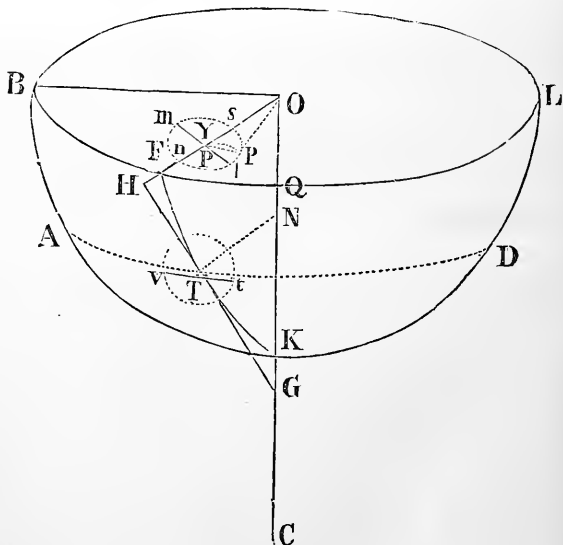
483. *LEM.* Sint ellipseos datæ $L S m n$ axes $L m$, $S n$, centrum P , O punctum in axe $n S$ producto datum, p punctum perimetri non datum. Datâ areâ trianguli $O p P$, dabitur perpendicularum $p r$, ex puncto p , ad trianguli basim datam $P O$ demissum et hinc ex naturâ ellipseos dabitur $r P$, atque ob angulum rectum ad r , dabitur $P p$, et idem punctum p in perimetro cum angulo $O P p$, et positione rectæ $O p$.



484. *Lemma.* Superficies curvæ $B A T K L$, describatur revolutione curvæ $B A K$ circa axem suum immobilem $O C$, et singula curvæ illius puncta B , A circulos $B Q L$, $A T D$ describent; cum curvæ $B A K$ pervenit ad situm $F T K$, et punctum A ad T , agantur rectæ $G T H$ curvæ $F T K$ tangens in T et axem secans in G , ac rectâ $v T t$ circulum $A T D$ tangens in eodem puncto T , sitque $G T H$, in plano curvæ $O F K$, et $v T t$, in plano circuli $A T D$. Manifestum est planum quod superficiem curvæ $B A T K L$ tangit in T , convenire cum plano in quo sunt rectæ $G T H$, $v T t$; et si fuerit O centrum circuli $B F Q L$, et ducatur radius $O F$ tangenti $G T$ occurrens in H , angulum $G H O$ fore æqualem angulo inclinationis plani circuli $B Q L O$, ad planum quod superficiem curvæ tangit in T ; Ducto autem circuli $A T D$ radio $T N$, fore angulum $G T N$, æqualem angulo inclinationis $G H O$.

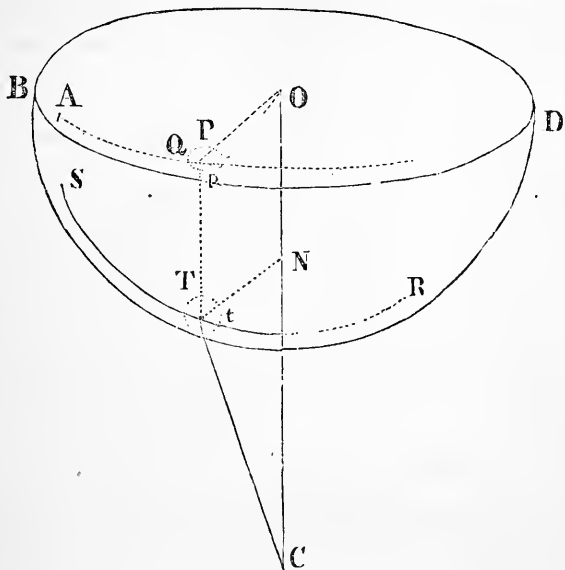
485. *Corol.* 1. Iisdem positis, si centro T , radio quam minimo $T t$, circellus in superficie curvâ $B A T L$ describatur, circellus ille evanescens erit in plano superficiem curvæ tangente in T , adeoque angulus inclinationis plani $B O L Q$, ad planum circelli evanescentis productum, æqualis erit angulo $G T N$, (484).

486. *Corol.* 2. Si circellus radio $T t$ descriptus projiciatur in planum $B O L Q$, illius projectio $l s m n$, erit ellipsis (482) cujus axis major $l m$ æqualis est et parallelus circelli diametro $v T t$, quæ pars est evanescens circuli $A T D$, axis minor $s n$ pars radii $O F$, et $l m$ erit ad $s n$ ut $T G$ ad $T N$. Est enim circuli peripheria $A T D$ adeoque et pars illius $v T t$, plano $B F L O$ parallela; Quare (481) diametri $v T t$ projectio $m l$, erit linea parallela et æqualis ipsi $v t$; erit quoque $l m$, ad radium $O P F$



normalis, ob $v t$ ad $T N$ perpendicularem, proindeque axis minor ellipseos $s n$ erit pars radii

T de loco dato S secundum rectam positione datam in trajectoriam inven-
niendam S T R, cujus vestigium in plano B D O sit A P. Et ex datâ
corporis velocitate in altitudine S C, (°) dabitur ejus velocitas in aliâ quâ-
vis altitudine T C. Eâ cum velocitate dato tempore quam minimo de-



scribat corpus trajectory suae particulam Tt , sitque Pp vestigium ejus in plano $AO P$ descriptum. Jungatur $O p$, et circelli centro T intervallo Tt in superficie curva descripti vestigium in plano $AO P$ sit ellipsis $p Q$. Et ^(f) ob datum magnitudine circellum Tt , datamque ejus ab axe CO distantiam TN vel PO , dabitur ellipsis illa $p Q$ specie et magnitudine, ut et positione ad rectam PO . Cumque ^(g) area $PO p$ sit tempori pro-

O F; Est autem (482) l m ad s n, ut sinus totus ad cosinum anguli inclinationis planorum G H O, seu G T N, (484) hoc est, ut T G ad T N, ob angulum T N G rectum.

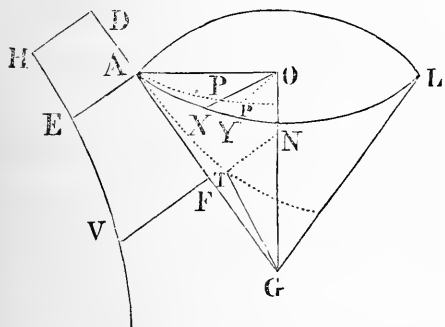
(^o) * *Dabitur ejus velocitas in aliâ, &c.* Nam (per Prop. 40.) velocitas corporis in altitudine T C, æqualis est velocitati quam corpus haberet ad eandem altitudinem in lineâ rectâ S C, si de loco S, rectâ fuisset versus C projectum cum eâdem velocitate quâ trajectoriam S T R, incipit describere in S; sed datâ in loco S velocitate corporis per lineam S C versus centrum C projecti, datur illius velocitas in alio quovis loco lineæ S C, (per Cor. 2. Prop. 59.). Ergo ex datâ corporis velocitate in altitudine S C, dabitur ejus velocitas in aliâ quâvis altitudine T C.

Nam datis velocitate et tempore quibus uniformiter describitur spatium nascens $T t$, datur spatium illud $T t$, seu radius circelli (5). Præterea datâ altitudine $T C$, datur tum planum ad axem $C O$ perpendiculare in quo circelli centrum positum est, tum angulus inclinationis plani quod in puncto T curvam superficiem $B S T D$ tangit (484) ad planum $B O D P$, adeoque datur angulus inclinationis plani in quo est circellus nascens ad planum $B O D P$ (485), undè (482. 486.) ellipsis $P p Q$ in quam circellus projicitur dabitur specie et magnitudine ut et positione ad rectam $P O$.

(^q) * Cùmque area $P O p$, sit tempori quo describitur *proportionalis* (Prop. 55.) eodemque tempore quo circelli radius $T t$ describatur, ex hoc tempore dato datur, atque adeò dabitur an-

tantiarum ab illo puncto G decrescat, sitque H E V curva ad quam terminantur perpendiculara D H, A E, F V vim centripetam in locis singulis D, A, F, vel T, exhibentia, cætera verò maneant ut in exemplo superiori. Quoniam

$TG = \frac{fx}{r}$ erit vis centripeta in loco T vel F ut $\frac{r^3}{f^3 x^3}$, adeoque si fuerit n quantitas data, vis



centripeta supponi poterit $= \frac{n^4}{x^3}$. Sit D G =

m, et erit (431) area DHVF = $\frac{n^4 (m m - x x)}{m m x x}$

$= \frac{k k m m - k k x x}{x x}$, ponendo $\frac{n^4}{m m} = k k$.

Quare si dicatur area D H E A = p p, erit

$P O p = \frac{C p f x d x}{2 r \sqrt{k k m m - k k x x - C C p p}}$

$= \frac{q x d x}{\sqrt{h h - x x}}$ ponendo $k k m m - C C p p$

$= k k h h$, et $\frac{C p f}{2 r k} = q$. Similiter invenietur

$O X Y = \frac{r r q d x}{x \sqrt{h h - x x}}$ Quoniam autem

crescentibus areis A P O, A X O, decrescit

P O, seu x, scribendum est $P O p = \frac{-q x d x}{\sqrt{h h - x x}}$

et $O X Y = \frac{-r r q d x}{x \sqrt{h h - x x}}$. Fiat $\sqrt{h h - x x}$

$= z$, et erit $h h - x x = z z$ et $-x d x =$

$z d z$, et $P O p = q d z$, sumptisque fluentibus

et additæ constanti Q, erit $A P O = q z + Q$

$= q \sqrt{h h - x x} + Q$. Porro area A P O

evanescit ubi P O, seu x = A O = r, quare o

$= q \sqrt{h h - r r} + Q$, et hinc $Q = -q \sqrt{h h - r r}$, proindeque $A P O = q \sqrt{h h - x x}$

$- q \sqrt{h h - r r}$. Et dato igitur tempore

quo corpus describit A T, geometricè invenitur

longitudo lineæ P O. Ponatur nunc $x = \frac{h h}{y}$

et erit $-d x = \frac{h h d y}{y y}$, $h h - x x$

$$= \frac{h h y y - h^4}{y^2}, \sqrt{h h - x x} = \frac{h \sqrt{y^2 - h^2}}{y}$$

$$\text{atque adeò } O X Y = \frac{-r r q d x}{x \sqrt{h h - x x}} = \frac{r r q d y}{h \sqrt{y^2 - h^2}}$$

$$\text{Sit } \frac{r r q}{h h} = \frac{1}{2} s, \text{ et erit } O X Y = \frac{1}{2} \frac{s h d y}{\sqrt{y y - h h}}$$

Undè habetur constructio sequens.

Centro O, semiaxe transverso O A Q

= h, semiaxe conjugato = s, describatur

hyperbola Q M N, ex illius perimetri

puncto quovis N, demittatur ad axem

O Q, perpendicularum N K, et abscissa

O K dicatur y, ductaque recta N L, quæ

hyperbolam tangat in N, et axi occurrat

in L, erit (ex conic.) O K (y) : O Q (h)

= O Q (h) : O L = $\frac{h h}{y} = x$, et sector

hyperbolicus O N Q = S. $\frac{1}{2}$

$\frac{s h d y}{\sqrt{y y - h h}}$ (427) atque adeò A X O

= O N Q + Q constante. Si ponatur x,

seu $\frac{h h}{y} = O A = r$, hoc est $y = \frac{h h}{r}$

evanescet area A X O, quare si capiatur

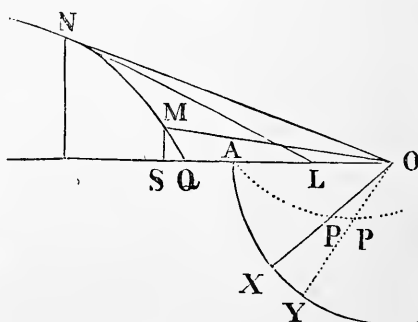
O S = $\frac{h h}{r}$ et ad axem erigatur perpendicularum

S M, hyperbolæ occurrens in M, jungaturque

O M, erit o = O M Q + Q, et Q =

O M Q, unde A X O = O N Q - O M Q

= O N M. Sumatur itaque sector circuli



O A X = sectori hyperbolico O N M, et in ra-

dio O X capiatur O P = O L, erit P punctum

in vestigio seu curvâ A P p. Hinc si ex dato

tempore quærat locus T (vid. fig. super.) in

trajectoria T R, invenietur primum longitudo

O P, seu O L, tum agatur L N tangens hyper-

bolam in puncto aliquo N; Deindè capiatur sector

circularis A X O = sectori hyperbolico

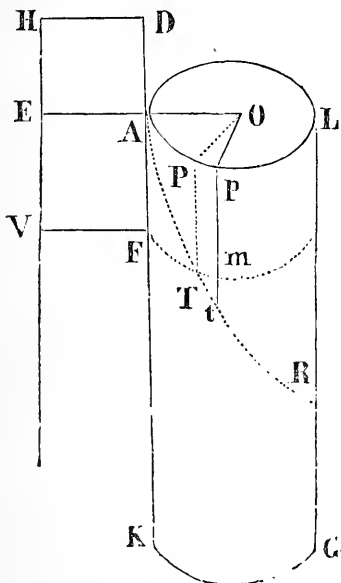
O N M, et in radio O X, capiatur O P = O L,

ac tandem ex puncto P, erigatur ad planum

A O P (vid. fig. super.) perpendicularum P T,

quod superficiæ conicæ occurret in loco quasito T.

Exempl. 4. Moveatur corpus de loco A per trajectorym A T R, in superficie concavâ cylindri recti A K G L, in quo sit baseos centrum O, manifestum est vestigium trajectorye A T R,



coincidere cum baseos peripheriâ circulari A P L, quam proindè punctum P, æquabili velocitate describet (per Prop. 56.) Sit vis centripeta constans et per lineas lateri cylindri A K parallelas semper agat, dicanturque H D = a, D A = b, A F = P T = y, m t = d y, arcus A P = x, P p = T m = d x, T t = $\sqrt{d x^2 + d y^2}$, erit area D H E A = a b, area D H V F = a b + a y, velocitas in F vel T = $\sqrt{a b + a y}$, ndè tempusculum quo describitur nascens T t

vel P p erit = $\frac{\sqrt{d x^2 + d y^2}}{\sqrt{a b + a y}}$. Et sit data velocitas quâ punctum P describit circulum A P L dicaturque c erit tempusculum quo describitur P p = $\frac{P p}{c} = \frac{d x}{c}$; quare $\frac{d x}{c} = \frac{\sqrt{d x^2 + d y^2}}{\sqrt{a b + a y}}$, et $\frac{d x^2}{c^2} = \frac{d x^2 + d y^2}{a b + a y}$, et a b d x^2 + a y d x^2 - c c d x^2 = c c d y^2, et d x = $\frac{c d y}{\sqrt{a b - c c + a y}} = \frac{\sqrt{a q + a y}}{\sqrt{a q + a y}}$, ponendo a b - c c = a q, fiat jam $\sqrt{q + y} = z$, q + y = z z, d y = 2 z d z, $\sqrt{a q + a y} = z \sqrt{a}$ erit d x = $\frac{2 c z d z}{z \sqrt{a}} = \frac{2 c}{\sqrt{a}} \times d z$, et sumptis fluentibus additâ constanti Q, erit x = $\frac{2 c z}{\sqrt{a}} + Q = \frac{2 c \sqrt{q + y}}{\sqrt{a}} + Q$. Ponatur y = o, erit etiam x = o, adeòque o = $\frac{2 c \sqrt{q}}{\sqrt{a}} + Q$, et Q = $-\sqrt{\frac{4 c c q}{a}}$, undè x = $\sqrt{\frac{4 c c q + 4 c c y}{a}} - \sqrt{\frac{4 c c q}{a}}$. Sit $\frac{4 c c}{a} = p$, et $\frac{4 c c q}{a} = n n$, erit x = $\sqrt{n n + p y} - n$, x x + 2 n x = p y, y = $\frac{x x + 2 n x}{p}$. Concessâ igitur quadraturâ circuli facilè invenitur trajectorye A T R punctum quodvis T capiendò perpendiculum P T ad arcum A P, ut est A P + 2 n ad p. Ex tempore autem dato datur arcus A P. Si corporis de loco A egredientis velocitas eadem sit ac velocitas puncti P in plano baseos A P L O revolvantis erit c c = a b, et quoniam supposuimus a b - c c = a q, esset q = o, et proindè n n = $\frac{4 c c q}{a} = o$, atque hinc y = $\frac{x x}{q}$, seu p : x = x : y. Sive scribendo loco p ejus valorem $\frac{4 c c}{a}$, in quo loco c c ponatur a b, erit 4 b : x = x : y, hoc est, 4 D A ad arcum A P ut is A P ad P T.

SECTIO XI.

De motu corporum viribus centripetis se mutuo petentium.

Hactenus exposui motus corporum attractorum ad centrum immobile, quale tamen vix extat in rerum naturâ. Attractiones enim fieri solent ad corpora; et corporum trahentium et attractorum actiones semper mutuæ sunt et æquales, per legem tertiam: adeo ut neque attrahens possit quiescere neque attractum, si duo sint corpora, sed ^(*) ambo (per legum Corollarium quartum) quasi attractione mutuâ, circum gravitatis centrum commune revolvantur: et si plura sint corpora, quæ vel ab unico attrahantur, et idem attrahant, vel omnia se mutuo attrahant; hæc ita inter se moveri debeant, ut gravitatis centrum commune vel quiescat, vel uniformiter moveatur in directum. Quâ de causâ jam pergo motum exponere corporum se mutuo trahentium, considerando vires centripetas tanquam attractiones, quamvis fortasse, si physicè loquamur, verius dicantur impulsus. In mathematicis enim jam versamur; et propterea, missis disputationibus physicis, familiari utimur sermone, quo possimus a lectoribus mathematicis facilius intelligi.

PROPOSITIO LVII. THEOREMA XX.

Corpora ^() duo se invicem trahentia describunt, et circum commune centrum gravitatis, et circum se mutuò, figuras similes.*

Sunt ^(u) enim distantiae corporum a communi gravitatis centro reciproce proportionales corporibus, atque ideo in datâ ratione ad invicem, et componendo in datâ ratione ad distantiam totam inter corpora. Feruntur autem hæ distantiae circum terminum suum communem æquali motu angulari, propterea quod in directum semper jacentes non mutant inclina-

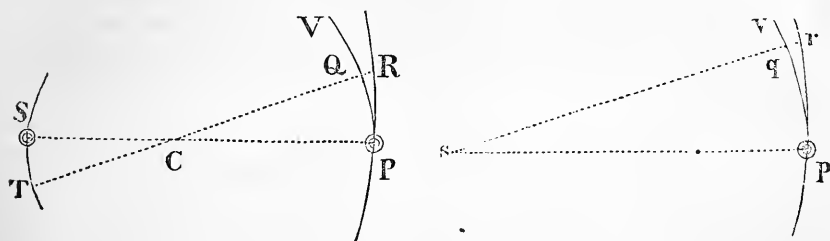
(*) * Sed ambo (per leg. Corol. 4.) quam attractione mutuâ vel ad se invicem rectâ lineâ ferantur, vel, si ambo vi impressâ obliquè projiciuntur, circum gravitatis centrum commune quiescens aut uniformiter progrediens revolvantur.

(^u) * Corpora duo. (Vid. fig. in sub. pag.) Si corpora duo S, P se invicem trahentia revolvantur circâ commune gravitatis centrum C,

pergendo de S ad T et de P ad Q, similes sunt hæ figuræ quatuor, nimirum P Q C, S T C, quas corpora S et P circa commune gravitatis centrum C describunt, tum figura p q T quam corpus P describit circa corpus S spectatum tanquam immotum, et figura π T Q, quam S circâ P similiter spectatum describit.

(^u) * Sunt enim distantie corporum a com-

les et parallelæ ducantur semper $s p$, $s q$; et curva $p q v$, quam punctum p revolvendo circum punctum immotum s describit, ^(b) erit similis et



æqualis curvis, quas corpora S , P describunt circum se mutuò: proindeque (per Theor. XX.) similis curvis $S T$ et $P Q V$, quas eadem corpora describunt circum commune gravitatis centrum C : idque quia proportionnes linearum $S C$, $C P$, et $S P$ vel $s p$ ad invicem dantur.

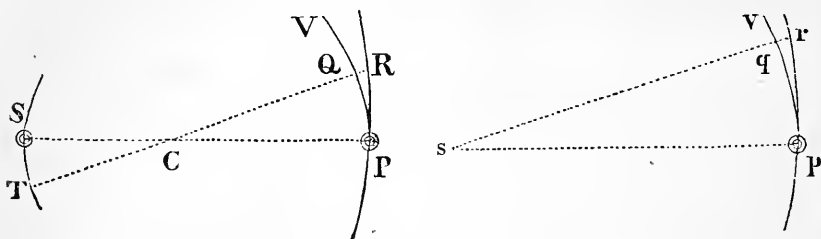
Cas. 1. Commune illud gravitatis centrum C , per legum corollarium quartum, vel quiescit, vel movetur uniformiter in directum. Ponamus primo, quod id quiescit, inque s et p locentur corpora duo, immobile in s , mobile in p , corporibus S et P similia et æqualia. Dein tangant rectæ $P R$ et $p r$ curvas $P Q$ et $p q$ in P et p , et producantur $C Q$ et $s q$ ad R et r . Et ob similitudinem figurarum $C P R Q$, $s p r q$ erit $R Q$ ad $r q$ ut $C P$ ad $s p$, ideoque in datâ ratione. Proinde si vis, quâ corpus P versus corpus S , atque ideo versus centrum intermedium C attrahitur, esset ad vim, quâ corpus p versus centrum s attrahitur, in eâdem illâ ratione datâ; hæ vires æqualibus temporibus attraherent semper corpora de tangentibus $P R$, $p r$ ad arcus $P Q$, $p q$ per intervalla ipsis proportionalia $R Q$, $r q$, ideoque vis posterior efficeret, ut corpus p gyraretur in curvâ $p q v$, quæ similis esset curvæ $P Q V$, in quâ vis prior efficit, ut corpus P gyretur; et revolutiones iisdem temporibus complerentur. At quoniam vires illæ non sunt ad invicem in ratione $C P$ ad $s p$, sed (ob similitudinem et æqualitatem corporum S et s , P et p , et æqualitatem distantiarum $S P$, $s p$) sibi mutuò æquales; corpora æqualibus temporibus æqualiter trahentur de tangentibus: et propterea, ut corpus posterius p trahatur per intervallum majus $r q$, requiritur tempus majus, ^(c) idque in subduplicatâ ratione intervallorum; propterea quod (per lemma decimum) spatia ipso

^(b) * *Erit similis et æqualis curvis*, ut patet ex demonstratione propositionis superioris.

^(c) *Idque in subduplicatâ ratione intervallorum.* Nascentibus arcibus q , $P Q$ tempora quibus describuntur intervalla $r q$, $R Q$ sunt in

subduplicatâ ratione eorumdem intervallorum, per Lem. X. Quare si velocitates uniformes quibus similes arcus nascentes $p q$, $P Q$ æqualibus viribus centripetis describuntur, dicantur V , v , tempora T , t , erit $T^2 : t^2 = r q : R Q =$

motus initio descripta sunt in duplicatâ ratione temporum. Ponatur igitur velocitas corporis p esse ad velocitatem corporis P in subduplicatâ



ratione distantiae $s p$ ad distantiam $C P$, eo ut temporibus, quæ sint in eâdem subduplicatâ ratione, describantur arcus $p q$, $P Q$, qui sunt in ratione integrâ: Et corpora P , p viribus æqualibus semper attracta describent circum centra quiescentia C et s figuras similes $P Q V$, $p q v$, quarum posterior $p q v$ similis est et æqualis figuræ, quam corpus P circum corpus mobile S describit. Q. e. d.

Cas. 2. Ponamus jam quod commune gravitatis centrum, unâ cum spatio in quo corpora moventur inter se, progreditur uniformiter in directum; et (per legem Corollarium sextum) motus omnes in hoc spatio peragentur ut prius, ideoque corpora describent circum se mutuo figuras easdem ac prius, et propterea figuræ $p q v$ similes et æquales. Q. e. d.

Corol. 1. Hinc corpora duo, viribus distantiae suæ proportionalibus se mutuo trahentia, describunt (per Prop. X.) et circum commune gravitatis centrum, et circum se mutuo, ellipses concentricas; et vice versâ, si tales figuræ describuntur, sunt vires ^(d) distantiae proportionales.

Corol. 2. Et corpora duo, viribus quadrato distantiae suæ reciproce proportionalibus, describunt (per Prop. XI. XII. XIII.) et circum commune gravitatis centrum, et circum se mutuo, sectiones conicas umbilicum habentes in centro, circum quod figuræ describuntur. Et vice versâ, si tales figuræ describuntur, vires centripetæ sunt quadrato distantiae reciproce proportionales.

$s p : C P = p q : P Q$, est verò (5) $V : v = \frac{p q}{T} : \frac{P Q}{t}$ sive ut $\frac{T^2}{T} : \frac{t^2}{t}$, adeoque $V : v = T : t = \sqrt{s p} : \sqrt{C P}$. Itaque corpora P , p , viribus æqualibus semper attracta, circum centra quiescentia C , s , nascentes figuras similes $P Q$, $p q$, adeoque et figuras quasvis similes $P Q V$, $p q v$, describent temporibus et velocitatibus quæ erunt in subduplicatâ ratione distantiarum similium $C P$, $s p$. Est autem (ex Dem.) figura $p q v$, similis et æqualis figuræ quam corpus P ,

circum corpus mobile S , (spectatum tanquam immotum, ut in propositione superiori exposuimus) describit eodem tempore, quo circa centrum C , describit figuram similem $P Q V$.

^(d) * *Distantiæ proportionales.* Cum enim (ex Dem.) corpus p , circa s , et corpora duo P , S , circa commune gravitatis centrum C , et circum se mutuo figuras similes vi centripetâ æquali describant, sitque (per Prop. X.) figura $p q v$, ellipsis cujus centrum S , liquet veritas corollarii.

Corol. 3. Corpora duo quævis circum gravitatis centrum commune gy-
rantia, radiis et ad centrum illud et ad se mutuò ductis, ^(e) describunt
areas temporibus proportionales.

PROPOSITIO LIX. THEOREMA XXII.

Corporum duorum S et P, circa commune gravitatis centrum C revolvantium, tempus periodicum esse ad tempus periodicum corporis alterutrius P, circa alterum immotum S gyantis, et figuris, quæ corpora circum se mutuò describunt, figuram similem et æqualem describentis, in subduplicatâ ratione corporis alterius S, ad summam corporum S + P.

Namque, ex demonstratione superioris propositionis, tempora, quibus arcus quivis similes P Q et p q describuntur, sunt in subduplicatâ ratione distantiarum C P et S P vel s p, hoc est, in subduplicatâ ratione corporis S ad summam corporum S + P. Et componendo, summæ temporum quibus arcus omnes similes P Q et p q describuntur, hoc est, tempora tota, quibus figuræ totæ similes describuntur, sunt in eâdem subduplicatâ ratione. Q. e. d.

PROPOSITIO LX. THEOREMA XXIII.

Si corpora duo S et P, viribus quadrato distantie suæ reciprocè proportionalibus, se mutuò trahentia, revolvuntur circa gravitatis centrum commune: dico quod ellipseos, quam corpus alterutrum P hoc motu circa alterum S describit, axis principalis erit ad axem principalem ellipseos, quam corpus idem P circa alterum quiescens S eodem tempore periodico describere posset, ut summa corporum duorum S + P ad primum duorum mediè proportionalium inter hanc summam et corpus illud alterum S.

^(f) Nam si descriptæ ellipses essent sibi invicem æquales, tempora pe-

^(e) * Describunt areas temporibus proportionales. Nam tempora quibus describuntur aræ quævis similes s p q, C P Q, et s p v, C P V, sunt semper in datâ ratione, nimirum, subduplicatâ distantiarum similium s p, C P (ex Dem.) et proinde tempus quo describitur area s p q, est ad tempus quo describitur area s p v, ut tempus quo describitur area C P Q, ad tempus quo describitur area C P V; sed (per Prop. 1.) tempora quibus describuntur aræ s p q, s p v, sunt arcis illis adeoque et arcis similibus C P Q, C P V proportionalia, ergo aræ C P Q, C P V sunt ut tempora quibus describuntur; et quo-

niam aræ quas corpora S, P circum centrum gravitatis describunt similes sunt aræ quas iidem temporibus describunt circum se mutuò, erunt quoque aræ istæ proportionales temporibus quibus describuntur.

^(f) Nam si descriptæ ellipses, &c. Axis principalis ellipsium æqualium, quas corpora S, P circum se mutuò describunt (ut ad Prop. 57 exposuimus) æqualis est axi principali ellipseos, p q v, quam corpus p vel P, circa corpus s vel S, reverâ immotum describit (ut in Prop. 58.) Hic axis dicatur A, tempus periodicum quod in ellipsis quatuor quas corpora S, P circum C

riodica (per theorema superius) forent in subduplicatâ ratione corporis S ad summam corporum $S + P$. Minuatur in hâc ratione tempus periodicum in ellipsi posteriore, et tempora periodica evadent æqualia; ellipseos autem axis principalis (per Prop. XV.) minuetur in ratione, cujus hæc est sesquuplicata, id est in ratione, cujus ratio S ad $S + P$ est triplicata, ideoque erit ad axem principalem ellipseos alterius, ut primum duorum mediè proportionalium inter $S + P$ et S ad $S + P$. Et inversè, axis principalis ellipseos circa corpus mobile descriptæ erit ad axem principalem descriptæ circa immobile, ut $S + P$ ad primum duorum mediè proportionalium inter $S + P$ et S. Q. e. d.

PROPOSITIO LXI. THEOREMA XXIV.

Si corpora duo viribus quibusvis se mutuo trahentia, neque alias agitata vel impedita, quomodocunque moveantur, motus eorum perinde se habebunt, ac si non traherent se mutuò, sed utrumque a corpore tertio in communi gravitatis centro constituto viribus iisdem traheretur: Et virium trahentium eadem erit lex respectu distantiae corporum a centro illo communi atque respectu distantiae totius inter corpora.

Nam vires illæ, quibus corpora se mutuo trahunt, tendendo ad corpora, ^(*) tendunt ad commune gravitatis centrum intermedium; ideoque eadem sunt, ac si a corpore intermedio manarent. Q. e. d.

Et quoniam datur ratio distantiae corporis utriusvis a centro illo communi ad distantiam inter corpora, dabitur ratio cujusvis potestatis distantiae unius ad eandem potestatem distantiae alterius; ut ratio quantitatis cujusvis, quæ ex unâ distantia et quantitibus datis utcunque derivatur ad quantitatem aliam, quæ ex alterâ distantia, et quantitibus totidem datis, datamque illam distantiarum rationem ad priores habentibus similiter derivatur. Proinde si vis, quâ corpus unum ab altero trahitur, sit di-

et circum se mutuò describunt (ut in Prop. 57.) idem est, dicatur t, tempus periodicum in ellipsi p q v, quam corpus p, vel P, circa corpus S, vel s, reverâ immotum (ut in Prop. 58.) describit dicatur T, sitque X axis principalis ellipseos quam corpus idem P, vel p, circa alterum S vel s reverâ immotum (ut in Prop. 58.) describere posset tempore periodico t, erit (per Prop. 59.) $T^2 : t^2 = S + P : S$. et (per Prop. 15.) $T^2 : t^2 = A^3 : X^3$, quare $A^3 : X^3 = S + P : S$. Jam si capiantur duæ quantitates B,

C mediæ proportionales inter $S + P$ et S, erit $S + P$ ad S in ratione triplicatâ $S + P$, ad B, hoc est $S + P : S = (S + P)^3 : B^3$, ac proinde $A^3 : X^3 = (S + P)^3 : B^3$, ideoque $A : X = S + P : B$. Q. e. d.

^(*) * Tendunt ad commune gravitatis centrum, est enim communis intersectio omnium rectarum quæ corpora revolvantia jungunt, et secundum quas, vires quibus corpora se mutuò trahunt, diriguntur.

rectè vel inversè ut distantia corporum ab invicem; vel ut quælibet hujus distantiae potestas; vel denique ut quantitas quævis ex hac distantia et quantitativis datis quomodocunque derivata: erit eadem vis, quâ corpus idem ad commune gravitatis centrum trahitur, directè itidem vel inversè ut corporis attracti distantia a centro illo communi, vel ut eadem distantiae hujus potestas, vel denique ut quantitas ex hac distantia et analogis quantitativis datis similiter derivata. ^(h) Hoc est, vis trahentis eadem erit lex respectu distantiae utriusque. Q. e. d.

PROPOSITIO LXII. PROBLEMA XXXVIII.

Corporum duorum, quæ viribus quadrato distantiae suæ reciproce proportionabilibus se mutuo trahunt, ac de locis datis demittuntur, determinare motus.

Corpora (per theorema novissimum) perinde movebuntur, ac si a corpore tertio in communi gravitatis centro constituto traherentur; et centrum illud ipso motus initio quiescet per hypothesin; et propterea (per legem Corol. 4.) semper quiescet. Determinandi sunt igitur motus corporum (per Prop. XXV.) perinde ac si a viribus ad centrum illud tendentibus urgerentur, et habebuntur motus corporum se mutuo trahentium. Q. e. i.

PROPOSITIO LXIII. PROBLEMA XXXIX.

Corporum duorum quæ viribus quadrato distantiae suæ reciproce proportionabilibus se mutuo trahunt, deque locis datis, secundum datas rectas, datis cum velocitatibus exeunt, determinare motus.

⁽ⁱ⁾ Ex datis corporum motibus sub initio, datur uniformis motus centri communis gravitatis, ut et motus spatii, quod unà cum hoc centro move-

^(h) * Hoc est, vis trahentis eadem erit lex, &c. Sit (in fig. Prop. 58.) $TQ = x$, $CQ = y$, et x ad y in ratione datâ a ad b , seu $x = \frac{a}{b}y$, vis quâ corpora S , P in locis T , Q se mutuo trahunt sit ut x^m , erit $x^m = \frac{a^m}{b^m}y^m$, adeoque eadem vis etiam ut y^m , ob datam rationem a^m ad b^m , cumque vis quâ corpora se mutuo trahunt æqualis sit vi quâ ad commune gravitatis centrum C urgentur, erit quoque vis ad C tendens ut y^m . Sit nunc vis quâ corpora se mutuo

trahunt ut $c x^n + e x^m$, et c , e quantitates datæ, erit $c x^n + e x^m = \frac{c a^n y^n}{b^n} + \frac{e a^m y^m}{b^m}$, ideoque vis ad C tendens ut $\frac{c a^n y^n}{b^n} + \frac{e a^m y^m}{b^m}$.

⁽ⁱ⁾ * Ex datis corporum motibus absolutis sub initio, datur uniformis motus absolutus centri communis gravitatis (67, 68, 69) et hinc datur motus spatii quod unà cum hoc centro et eadem cum illo celeritate moveretur uniformiter in directum, nec non corporum motus initiales respectu hujus spatii.

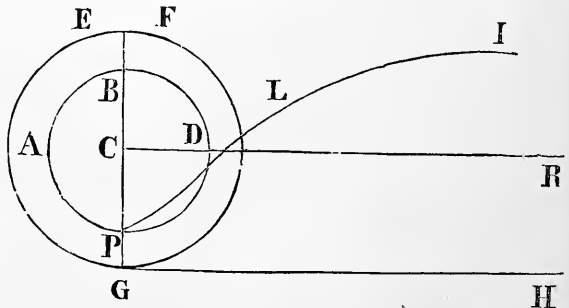
tur uniformiter in directum, nec non corporum motus initiales respectu hujus spatii. Motus autem subsequentes (per legum corollarium quintum, et theorema novissimum) perinde fiunt in hoc spatio, ac si spatium ipsum unâ cum communi illo gravitatis centro quiesceret, et corpora non traherent se mutuo, sed a corpore tertio sito in centro illo traherentur. Corporis igitur alterutrius in hoc spatio mobili, de loco dato secundum datam rectam, datâ cum velocitate exeuntis, et vi centripetâ ad centrum illud tendente correpti, ^(k) determinandus est motus per problema nonum et vicesimum sextum: et ^(l) habebitur simul motus corporis alterius circum idem centrum. ^(m) Cum hoc motu componendus est uniformis ille systematis spatii et corporum in eo gyrantium motus progressivus supra inventus, et habebitur motus absolutus corporum in spatio immobili. Q. e. i.

(k) * *Determinandus est motus per Probl. 9.* si corpora projiciantur secundum directionem quâ cum eorum distantia non coincidat, et per Probl. 26. si coincidat directio projectionis cum distantia corporum.

(l) * *Et habebitur simul motus corporis alterius e regione, si ex corpore cujus locus inventus est, per centrum gravitatis commune duorum, agatur recta quâ ita determinetur ut sit corpus cujus locus quaeritur ad corpus aliud ut distantia data hujus a centro gravitatis communi ad eam rectam, in extremo hujus rectæ erit locus corporis quaesitus (60).*

(m) 495. *Cum hoc motu componendus est, &c.* In hypothesi hujus problematis, corpora duo circa commune gravitatis centrum ceu umbilicum sectiones conicas describunt (per Cor. 2. Prop. 58.) et satis est (ex notâ superiori) unius corporis motum determinare. Itaque, exempli gratiâ, corpus P circulum P A B D uniformiter describat intereadem circuli centrum C, cum ipsius circuli plano æquabiliter movetur per rectam C R diametri P B perpendicularem, sitque semper circuli planum mobile in plano hujus schematis immoto. In linea C P capiatur C G ad C P in ratione velocitatis centri C per lineam C R progredientis, ad velocitatem corporis P in circuli peripheriâ revolventis, rota G E F centro C et radio C G descripta super regulam G H ad G C normalem progrediatur revolvens circa axem suum, et punctum P in plano circuli G E F immotum describet intereâ trochoidem P L I quæ

erit trajectoria quam corpus P motu absoluto describit; (ut patet ex Prop. 31. et not. 367). Hâc enim ratione centrum C percurrat spatium C R = G H = semiperipheria rotæ G E F, eodem tempore quo punctum P revolvitur per totam semiperipheriam P A B; eritque proinde velocitas centri C per lineam C R ad velocitatem puncti vel corporis P in peripheriâ circuli P A B ut semirota ad semicirculum, hoc est, ut radius C G ad radium C P. Hinc si velocitas centri C æqualis sit velocitati corporis P in circulo suo revolventis, trochois P L I erit cyclois vulgaris; si velocitas centri C major extiterit,

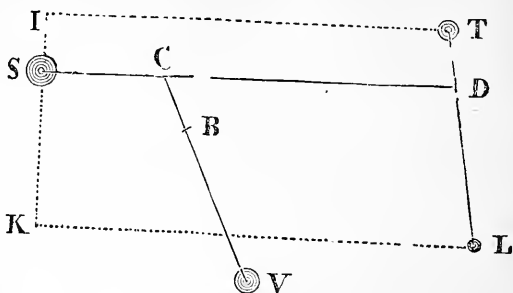


erit P L I trochois oblongata, si velocitas centri C minor, erit P L I trochois decurtata.

Sit nunc A P sectio quavis conica cujus vertex A, umbilicus seu virium et gravitatis commune centrum C, axis transversus A C, centrum C uniformiter moveatur in rectâ D R positione datâ, et cum illo planum curvæ A P C, itâ transferatur in plano hujus schematis immoto, ut axis A C, rectæ B D, positione datæ sit semper parallelus. Dum corpus P in curvâ A P revol-

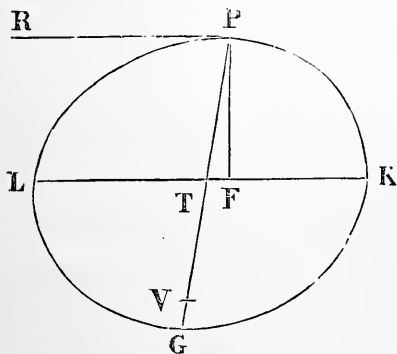
mun Theorematis 21.) ellipses centra habentes in D, quarum magnitudo (^a) ex Problemate V. innotescit.

Trahat jam corpus tertium S priora duo T et L viribus acceleratricibus S T, S L, et ab ipsis vicissim trahatur. Vis S T, (per legum Corol. 2.) resolvitur in vires S D, D T; et vis S L in vires S D, D L. Vires (^o) autem D T, D L, quæ sunt ut



ipsarum summa T L, atque ideo ut vires acceleratrices quibus corpora T et L se mutuo trahunt, additæ his viribus corporum T et L, prior priori et posterior posteriori, componunt vires distantis D T ac D L proportionales, ut prius, sed viribus prioribus majores; ideoque (per Corol. 1. Prop. X. et Corol. 1. et 8. Prop. IV.) efficiunt ut corpora illa describant ellipses ut prius, sed motu celeriore. Vires reliquæ acceleratrices S D et S D, (^p) actionibus motricibus S D \times T et S D \times L, quæ sunt ut corpora, trahendo corpora illa æqualiter et secundum lineas T I, L K,

(^a) 494. Ex Problemate V. innotescit. Si enim corpus aliquod de loco dato P exeat cum datâ velocitate et secundum datam directionem P R



ut ellipsim P L G K, circa centrum T datum describat, recta P R positione data ellipsim tanget in P, ideoque diameter L K, ipsi P R parallela (Prop. 32. Lib. I. Conic. Apoll. sive Lem. IV. de Conic. et Theor. I. de Ell.) dabitur positione. Præterea, si ex puncto P ad

diameter L K demittatur perpendicularum P F, erit vis centripeta data quâ corpus versus T urgetur secundum directionem P T ad partem vis illius quæ juxta directionem P F, agit, ut P T ad P F, proindeque pars illa vis centripetæ dabitur. Datâ autem vi centripetâ juxta directionem P F urgente, datâque corporis de loco P exeuntis velocitate in lineâ P R, ad P F perpendiculari, dabitur radius circuli ellipsim osculant in P, quam corpus P cum hac velocitate atque vi centripetâ potest describere (199.) et hinc dabitur altera diameter conjugata L K, et ellipsis describi poterit (vide Probl. de Ellipsi p. 98).

(^o) * Vires autem D T, D L, quæ sunt ut ipsarum summa T L, &c. Est enim D T ad T L in ratione datâ corporis L ad summam corporum T + L, et D L ad T L, in ratione datâ corporis T ad summam corporum T + L (60); quare vires D T, D L, in quâcumque positione corporum T et L, sunt ut T L.

(^p) * Actionibus motricibus S D \times T, et S D \times L (per def. 8. et not. 12.) quæ sunt ut corpora, trahendo corpora illa æqualiter ob æqualem vim acceleratricem S D, ut fit in corporibus gravibus, quæ licet massis inæqualia, vi tamen gravitatis acceleratrice, cadendo æqualiter accelerantur.

ipsi $D S$ parallelas, nil mutant situs eorum ad invicem, sed faciunt ut ipsa æqualiter accedant ad lineam $I K$; quam ductam concipe per medium corporis S , et lineæ $D S$ perpendicularem. Impediatur autem iste ad lineam $I K$ accessus ⁽⁴⁾ faciendo ut systema corporum T et L ex unâ parte, et corpus S ex alterâ, justis cum velocitatibus, gyrentur circa commune gravitatis centrum C . ^(r) Tali motu corpus S , eo quod summa virium motricium $S D \times T$ et $S D \times L$, distantiae $C S$ proportionalium, tendit versus centrum C , describit ellipsin circa idem C ; et punctum D , ob proportionales $C S$, $C D$, describet ellipsin consimilem e regione. Corpora autem T et L viribus motricibus $S D \times T$ et $S D \times L$, prius priore, posterius posteriore, æqualiter et secundum lineas parallelas $T I$ et $L K$, ut dictum est, attracta, pergunt (per legum Corollarium quintum et sextum) circa centrum mobile D ellipses suas describere, ut prius. Q. e. i.

Addatur jam corpus quartum V , et ^(s) simili argumento concludetur hoc et punctum C ellipses circa omnium commune centrum gravitatis B describere; manentibus motibus priorum corporum T , L et S circa centra D et C , sed acceleratis. Et eâdem methodo corpora plura adjungere libebit. Q. e. i.

^(t) Hæc ita se habent, etsi corpora T et L trahunt se mutuo viribus acceleratricibus majoribus vel minoribus quam quibus trahunt corpora reliqua pro ratione distantiarum. Sunt mutuae omnium attractiones acceleratrices ad invicem ut distantiae ductæ in corpora trahentia, et ^(u) ex præcedentibus facillè deducetur quod corpora omnia æqualibus temporibus periodicis ellipses varias, circa omnium commune gravitatis centrum B , in plano immobili describunt. Q. e. i.

⁽⁴⁾ * *Faciendo ut systema corporum T , et L , (seu D centrum gravitatis commune ipsorum) ex unâ parte, et corpus S ex alterâ, justis cum velocitatibus in dato plano secundum directiones parallelas et contrarias impressis gyrentur circa C commune gravitatis centrum trium corporum.*

^(r) * *Tali motu corpus S , &c.* Corpus S a corporibus T et L trahitur viribus quæ sunt inter se ut $S T \times T$ et $S L \times L$ (ex hyp.) et per resolutionem virium corpus S a corporibus T et L versus D et C juxta directionem $S D$ seu $S C$ trahitur viribus quæ sunt inter se ut $S D \times T$ et $S D \times L$, hoc est, vi quæ est ut $S D \times T + L$, adeoque ut $S D$, ob datam corporum summam $T + L$, et ut $C S$, ob datam rationem $S D$ ad $C S$, (61). Corpus idem S juxta directiones oppositas ipsis $D T$, $D L$ parallelas, trahitur viribus quæ sunt inter se ut $D T \times T$ et $D L \times L$, hoc est, viribus æqualibus (60) quæ proindè nullam mutationem producant. Quare cum sys-

tema corporum T et L , seu ipsorum commune centrum gravitatis D , versus S seu C trahatur quoque vi quæ est ut $S D$, ac proindè ut $C D$ (61), patet quod corpus S , ex unâ parte, et punctum D ex alterâ describant circum C ellipses consimiles, si justis cum velocitatibus, ut supra dictum est, projiciantur.

^(s) * *Simili argumento*, considerando corpora T et L tanquam corpus unicum in centro D positum, concludetur, &c.

^(t) * *Hæc ita se habent.* Nam propositionis demonstratio non supponit vires acceleratrices quibus corpora T et L ad distantiam datam trahunt corpus S , esse æquales viribus acceleratricibus quibus se mutuò ad eandem distantiam trahunt. Undè manet demonstratio, etsi corpus S a corpore v. gr. T ad distantiam datam trahatur majori vel minori vi acceleratrice quam corpus L ad eandem distantiam.

^(u) * *Et ex præcedentibus facillè deducetur.*

PROPOSITIO LXV. THEOREMA XXV.

Corpora plura, quorum vires decrescunt in duplicatâ ratione distantiarum ab eorundem centris, moveri posse int' se in ellipsis; et radiis ad umbilicos ductis areas describere temporibus proportionales quam proximè.

In propositione superiore demonstratus est casus ubi motus plures peregrantur in ellipsis accuratè. Quo magis recedit lex virium a lege ibi positâ, eo maioris corpora perturbabunt mutuos motus; neque fieri potest, ut corpora, secundum legem hic positam se mutuo trahentia, moveantur in ellipsis accuratè, nisi servando certam proportionem distantiarum ab invicem. In sequentibus autem casibus non multum ab ellipsis errabitur.

Cas. 1. Pone corpora plura minora circâ maximum aliquod ad varias ab eo distantias revolvi, tendantque ad singula vires absolutæ proportionales iisdem corporibus. Et quoniam omnium commune gravitatis centrum (per legem Corol. quartum) vel quiescit vel movetur uniformiter in directum, fin autem us corpora minora tam parva esse, ut corpus maximum nunquam distet sensibiliter ab hoc centro: et maximum illud vel quiescet, vel movebitur uniformiter in directum, sine errore sensibili; minora autem revolvuntur circa hoc maximum in ellipsis, atque radiis ad idem ductis describent areas temporibus proportionales; ^(y) nisi quatenus errores inducuntur, vel per errorem maximi a communi illo gravitatis centro, vel per actiones minorum corporum in se mutuo. Diminui autem possunt corpora minora usque donec error iste, et ^(z) actiones mutuae sint datis quibusvis minores; atque ideo donec orbes cum ellipsis quadrent,

Vis enim seu actio acceleratrix, quâ corpus T versus D trahitur, est (ex Dem. et Hyp.) ut $T L \times L + T D \times S$, hoc est, ut $T D \times \frac{S + T + L}{L}$, ob $T L \times L = T D \times \frac{T + L}{L}$ (60); et vis acceleratrix quâ punctum D versus C trahitur, est (ex Dem. et Hyp.) ut $S D \times S$, hoc est ut $C S \times S + C D \times S$; sed (61) $C S \times S = C D \times \frac{T + L}{L}$, adeoque vis acceleratrix quâ punctum D versus C trahitur, est ut $C D \times \frac{T + L + S}{L}$. Quare vis acceleratrix quâ corpus T versus D trahitur, est ad vim acceleratricem quâ punctum D trahitur versus C, ut $T D$ ad $C D$, hoc est ut distantie a punctis ad quæ illæ vires diriguntur. Corpus igitur T ad punctum D, et punctum D ad C trahuntur viribus absolutis æqualibus, hoc est, eodem modo ad sua respectivè centra D et C trahuntur quo traherentur, si circâ idem virium centrum ad

distantias T D, D C revolverentur, sed in hoc casu æqualibus temporibus periodicis ellipses suas describerent (per Cor. 2. Prop. X.) ergo et in illo casu corpus T circâ D et punctum D circâ C, æqualibus temporibus periodicis suas ellipses describunt. Idem eodem modo demonstratur, cum plura sunt corpora revolvantia.

^(y) * Nisi quatenus errores inducuntur, &c. Nam si corpus maximum a communi illo gravitatis centro non erraret, nullaque esset actio minorum corporum in se mutuo, quodlibet exiguum corpus revolveretur in ellipsi circâ maximum, atque radiis ad idem ductis describeret areas temporibus proportionales (per Cor. 2. et 3. Prop. 58.)

^(z) * Et actiones mutuae sint datis quibusvis minores respectu actionis corporis maximi in corpora minora; nam cum corporis vis attractiva ab

et areæ respondeant temporibus, sine errore, qui non sit minor quovis dato. Q. e. o.

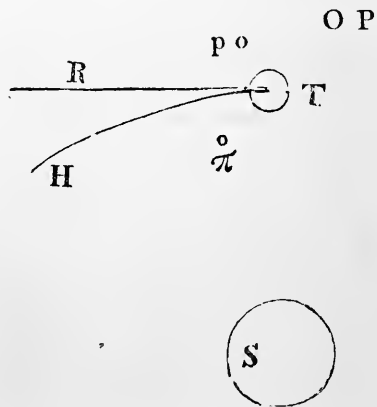
Cas. 2. ^(a) Fingamus jam systema corporum minorum modo jam descripto circa maximum revolvendum, aliudve quodvis duorum circum se mutuò revolvendum corporum systema progredi uniformiter in directum, et interea vi corporis alterius longè maximi et ad magnam distantiam siti urgeri ad latus. Et quoniam æquales vires acceleratrices, quibus corpora secundum lineas parallelas urgentur, non mutant situs corporum ad invicem, sed ut systema totum, servatis partium motibus inter se, simul transferatur, efficiunt: manifestum est quod, ex attractionibus in corpus maximum, nulla prorsus orietur mutatio motus attractorum inter se, nisi vel ex attractionum acceleratricum inæqualitate, vel ex inclinatione linearum ad invicem: secundum quas attractiones fiunt. Pone ergo attractiones omnes acceleratrices in corpus maximum esse inter se reciprocè ut quadrata distantiarum; et augendo corporis maximi distantiam, donec rectarum ab hoc ad reliqua ductarum differentiæ respectu earum longitudinis et inclinationes ad invicem minores sint, quam datæ quævis; perseverabunt motus partium systematis inter se sine erroribus, qui non sint quibusvis datis minores. Et quoniam, ob exiguam partium illarum ab invicem distantiam, systema totum ad modum corporis unius attrahitur; movebitur idem hâc attractione ad modum corporis unius; hoc est, ^(b) centro suo gravitatis describet circa corpus maximum sectionem aliquam conicam (viz. ^(c) Hyperbolam vel parabolam attractione languidâ, ellipsin fortiore) et radio ad maximum ducto describet areas temporibus proportionales, sine ullis erroribus, nisi quas partium distantiae, perexiguæ sane et pro lubitu minuendæ, valeant efficere. Q. e. o.

soluta hic supponatur materiæ proportionalis, diminutâ corporis massâ, vis attractiva in eâdem ratione minuitur.

^(a) * Fingamus jam corporum minorum, P, p, π , modo jam descripto circa maximum T revolvendum systema progredi uniformiter in directum, seu totius systematis commune gravitatis centrum T, progredi uniformiter per rectam TR, et interea vi corporis alterius longè maximi S, et ad magnam distantiam siti, urgeri ad latus secundum rectas PS, p s, π S, TS, atque a rectâ TR retrahi et in curvam TH cogi, &c.

^(b) * Hoc est, centro suo gravitatis, in quo totum systema gravium P, p, π , T, unitum ac contractum intelligitur (71).

^(c) * Hyperbolam vel parabolam attractione languidâ, ellipsim vel circulum fortiore; manente enim velocitate corporis circa centrum virium S projecti, et circulum vel ellipsim describentis minui debet illius ad centrum S attractio, ut ad



Simili argumento pergere licet ad casus magis compositos in infinitum.

Corol. 1. ^(d) In casu secundo, quo propius accedit corpus omnium maximum ad systema duorum vel plurium, eo magis turbabuntur motus partium systematis inter se; propterea quod linearum a corpore maximo ad has ductarum jam major est inclinatio ad invicem, majorque proportionis inæqualitas.

Corol. 2. Maximè autem turbabuntur, ponendo quod attractiones acceleratrices partium systematis, versus corpus omnium maximum, ^(e) non sint ad invicem reciproçè ut quadrata distantiarum a corpore illo maximo; ^(f) præsertim si proportionis hujus inæqualitas major sit quam inæqualitas proportionis distantiarum a corpore maximo. Nam si vis acceleratrix, æqualiter et secundum lineas parallelas agendo, perturbat motus inter se, necesse est, ut ex actionis inæqualitate perturbatio oriatur, majorque sit, vel minor pro majore, vel minore inæqualitate. Excessus impulsuum majorum, agendo in aliqua corpora et non agendo in alia, necessariò mutabunt situm eorum inter se. Et hæc perturbatio, addita perturbationi, quæ ex linearum inclinatione et inæqualitate oritur, majorem reddet perturbationem totam.

Corol. 3. Unde si systematis hujus partes in ellipsis, vel circulis sine perturbatione insigni moveantur; manifestum est, quod eadem a viribus acceleratricibus, ad alia corpora tendentibus, aut non urgentur nisi levisimè, aut urgentur æqualiter, et secundum lineas parallelas quamproximè.

PROPOSITIO LXVI. THEOREMA XXVI.

Si corpora tria, quorum vires decrescunt in duplicatâ ratione distantiarum, se mutuo trahunt; et attractiones acceleratrices binorum quorumcunque in tertium sint inter se reciproçè ut quadrata distantiarum; minora autem circa maximum revolvantur: dico quod interius circa intimum et maximum, radiis ad ipsum ductis, describet areas temporibus magis proportionales, et

eandem distantiam possit parabolam describere, et magis adhuc decrescere illam attractionem oportet, ut describat hyperbolam (per Cor. 7. Prop. 16. et Dem. Prop. 17.)

^(d) * In casu 2^o. quo propius accedit corpus omnium maximum ad systema duorum vel plurium corporum, eò magis recedit a casu ubi perturbatio est nulla, nempe quando corpus S infinîtè distat, ergò eò magis turbabuntur motus partium systematis inter se.

^(e) * Non sint ad invicem reciproçè, &c. Exempli causâ; Si corpora P, p, diversis legibus

traherentur, P, v. gr. in ratione reciproçâ quadrati distantiae suæ a corpore maximo S; p verò in ratione cubi distantiae.

^(f) * Præsertim si proportionis hujus inæqualitas, &c. Exempli causâ, si inæqualitas attractionum acceleratricum in corporibus P, p, major sit inæqualitate distantiarum S P, S p; Nam si illæ inæqualitates attractionum et distantiarum essent in datâ ratione, evanescente distantiarum S P, S p differentiâ, quando corpus maximum S longissimè distat, evanesceret quoque attractionum acceleratricum inæqualitas.

(per legum Corol. VI.) ac si hæ attractiones tollerentur. Et pari ratione si attractio $S N$ minor esset attractione $S M$, tolleret ipsa attractionis $S M$ partem $S N$, et maneret pars sola $M N$, quâ temporum et arearum proportionalitas et orbitæ forma illa elliptica perturbaretur. Et similiter si attractio $S N$ major esset attractione $S M$, oriretur ex differentiâ solâ $M N$ perturbatio proportionalitatis et orbitæ. Sic per attractionem $S N$ reducitur semper attractio tertia superior $S M$ ad attractionem $M N$, attractione primâ et secundâ manentibus prorsus immutatis: et propterea areæ ac tempora ad proportionalitatem, et orbita $P A B$ ad formam præfatam ellipticam tum maxime accedunt, ubi attractio $M N$ vel nulla est, vel quam fieri possit minima; hoc est, ubi corporum P et T attractiones acceleratrices, factæ versùs corpus S , accedunt quantum fieri potest ad æqualitatem; id est, ubi attractio $S N$ non est nulla, neque minor minimâ attractionum omnium $S M$, sed inter attractionum omnium $S M$ maximam et minimam quasi mediocris; hoc est, non multo major neque multo minor attractione $S K$. Q. e. d.

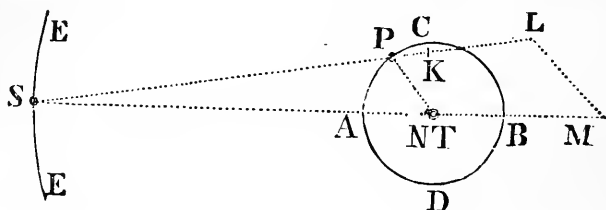
Cas. 2. (*) Revolvantur jam corpora minora P , S circa maximum T in planis diversis; et vis $L M$, agendo secundum lineam $P T$ in plano orbitæ $P A B$ sitam, eundem habebit effectum, ac prius, neque corpus P de plano orbitæ suæ deturbabit. (†) At vis altera $N M$, agendo secundum lineam quæ ipsi $S T$ parallela est (atque ideo, quando corpus S versatur extra lineam nodorum, inclinatur ad planum orbitæ $P A B$) præter perturbationem motus in longitudinem jam ante expositam, induce perturbationem motus in latitudinem, trahendo corpus P de plano suæ orbitæ. Et hæc perturbatio, in dato quovis corporum P et T ad invicem situ, erit ut vis illa generans $M N$, ideoque minima evadet ubi $M N$ est minima, hoc est (uti jam exposui) ubi attractio $S N$ non est multo major, neque multo minor attractione $S K$. Q. e. d.

(*) 497. Cas. 2. Planum $T E S E$ cum huius schematis plano congruere supponatur, orbitæ verò $P A B$ planum alterâ sui parte, v. gr. $C A D$ suprâ planum $T E S E$ eminere, et alterâ parte $D B C$ infrâ planum $T E S E$ deprimi intelligatur, linea recta $D C$ communis planorum $T E S E$ et $P A B$ intersectio, linea nodorum dicitur, et illius extrema puncta D et C nodi appellantur. Nodi vel puncta quavis D , C dicuntur esse in quadraturis seu aspectum quadratum obtinere respectu corporis S , dum sunt in lineâ rectâ ad $S I$ in puncto T perpendiculari, quod in hoc casu corpus S et punctum C vel D sub angulo recto de loco I v. deantur. Si super lineâ $S T$ erectum intelligatur planum plano $T E S E$ verticale, sintque puncta A et B in illo plano verticali, A quidem inter corpora

S et T ; B verò ultrâ T , punctum A dicitur esse in conjunctione, et punctum B in oppositione respectu corporum S et T ; et loca A et B , communi nomine syzigia vocantur. Motus in longitudinem est quo corpus revolvens P a puncto suæ orbitæ dato, v. gr. a puncto C recedit per $C P A D B$: motus in latitudinem est is quo corpus revolvens P ad planum in motum $T E S E$ accedit vel ab eo recedit. Si corporum revolvantium P et S motus inter se conferantur, et utrumque in eandem plagam feratur, v. gr. ab occidente in orientem, motus in consequentia fieri dicitur; si verò alterum in unam plagam, alterum in alteram moveatur, motus unius in consequentia alterius vocatur in antecedentia, v. gr. motus ab oriente in occidentem in antecedentia fieri dicitur.

(†) * At vis altera $N M$, &c. Si orbitæ

Corol. 1. (ⁿ) Ex his facile colligitur, quod, si corpora plura minora P, S, R, &c. revolvantur circa maximum T, motus corporis intimi P minimè perturbabitur attractionibus exteriorum, ubi corpus maximum T pariter a cæteris, pro ratione virium acceleratricum, attrahitur et agitur, atque a cætera se mutuo.



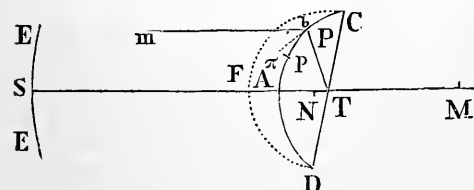
Corol. 2. In systemate vero trium corporum T, P, S, si attractiones acceleratrices binorum quorumcunque in tertium sint ad invicem reciproce ut quadrata distantiarum; corpus P, radio P T, aream circa corpus T velocius describet prope conjunctionem A et oppositionem B, quam prope quadraturas C, D. Namque vis omnis qua corpus P urgetur et corpus T non urgetur, quæque non agit secundum lineam P T accelerat vel retardat descriptionem areæ, perinde ut ipsa in consequentia vel in antecedentia dirigatur. (^o) Talis est vis N M. Hæc in transitu corporis

P A B (vid. fig. Newt.) pars A C B supra planum T E S E elevata, pars verò altera A D B infra ipsum depressa intelligatur, ita ut linea nodorum A B coincidat cum lineâ T S sitque proinde corpus S in lineâ nodorum productâ, vis N M ut potè quæ in corpus P agit secundum lineam ipsi T S parallelam, jacebit in plano orbitæ P A B, et motum corporis P in latitudinem non perturbabit, hoc est, non efficiet ut corpus

et parallela N M, p locus ad quem corpus P exclusâ vi N M tempusculo minimo perveniret, b locus in lineâ P m ad quem corpus idem P, solâ vi N M, eodem tempusculo traheretur; corpus illud P duabus viribus impulsu, quarum altera agit secundum directionem P p in plano C A D altera secundum directionem P m ad planum C A D inclinatum, motu composito describet lineam P π quæ non est in plano C A D.

(ⁿ) • *Corollarium primum* patet ex demonstratis cum duo tantum sunt corpora minora P, S; addatur enim tertium corpus R, eodem modo demonstrabitur motum corporis intimi P minimè perturbari attractione ipsius R, ubi corpus maximum T pariter attrahitur a corpore illo R, ac corpus P, et ita de pluribus corporibus ratiocinari licet. Quare ex demonstratis facile colligitur quod si, &c.

(^o) 498. *Talis est vis N M.* Si supponamus orbem C A D B (vid. fig. Newt.) esse circulo finitum, et distantiam S D maximam respectu radii P T, erit ferè S C = S K = S T = S N, et proinde N M = T M. Porro corpore P in quadraturis C, D versante, est S C = S P = S K; quare cum sit, (per constr. Prop. 66.) S L : S K = S K² : S P², erit in



P ad planum T E S E magis accedat aut ab eo recedat. Verùm si corpus S versatur extrâ lineam nodorum, vis N M inducet perturbationem motûs in latitudinem. Sit enim C A D T pars orbitæ quam corpus P exclusâ vi N M describeret supra planum T E S E seu C F D emineas, sit C D linea nodorum, P m recta æqualis

P a C ad A tendit in consequentia, motumque accelerat; dein usque ad D in antecedentia, et motum retardat; tum in consequentia usque ad B, et ultimo in antecedentia transeundo a B ad C.

Corol. 3. Et eodem argumento patet quod corpus P, cæteris paribus, velocius movetur in conjunctione et oppositione quam in quadraturis.

Corol. 4. Orbita corporis P, cæteris paribus, curvior est in quadraturis, quam in conjunctione et oppositione. Nam corpora velociora minus deflectunt a recto tramite. Et ^(P) præterea vis K L, vel N M, in conjunctione et oppositione contraria est vi, quâ corpus T trahit corpus P; ideoque vim illam minuit; corpus autem P minus deflectet a recto tramite ubi minus urgetur in corpus T.

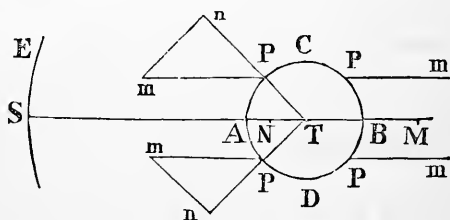
Corol. 5. ^(q) Unde corpus P, cæteris paribus, longius recedet a corpore

quadraturis $SL = SK = SC$, et LM coincidit cum CT seu PT , adeoque evanescit TM seu NM . Nulla igitur erit virium SM, SN , in quadraturis differentia, et ideò corpus P reliquis viribus ad centrum T tendentibus agitatum, radio vectore areas ibi describit temporibus proportionales. E/
At ubi corpus P extrà quadratas est in hemispheriâ CAD , vis SM major est vi SN et corpus P virium differentia NM trahitur secundùm directionem ipsi TP parallelam. S—

Sit P m æqualis et parallela ipsi $N M$, et demisso ex m in radium $T P$ productum perpendiculo $p n$, vis $P m$, seu $N m$, in duas vires $P n$, $n m$ resolvitur, quarum altera $P n$ trahendo secundum directionem radii $T P$, corporis P motum in longitudinem nihil mutat, nec æquabilem arearum descriptionem turbat; altera verò $n m$, trahendo secundum directionem $n m$, radio $T P$ perpendicularem, hoc est, secundum directionem tangentis in P , motum in longitudinem accelerat in primo quadrante $C A$ retardat in secundo quadrante $A D$.

In alterâ hemiperipheriâ D B C, vis S M minor est vis S N, quoniam corpus P a corpore S longius distat quam corpus T, unde si vires perturbantes ad solum corpus P referantur, virium S M, S N differentia N M negativa seu ablativa erit, aut quod idem est, contrariâ directione aget; Fingatur enim corpora T et P urgeri ambo vis S N ubique æquali et sibi parallela, pergunt moveri inter se quasi omnino abesset illa vis per Cor. 6. Legum motûs, tum trahatur corpus P vi N M secundum directionem oppositam vi S N, ex eâ actione mutabuntur motus corporum T et P inter se, sed etiam ex eâ actione vis S N quæ trahere corpus P fingebatur, reductur ad vim S M quæ est vis verè agens dum vis S N agit in T, ergo si æstimentur motus corporum T et P inter se, quasi corpus P in hemiperiphe-

riâ D B C urgeretur virium differentia N M in contrariam partem agente, obtinebuntur veræ mutationes motuum corporum T et P inter sc,

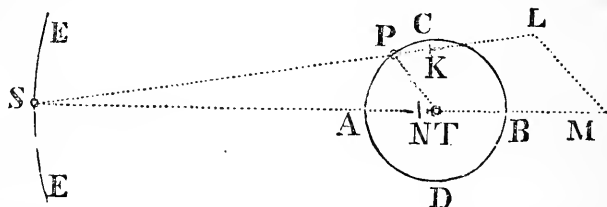


ex actionibus $S N$ et $S M$ ortæ, ideoque in pos-
terum consideratur corpus P in hemispheriâ
 $D B C$ quasi urgeretur vi $N M$ secundum di-
rectionem $P m$ ipsi $N M$ parallelam a P versum
 m agente; atque ideo, si vis P in duâ vires,
ut in alterâ hemispheriâ factum est, resolu-
atur, manifestum erit motum in longitudinem in
quadrante $D B$ accelerari et in quadrante $B C$
retardari.

(P*) 499. *Et præterea vis K L, &c. Iisdem*
positis quæ in notâ superiori, rectæ S L, S M
sunt fere parallelæ, ac proinde T M = P L et
L M = P T quam proximè; quare coincident
P cum A et K cum T, fit L M = A T =
P K, et N M seu T M = P L = A T +
K L, et N M – L M = K L, hoc est, vis
tota perturbans quâ corpus P in conjunctione A
a corpore T versus S retrahitur, est ut K L
quam proximè; vi enim L M trahitur P versus
T et vi N M a corpore T versus S retrahitur.
Idem eodem modo demonstratur, corpore P in
oppositione Bposito.

(^q) * Unde corpus P, &c. Nam cum orbita corporis P curvior sit in quadraturis C vel D quam in syzigiis A et B (per Cor. 4.) necesse est, cæteris paribus, ut in syzigiis A et B depre-

T in quadraturis, quam in conjunctione et oppositione. Hæc ita se habent excluso motu excentricitatis. Nam si orbita corporis P excentrica sit, excentricitas ejus (ut mox in hujus Corol. 9. ostendetur) evadet maxima ubi apsides sunt in syzygiis; indeque fieri potest ut corpus P, ad apsidem summam appellens, absit longius a corpore T in syzygiis quam in quadraturis.



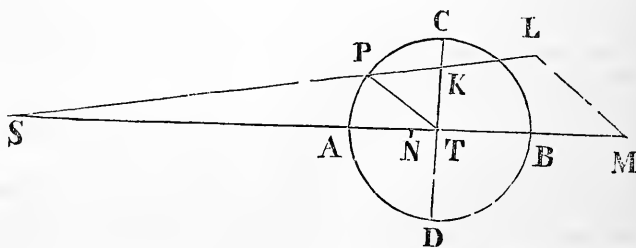
Corol. 6. Quoniam vis centripeta corporis centralis T, quâ corpus P retinetur in orbe suo, augetur in quadraturis per additionem vis LM, ac diminuitur in syzygiis per ablationem vis KL, et (*) ob magnitudinem vis KL, magis diminuitur quam augetur; est autem vis illa vi centripeta

sior sit quam in quadraturis C et D ad instar ellipseos cujus sit centrum T axis major C D axis minor A B. Hæc ita se habent, si, exclusis viribus perturbantibus, orbita corporis P fuerit circulus cujus centrum T.

(*) 500. Et ob magnitudinem vis KL, &c. Si distantia mediocris SK vel ST ingens fuerit respectu radii TP orbitæ PAB, in loco quovis corporis P, erit vis LM quam proximè ad vim NM ut sinus totus ad sinum, triplum distantie angularis corporis P a quadraturâ proximâ. Nam ob ingentem distantiam corporis S (ex hyp.) lineæ SL, SM sunt ferè parallelæ ac proinde LM = PT, NM seu TM = PL, et SP = SK; cumque sit ST ad lineam quadraturarum CD perpendicularis, erit etiam SK ad eandem normalis, et existente PT radio, erit PK sinus anguli PTC, hoc est, sinus distantie angularis corporis P a quadraturâ proximâ C. Porro (per Prop. 66.) SL : SK = SK² : SP², adeoque SL - SK : SK = SK² - SP² : SP²; hoc est, KL : SK = PK × SK + SP : SP² = PK × 2 SP : SP² = 2 PK : SP = 2 PK : SK, ob SK = SP, et SK + SP = 2 SP.

Quarè erit KL = 2 PK, et PL seu NM = 5 PK, hoc est, vis LM seu PT ad vim NM seu PL ut sinus totus PT ad 5 PK triplum sinum distantie angularis corporis P a quadraturâ proximâ.

501. Corol. Vis KL in conjunctione A, est ad vim similem in oppositione B, ut AT ad



TB, et si orbita PAB circularis fuerit vel circulo finitima, erit vis KL in syzygiis duplo major vi LM in quadraturis quam proximè. Nem corpore P in syzygiis versante, fit PK = AT = PT = LM, et proinde NM seu PL fit = 3 LM, et KL = 2 LM. Tandem iisdem positus, vis NM maxima est in syzygiis, quoniam ibi PK fit maxima seu evadit = AT, et NM = 3 AT.

Unde ob magnitudinem vis KL (500. 501.) vis centripeta corporis centralis T magis diminuitur quam augetur, ideoque censenda est pro absolute diminutâ ab actione corporis S.

(per Corol. 2. Prop. IV.) in ratione compositâ ex ratione simplici radii T P directè et ratione duplicatâ temporis periodici inversè: patet hanc rationem compositam diminui per actionem vis K L; ideoque tempus periodicum, si maneat orbis radius T P, augeri, idque in subduplicatâ ratione, quâ vis illa centripeta diminuitur: auctoque ideo vel diminuto hoc radio, tempus periodicum augeri magis, vel diminui minus quam in radii hujus ratione sesquiplicatâ, (per Corol. VI. Prop. IV.) Si vis illa corporis centralis paulatim languesceret, corpus P minus semper et minus attraheretur perpetuò recederet longius a centro T; et contra, si vis illa augeretur, accederet propius. Ergo si actio corporis longinqui S, quâ vis illa diminuitur, ^(s) augeatur ac diminuatur per vices: augebitur simul ac diminuetur radius T P per vices; et ^(t) tempus periodicum augebitur ac

(*) * *Augeatur ac diminuatur per vices.* Quoniam vis quâ corpus P trahitur a corpore T, est ejusdem corporis P vis centripeta quâ in orbitâ suâ retinetur; si remissor fuerit vis illa, corpus P minus attractum a centro T longius recederet; et contrâ, si augeatur vis illa, corpus P ad T propius accedet. Auctâ igitur actione corporis S in T per accessum corporis T ad S, augeatur vis N M minuiturque vis centripeta corporis P, ac proindè crescit distantia P T. E contrâ autem decrescente corporis S actione per recessum corporis T ab S decrescit quoque N M et augeatur corporis P vis centripeta, minorque fit distantia P T. Hæc omnia per vices contingunt, ubi nempe corpus T corpori S proximius fuerit, augebitur radius P T, ubi verò remotius evadet minuetur radius.

(†) * *Et tempus periodicum augebitur ac diminuetur, &c.* Corpus P circa T, exclusâ corporis longinqui S vi ablatitiâ, in circulo P A D revolvatur, et accedente vi illâ ablatitiâ corporis S quæ, ob ingentem distantiam S T, parva admodum sit respectu vis quâ corpus P a corpore T trahitur, idem corpus P in orbe ferè circulari adhuc revolvatur. Jam verò corporis circulum vel orbem circulo finitimum describentis vis acceleratrix versus T directa est semper (per Cor. 2. Prop. 4.) in ratione compositâ ex ratione simplici radii T P qui dicatur R directè et ratione duplicatâ temporis periodici, quod dicatur t inversè, hoc est, vis acceleratrix corporis P versus T, est ut $\frac{R}{t^2}$, et manente radio ut $\frac{1}{t^2}$; sed vis acceleratrix in distantia datâ est ut vis absoluta corporis trahentis, ergo si corporis T trahentis vis absoluta dicatur V, erit V ut $\frac{1}{t^2}$ et t² ut $\frac{1}{V}$,

ac t ut $\frac{1}{\sqrt{V}}$ manente radio T P seu R. Porro vis acceleratrix quâ corpus P versus T trahitur, exclusâ vi ablatitiâ corporis S, est reciproce ut quadratum distantie T P, hoc est directè ut

$\frac{1}{R^2}$ (ex hyp.) Et quoniam vis ablatitiâ corporis S, exigua admodum est respectu vis acceleratricis quâ corpus P a corpore T trahitur, accedente vi illâ ablatitiâ, vis reliqua acceleratrix in corpore P erit adhuc ut $\frac{1}{R^2}$ quam proximè; quare eadem manente reliquâ vi centripetâ absolutâ corporis T et mutato utcumque radio R, quadratum temporis periodici t² erit ut distantie cubus R³. ac proindè t ut $\sqrt{R^3}$. (per Corol. 6. Prop. 4.) hoc est tempus periodicum est in sesquiplicatâ ratione radii T P. Si igitur neque maneat radius idem, neque eadem vis centripeta absoluta in corpore T, sed per actionem corporis longinqui S radius augeatur, et vis centripeta minuatur, aut per diminutionem ejus actionis radius minuatur, et vis centripeta augeatur, quadratum temporis periodici t² erit in ratione compositâ ex binis rationibus suprâ inventis, nimirum ex ratione $\frac{1}{V}$, et ratione R³, hoc est t² erit ut $\frac{R^3}{V}$, et proindè t ut $\sqrt{\frac{R^3}{V}}$, aut quod idem est, tempus periodicum augebitur ac diminuetur in ratione compositâ ex ratione $\sqrt{R^3}$, sesquiplicatâ radii, et ratione $\frac{1}{\sqrt{V}}$ subduplicatâ hujus quâ vis illa centripeta corporis centralis T per incrementum vel decrementum actionis corporis longinqui S diminuitur vel augeatur; nam decrescente V crescit pariter $\frac{1}{V}$, et contrâ crescente V in eadem ratione decrescit $\frac{1}{V}$.

502. *Scholium.* Hinc ut David Gregorius in scholio ad Prop. 17. Lib. 4. Astronomiæ physicæ et geometricæ observavit, si vis centripeta corporis centralis T aliundè quam per vim extraneam corporis S augeatur et minuatur per

regrediatur. In conjunctione verò et oppositione vis, quâ corpus P urge-
tur in corpus T, differentia est inter vim, quâ corpus T trahit corpus P,
et vim K L; et differentia illa, ^(b) propterea quod vis K L augetur
quamproximè in ratione distantiae P T, ^(c) ideoque (per Corol. 1. Prop. XLV.) ef-
ficat ut aux progrediatur. In ^(d) locis inter syzygias et quadraturas pen-

hæc autem ratio minor est quam ratio $\frac{1}{A^2}$ ad

$\frac{1}{b^2 A^2}$, eu b² ad 1, cum $(1 + c A^3)$ minus
sit quàm $1 + c b^3 A^3$. Ponamus itaque viri-
um summam esse ut $\frac{1}{A^2 - q}$, seu ut $A^{-2 + q}$,

et q, numerum positivum unitate longe mino-
rem, et quoniam si motus totus angularis quo
corpus P ab apside unâ ad eandem apsidem redi-
dit, sit ad motum angularem revolutionis unius
seu 360°. ut numerus aliquis m ad n vis centripe-
ta tota est ut $A \frac{n}{m} - 3$ (per Cor. Prop. 45.)

erit hic $\frac{n}{m} - 3 = q - 2$, $\frac{n}{m} = 1 + q$,

$\frac{n}{m} = \sqrt{1 + q}$, et m ad n, seu motus totus an-
gularis ab apside ad eandem apsidem ad 360°
ut 1, ad $\sqrt{1 + q}$, adeoque motus ille angularis
ab apside ad eandem $= \frac{360^\circ}{\sqrt{1 + q}}$, quare cum

sit $\sqrt{1 + q}$, paulo major unitate,
motus totus angularis ab apside ad
eandem apsidem minor erit 360°. et
idè apsidem obviam ibunt corpori P
revolventi, seu movebuntur in ante-
cedentia, aut quod idem est, regredi-
entur. Idem facilè demonstratur
(per Cor. 2. Prop. 45.) vel per ex-
empla tertia. Cum enim vis tota sit

(ex Hyp.) ut $\frac{1}{A^2} + c \times A$, erit

(loco citato), angulus revolutionis cor-
poris inter apsidem summam et imam $= 180^\circ$
 $\times \sqrt{\frac{1 + c}{1 + 4c}}$; sed quoniam c est numerus po-
sitivus, $\frac{1 + c}{1 + 4c}$, est numerus unitate minor, er-
gò angulus revolutionis corporis P inter apsidem
minor est 180°.

^(b) * Propterea quod vis K L, &c. Est enim
in syzygiis K L = 2 A T, seu 2 P T quam
proximè (501.)

^(c) * Ideoque per Cor. 1. Prop. 45. Nam si
in superiori calculo loco $+ q$ scribatur $- q$, vel
loco $+ c \times A$, scribatur $- c \times A$, quod vis
K L sit ablatitia, invenietur angulus totius re-
volutionis corporis P ab apside unâ ad eandem

apsidem $= \frac{360^\circ}{\sqrt{1 - q}}$, vel angulus inter apsi-

des summam et imam $= 180^\circ \times \sqrt{\frac{1 - c}{1 - 4c}}$

Est autem $\sqrt{1 - q}$, numerus unitate minor, et

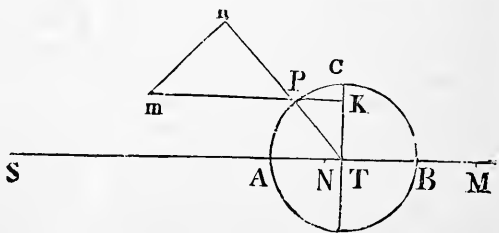
$\sqrt{\frac{1 - c}{1 - 4c}}$, numerus unitate major, adeoque

$\frac{360^\circ}{\sqrt{1 - q}}$, arcus major 360°. et $180^\circ \times$

$\sqrt{\frac{1 - c}{1 - 4c}}$, arcus major 180°. quare apsidem in

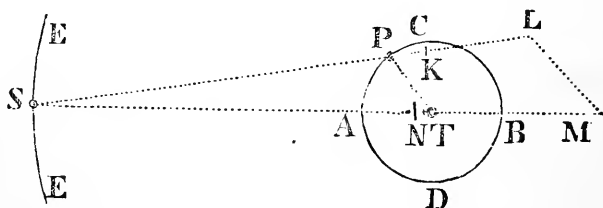
hoc casu progrediuntur.

^(d) 503. In locis inter syzygias et quadratu-
ras, &c. Iisdem positis quæ in Lemmate 500.
quæritur distantia angularis corporis P a quad-
raturâ C, v. gr. ubi apsidem quiescunt. Per lo-
cum corporis P agatur P m parallela et æqualis
N M seu T M, et erit P m = 3 P K (500.)
Vis P m, si in radium T P productum demitatur
perpendiculum m n, resolvitur in vires P n,
n m, quarum n m agendo secundum lineam ra-
dio perpendicularem, vim acceleratricem corpo-
ris P versus T nec auget, nec minuit, et P n



agendo secundum radium T P a P versus n,
vim illam acceleratricem corporis P minuit; vis
verò L M seu T P vim acceleratricem corporis
P versus T auget. Quare ubi erit P n = P T
vis acceleratrix corporis P nec augebitur nec
minuetur, et apsidem quiescent. Porro ob trian-
gula T P K, m P n similia P T : P K = P m,
seu 3 P K : P n seu P T. Est igitur in loco
quæsito P, 3 P K² = P T², et proindè P T :
P K = $\sqrt{3}$: 1. hoc est sinus totus ad sinum
distantiæ angularis corporis P a quadraturâ
proximâ ut $\sqrt{3}$ ad 1, seu ut 1732. ad 1000.
proximè; undè angulus P T C invenitur esse
35°. 26'. circiter. Quiescent igitur apsidem in
quatuor locis corporis P quæ a quadraturis dis-
tant angulo 35°. 16'; et hinc in singulis corpo-

det motus augis ex causâ utrâque conjunctim, adeo ut pro hujus vel alterius excessu progrediatur ipsa vel regrediatur. Unde cum vis KL in syzygiis sit quasi duplo major quam vis LM in quadraturis, excessus erit penes vim KL , transferetque augem in consequentia. Veritas autem hujus et præcedentis corollarii facilius intelligetur concipiendo systema corporum duorum T, P corporibus pluribus, S, S, S , &c. in orbe $ES E$ consistentibus, undique cingi. ^(e) Namque horum actionibus actio ipsius T minuetur undique, decrescetque in ratione plusquam duplicatâ distantiae.



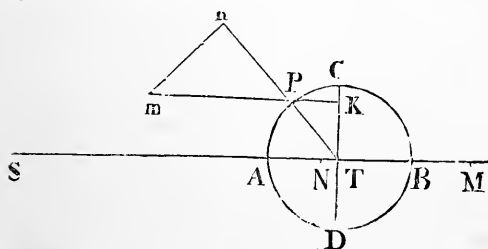
Corol. 8. ^(f) Cum autem pendeat apsidum progressus vel regressus a decremento vis centripetæ facto in majori vel minori quam duplicatâ ratione distantiae TP , in transitu corporis ab apside imâ ad apsidem summam; ut et a simili incremento in reditu ad apsidem imam; atque ideo maximus sit ubi proportio vis in apside summâ ad vim in apside imâ maximè recedit a duplicatâ ratione distantiarum inversâ: manifestum est quod apsides in syzygiis suis, per vim ablatitiam KL seu $NM - LM$, progre-

ris P revolutionibus, cæteris paribus, apsides regredientur per gradus revolutionis corporis P , 141° , et progredientur per grad. 219 .

quantitas maxima evadet ubi erit $PK = 0$, quod in quadraturis contingit.

^(e) * Namque horum actionibus, &c. Hæc enim ratione corpus P erit semper in quadraturis simul et in syzygiis corporis, seu corporum S , adeoque cum vis ablatitia KL ; in syzygiis et propè syzygias sit ferè duplo major quam vis addititia LM , in quadraturis et propè quadraturas, actio corporis T minuetur undique, decrescetque proinde in ratione plusquam duplicatâ distantiae TP .

^(f) * Cum autem (per Corol. 7.) pendeat apsidum progressus vel regressus a decremento vis centripetæ facto



504. Iisdem positis, si orbita CPD , circulo finitima sit, erit vis addititia $PT - Pn$, maxima in quadraturis. Nam cum sit semper PT :

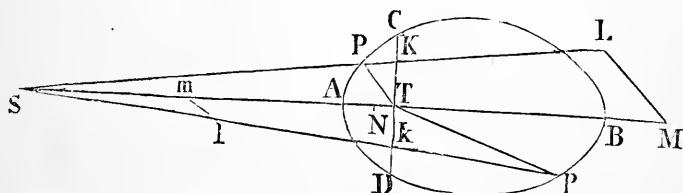
$$PK = 3 PK : Pn, \text{ erit } Pn = \frac{3 PK^2}{PT}, \text{ ac}$$

$$\text{proindè } PT - Pn = PT - \frac{3 PK^2}{PT}, \text{ quæ}$$

in majori vel minori quam duplicatâ ratione distantiae TP quæ augetur in recessu a centro T , sive in transitu corporis P ab apside imâ ad apsidem summam, ut et a simili incremento in accessu ad centrum, sive in reditu ab apside summâ ad apsidem imam, manifestum est progressum vel regressum apsidum maximum esse ubi ratio

dientur velocius, inque quadraturis suis tardius recedent per vim additionem L M. Ob diuturnitatem verò temporis, quo velocitas progressus vel tarditas regressus continuatur, fit hæc inæqualitas longè maxima.

Corol. 9. Si corpus aliquod, vi reciproce proportionali quadrato distantie suæ a centro revolveretur circa hoc centrum in ellipsi; et mox, in descensu ab apside summâ seu auge ad apsidem imam; vis illa per accessum perpetuum vis novæ augeretur in ratione plusquam duplicatâ distantie diminutæ: manifestum est quod corpus, perpetuò accessu vis illius

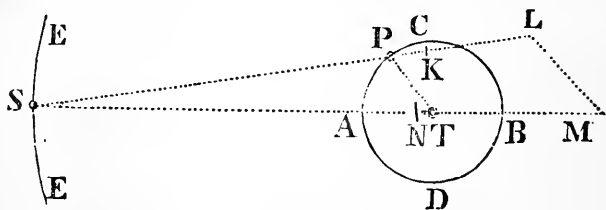


vis in apside summâ ad vim in apside imâ maximè recedit a duplicatâ ratione distantiarum inversâ, porro dum linea apsidum seu major axis ellipseos B C A D, cujus umbilicus est T, in syzygiis A, B versatur, ratio vis totius corporis P in apside summâ positi ad vim ejus in apside imâ versantis, magis recedit a duplicatâ ratione distantiarum inversâ quam in alio quovis lineæ apsidum situ. Sit enim B apsis summa, A apsis ima, et erit T B distantia maxima, A T minima (ex naturâ ellipseos.) Undè corpore P in conjunctione A versante erit vis ablatitia K L (seu differentia virium acceleratricum corporum T et P versus S) omnium minima, et corpore P in oppositione B versante, erit differentia illa K L omnium maxima. Cum autem ob ingentem corporis S distantiam (ex Hyp.) sit ferè K L ad k l ut A T ad T B (501) ratio vis corporis P in A versantis ad vim illius in B positi, exprimi hic poterit per rationem $\frac{b}{A T^2} - c \times$

A T, ad $\frac{b}{T B^2} - c \times T B$, (si ratio b ad c exprimat rationem vis absolutæ trahentis corpus P versus T, ad vim absolutam ablatitiam K L) seu reductione ad eundem denominatorem factâ, per rationem $T B^2 \times b - c \times A T^3$, ad $A T^2 \times b - c T B^3$, quæ ratio eò magis recedit a ratione $T B^2$ ad $A T^2$, seu duplicatâ distantiarum inversâ, quo magis ratio quantitatis $b - c \times A T^3$, ad quantitatem $b - c \times T B^3$, recedit a ratione æqualitatis, seu quo minor est A T respectu T B, quare dum linea apsidum est in syzygiis A, B. ratio vis totius in apside summâ ad vim in apside imâ maximè recedit a ratione duplicatâ distantiarum inversâ. In hoc igitur lineæ apsidum situ apsidem celerrimè pro-

grediuntur, corpore P in syzygiis vel prope syzygiis versante. Dum vero corpus P est in quadraturis C, D, fit vis L M = C T, vel D T; Est autem ex naturâ ellipseos, summa linearum C T, D T, omnium minima; quare in integrâ corporis P revolutione, apsidem viribus C T, D T tardissimè regrediuntur in quadraturis corporis P, et celerrimè progrediuntur in ipsius syzygiis, atque adeò excessus progressus supra regressum erit in hoc casu omnium maximus, et apsidem in integrâ corporis P revolutione celerrimè movebuntur in consequentia. Ob contrarias prorsus causas, si linea apsidum in quadraturis posita sit, apsidem velocissimè regrediuntur, corpore P in quadraturis versante, et tardissimè progrediuntur corpore P in syzygiis existente, et ex hac utrâque causâ fieri poterit ut in integrâ corporis P circum T revolutione, regressus apsidum superet eorum progressum, proindeque ut apsidem in antecedentia ferantur; sed quoniam, cæteris paribus, vis ablatitia K L quæ progressum apsidem in syzygiis corporis P inducit est (500) fere duplo major vi adjunctitiâ L M quæ apsidum regressum in quadraturis corporis P producit, excessu progressus supra regressum, apsidem progrediuntur in integrâ sui revolutione circum T, hoc est, eo tempore quo apsidem ex T visæ omnes cum corpore S, aspectus subeunt; augetur verò progressus ille, si corpora P et S in suis orbitis ferantur in eandem plagam; In hac enim hypothesi, apsidem diutius hærent in syzygiis quam in quadraturis, quia in syzygiis progrediuntur cum corpore S, atque adeò diutius illud quasi comitantur, in quadraturis verò feruntur in antecedentia et corporis S in consequentia revolventis aspectum quadratum veluti fugiunt; undè fit ut apsidem diutius progrediuntur in syzygiis suis quam regrediuntur in suis quadraturis.

novæ impulsus semper in centrum, magis vergeret in hoc centrum quam siurgeretur vi solâ crescente in duplicatâ ratione distantiae diminutæ; ideoque orbem describeret orbe elliptico interiorem, et in apside imâ propius accederet ad centrum quam prius. ^(e) Orbis igitur, accessu hujus vis novæ, fiet magis excentricus. Si jam vis in recessu corporis ab apside imâ ad apsidem summam, decresceret iisdem gradibus quibus ante creverat, redieret corpus ad distantiam priorem, ideoque si vis decrescat in



majori ratione, corpus jam minus attractum ascendet ad distantiam majorem et sic orbis excentricitas adhuc magis augebitur. Quare si ratio incrementi et decrementi vis centripetæ singulis revolutionibus augeatur, augebitur semper excentricitas; ^(h) et contra, diminuetur eadem, si ratio illa decrescat. Jam verò in systemate corporum T, P, S, ubi apsides orbis P A B sunt in quadraturis, ratio illa incrementi ac decrementi minima est, et maxima fit ubi apsides sunt in syzygiis. Si apsides constituentur in quadraturis, ratio prope apsides minor est et prope syzygias major quam duplicata distantiarum, et ex ratione illâ majori oritur augis motus directus, ⁽ⁱ⁾ uti jam dictum est. ^(k) At si consideretur ratio incrementi vel

^(e) * Orbis igitur accessu hujus vis novæ fiet magis excentricus; manente enim distantia apsidis summæ ab orbitæ umbilico, decrescet distantia apsidis imæ ab eodem umbilico, majorque proinde erit ratio prioris distantiae ad posteriorem, quam si vis illa nova non accessisset, hoc est, orbis fiet magis excentricus.

^(h) * Et contra, &c. Si in descensu corporis ab apside summâ ad apsidem imam, vis centripeta augeatur minus quam in duplicatâ ratione distantiae diminutæ, corpus describet orbem elliptico exteriorem, et in apside imâ, minus accedet ad centrum quam prius, hoc est, orbis fiet minus excentricus, et excentricitas adhuc minuetur, si in corporis ascensu ab apside imâ ad summam, vis centripeta minus decrescat quam antea creverat. Quare si ratio incrementi et decrementi vis centripetæ singulis revolutionibus minuatur, minuetur semper excentricitas.

⁽ⁱ⁾ * Uti jam dictum est (Cor. 7.)

^(k) * At si consideretur ratio incrementi vel

decrementi totius in progressu corporis P inter apsides in quadraturis C, D constituti, hæc minor est quam duplicata distantiarum. Sit enim apsis ima C, summa D, umbilicus T, erit (ex Dem.) vis in apside imâ ad vim in apside summâ ut $\frac{b}{C T^2} + n \times C T$, ad $\frac{b}{T D^2} + n \times T D$, (si ratio b ad n exprimat rationem vis absolutæ trahentis corpus P versus T ad vim absolutam additiâ L M) et reductione ad eandem denominationem factâ ut $T D^2 \times \frac{b + n C T^3}{b + n T D^3}$, quæ ratio minor est quam ratio $T D^2$, ad $C T^2$, ob T D, majorem quam C T; et quoniam in hoc lineæ apsidum situ ratio T D ad C T seu ratio distantiarum umbilici T a quadraturis maxima est, (ex naturâ ellipseos) patet rationem totius decrementi et incrementi vis centripetæ in transitu corporis P inter apsides minimam esse in quadraturis apsidum. Et contrâ si fuerit A apsis ima, B apsis summa, erit vis in apside imâ

decrementi totius in progressu inter apsides, hæc minor est quam duplicata distantiarum. Vis in apside imâ est ad vim in apside summâ in minore quam duplicatâ ratione distantiae apsidis summæ ab umbilico ellipseos ad distantiam apsidis imæ ab eodem umbilico, et contra, ubi apsides constituuntur in syzygiis, vis in apside imâ est ad vim in apside summâ in majore quam duplicatâ ratione distantiarum. Nam vires L M in quadraturis additæ viribus corporis T componunt vires in ratione minore, et vires K L in syzygiis subductæ a viribus corporis T relinquunt vires in ratione majore. Est igitur ratio decrementi et incrementi totius, in transitu inter apsides, minima in quadraturis, maxima in syzygiis: et propterea in transitu apsidum, a quadraturis in syzygias perpetuò augetur, augetque excentricitatem ellipseos; inque transitu a syzygiis ad quadraturas perpetuò diminuitur, et excentricitatem diminuit.

Corol. 10. Ut rationem ineamus errorum in latitudinem, fingamus planum orbis E S T immobile manere; et ex errorum expositâ causâ manifestum est, quod ex viribus N M, M L, quæ sunt causa illa tota, vis M L agendo semper secundum planum orbis P A B, nunquam perturbat motus in latitudinem; quodque vis N M, ubi nodi sunt in syzygiis, agendo etiam secundum idem orbis planum, ⁽¹⁾ non perturbat hos motus; ^(m) ubi verò sunt in quadraturis, eos maximè perturbat, corpusque P de plano

ad vim in apside summâ ut $T B^2 \times \overline{b - c A T^3}$, ad $A T^2 \times b - c T B^3$, adeoque in majori ratione quam $T B^2$, ad $A T^2$, et quoniam ratio T B, ad A T, in his apsidum locis maxima est, ex naturâ ellipseos, ratio decrementi et incrementi totius in transitu inter apsides, maxima est in syzygiis apsidum, et propterea singulis corporis P revolutionibus in transitu apsidum a quadraturis ad syzygias, hæc ratio perpetuò augetur, augetque excentricitatem ellipseos, et in transitu apsidum a syzygiis ad quadraturas perpetuò diminuitur, et excentricitatem diminuit. Maxima ergo est orbis excentricitas, ubi apsides sunt in syzygiis, minima ubi sunt in quadraturis.

505. Ex his etiam sequitur in unâquâque corporis P circum T revolutione excentricitatem orbis circâ syzygias corporis P augeri, et circâ ejus quadraturas minui, minimamque esse in illius quadraturis, maximam in syzygiis, cæteris paribus. Nam (per Cor. 7.) corporis P vis centripeta tota in syzygiis decrescit in majori quam duplicatâ ratione distantiae auctæ, et crescit in majori ratione quam duplicatâ distantiae diminutæ, et in quadraturis contrâ. Quare corpus P, in syzygiis et propè syzygias describit partem orbis magis excentrici, in quadraturis

verò et propè quadraturas partem orbis minus excentrici (ex demonstratis initio Cor. 9.) Et quoniam vis addititia L M in quadraturis corporis P maxima est, et vis ablatitia K L in syzygiis ejus etiam maxima, vis autem addititia excentricitatem diminuit et ablatitia auget, manifestum est quod (cæteris paribus) in unâ corporis P revolutione, excentricitas orbis minima sit in quadraturis corporis P, et maxima in illius syzygiis, atque adeò quod a quadraturis ad syzygias perpetuò augeatur, et a syzygiis ad quadraturas perpetuò minuat.

⁽¹⁾ * Non perturbat hos motus. Patet per Cas. 2. Prop. 66.

^(m) 506. Ubi verò sunt in quadraturis eos maximè perturbat; Ubi nodi sunt in quadraturis C et D inclinatio directionis vis N M (quæ lineæ P m exhibetur) ad planum orbitæ corporis P maxima est, ut potè æqualis planorum C A D, E S T inclinationi et proindè, cæteris paribus, maximè potenter agit; in alio enim lineæ nodorum situ, minor est inclinatio directionis vis N M ad planum orbitæ corporis P, et evanescit cum nodi sunt in syzygiis, crescitque adeò in transitu nodorum a syzygiis ad quadraturas, et contrâ, decrescit in eorum transitu a quadraturis ad syzygias.

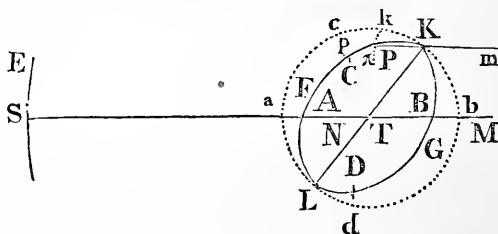
B et C. (t) Inclinatio igitur ubi nodi sunt in syzygiis est omnium maxima. In transitu eorum a syzygiis ad quadraturas, in singulis corporis ad nodos appulsibus, diminuitur; fitque omnium minima, ubi nodi sunt in

positionem B vel b, et nodus oppositus L inter quadraturam D vel d, et conjunctionem A seu a, feraturque corpus a nodo K per C ad alterum nodum L. 1^o. In transitu corporis a nodo ad quadraturam proximam inclinatio plani perpetuò augetur et nodi progrediuntur. 2^o. In transitu a quadraturâ C vel D ad gradum a nodo nonagesimum F vel G inclinatio minuitur et nodi regrediuntur. 3^o. In transitu a gradu illo 90^o. ad nodum proximam inclinatio augetur et nodi regrediuntur. 2^{um}. et 3^{um}. demonstrantur prorsus ut in notâ 507. 1^{um}. verò itâ ostenditur. Dum

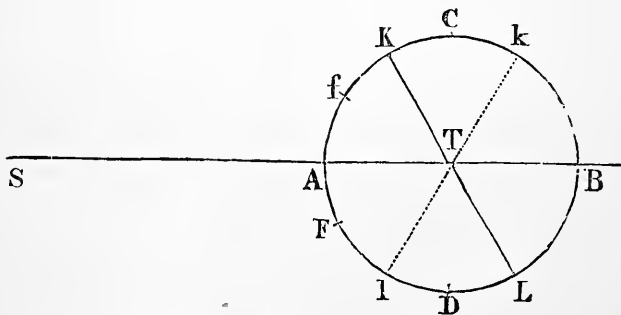
corpus P versatur inter nodum K et quadraturam C, vi revolutionis urgetur per arcum P p, et vi N M trahitur secundum directionem P m in plagam M, adeoque vi utraq̃ue describet tempusculo minimo lineolam P π , quæ ab arcu P p deflectet versus P m; quare si centro T, radio T P, describantur ut suprâ arcus P K, π P k, K k c a in planis

T p P, T π P, E S T patet propositum, ut in notâ 507.

510. Corol. Ex tribus superioribus demonstra-



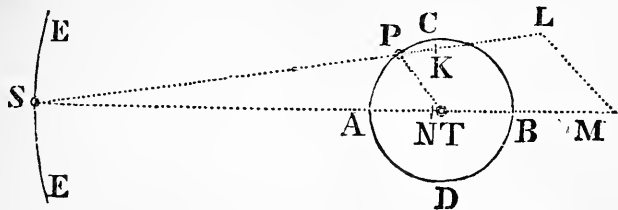
tionibus (507, 508, 509) inter se collatis manifestum est nodos progredi quamdiu corpus P inter quadraturam alterutram et nodum quadraturæ proximam versatur; eos verò regredi, dum corpus P in aliis quibuscumque locis versatur. Unde sequitur in singulis corporis P a nodo ad nodum revolutionibus nodos magis regredi quam progredi, adeoque absolute regredi nisi fuerint in syzygiis.



(t) * Inclinatio igitur ubi nodi sunt in syzygiis, &c. Quoniam in singulis corporis P a nodo ad nodum revolutionibus, linea nodorum regreditur (510) et in transitu nodorum a syzygiis A et B ad quadraturas C et D, inclinatio orbitæ perpetuò minuitur (508) deinde verò in transitu nodorum a quadraturis C et D, ad syzygias B, et A, perpetuò augetur (509), manifestum est inclinationem minimam esse ubi nodi sunt in quadraturis et corpus P in syzygiis (in quibus vis N M, cæteris paribus, maxima est) et maximam inclinationem esse ubi nodi sunt in syzygiis. Porro sint nodi K et L inter C et A, D et B primum, deinde regrediendo transeant in loca k et l, inter C et B, D et A, sintque arcus C K et C k, æquales. In primo casu inclinatio

minuitur in transitu corporis P, per quadrantem K F, (508) et in secundo casu æqualibus viribus augetur per quadrantem f l, (509). In primo casu inclinatio augetur per arcum F D (508), et in secundo casu æqualibus viribus minuitur per arcum C f = F D (509). Tandem in primo casu, inclinatio minuitur per arcum D L, (508) et in secundo casu augetur æqualibus viribus per arcum æqualem k C, (509). Quare, cæteris paribus, in transitu nodorum a quadraturis ad syzygias inclinatio planorum iisdem gradibus crescit quibus antea decreverat in transitu nodorum a syzygiis ad quadraturas, ideòque nodis ad syzygias proximas appulsis, ad magnitudinem primam revertitur.

quadraturis, et corpus in syzygiis: dein crescit iisdem gradibus, quibus antea decreverat, nodisque ad syzygias proximas appulsis, ad magnitudinem primam revertitur.



Corol. 11. Quoniam corpus P, ubi nodi sunt in quadraturis, perpetuò trahitur de plano orbis sui, idque in partem versus S in transitu suo a nodo C per conjunctionem A ad nodum D; et in contrariam partem in transitu a nodo D per oppositionem B ad nodum C: manifestum est, quod in motu suo a nodo C corpus perpetuò recedit ab orbis sui plano primo C D, usque dum perventum est ad nodum proximum; ideoque in hoc nodo, longissimè distans a plano illo primo C D, transit per planum orbis E S T non in plani illius nodo altero D, sed in puncto quod inde vergit ad partes corporis S, quodque proinde novus est nodi locus in anteriora vergens. Et simili argumento pergent nodi recedere in transitu corporis de hoc nodo in nodum proximum. (*) Nodi igitur in quadraturis constituti perpetuò recedunt; in syzygiis, ubi motus in latitudinem nil perturbatur, quiescunt; in locis intermediis, conditionis utriusque participes, recedunt tardius: ideoque, semper vel retrogradi, vel stationarii singulis revolutionibus feruntur in antecedentia.

Corol. 12. Omnes illi in his corollariis descripti errores sunt paulò majores in conjunctione corporum P, S, quam in eorum oppositione; (*) idque ob majores vires generantes N M et M L.

Corol. 13. Cumque rationes horum corollariorum non pendeant a mag-

(*) * Nodi igitur in quadraturis constituti, &c. In integrâ corporis P revolutione, nodi partim regrediuntur, partim progrediuntur, nisi fuerint in quadraturis vel in syzygiis constituti (510); dum autem in quadraturis versantur, vis N M, quæ eorum regressum producit, maxime potenter agit (506); quare nodi in quadraturis constituti celerrimè regrediuntur; in syzygiis ubi motus in latitudinem nihil perturbatur quiescunt, in locis intermediis recedunt quidem singulis revolutionibus corporis P, (510), sed tardius quam in quadraturis, ideoque semper, &c.

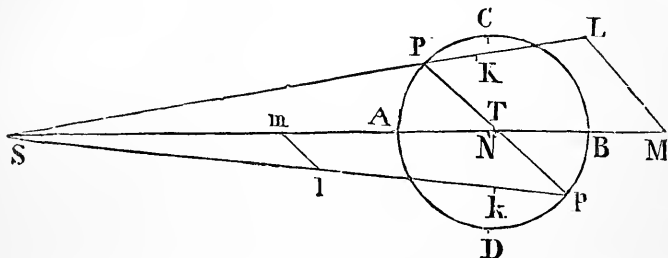
511. *Lemma.* Si fuerint tres quantitates a,

$a + b$, $a + 2b$ in continuâ proportionem arithmeticâ, ratio 2^a . ad 1^a . (quæ e tribus est minima) major erit quam ratio 3^a . (quæ est maxima) ad 2^a . Est enim $a + b : a = \frac{a + b}{a} \times \frac{a + b}{a + b} : a + a + b = \frac{a + b}{a} \times \frac{a + b}{a + b} : a + a + b$; sed est $a + 2b : a + b = \frac{a + 2b}{a + b} \times \frac{a + b}{a + b} : a + a + b$. Ergo cum ratio $a + 2b : a + b$ ad $a + a + b$ major sit quam ratio $a + 2b$ ad $a + a + b$, erit ratio $a + b$ ad a major ratione $a + 2b$ ad $a + b$.

(*) * Idque ob majores vires generantes N M et M L. Vis L M in conjunctione est ut

nitudine corporis S, obtinent præcedentia, omnia ubi corporis S tanta statuitur magnitudo, ⁽⁷⁾ ut circa ipsum revolvatur corporum duorum T et P systema. Et ex aucto corpore S auctâque ideo ipsius vi centripetâ a quâ errores corporis P oriuntur, evadent errores illi omnes, paribus distantiiis, majores in hoc casu quam in altero, ubi corpus S circum systema corporum P et T revolvitur.

Corol. 14. ⁽²⁾ Cum autem vires N M, M L, ubi corpus S longinquum



$\frac{AT}{SA^3}$, et vis lm in oppositione est ut $\frac{TB}{SB^3}$

(495). Quare (cæteris paribus) hoc est, si fuerit $AT = TB$ vis ML in conjunctione major erit vi lm in oppositione propter SA^3 minorem quam SB^3 . Quod erat unum. Porro si AT et BT sint æquales, tres lineæ SA , ST , SB erunt in continuâ proportionem arithmetica et proinde SK mediocris distantia corporis P ab S erit æqualis ST ; et quoniam SK exhibet vim acceleratricem corporis P versus S in mediocri distantia SK , et SN exponit vim acceleratricem corporis T versus S, (Prop. 66.) erit $SN = ST$, atque adeò $NM = TM$, et $mN = Tm$. Sed quoniam PT , seu AT :

$$ST = LM : SM, \text{ erit } SM = \frac{ST \times LM}{AT},$$

et similiter invenietur $Sm = \frac{ST \times lm}{AT}$, adeò-

$$\text{que } TM = SM - ST = \frac{ST \times LM - ST \times AT}{AT}$$

$$\text{et } Tm = ST - sm = \frac{ST \times AT - ST \times lm}{AT};$$

undè differentia $TM - Tm$, erit ut $ST \times LM + ST \times lm - ST \times 2AT$, hoc est, ut $LM + lm - 2AT$; Est autem summa $LM + lm$, major quam $2AT$. Nam cum sit (495) $LM = \frac{ST^3 \times AT}{SA^3}$, et $lm =$

$$\frac{ST^3 \times AT}{SB^3}, \text{ recta } LM \text{ major est rectâ } AT,$$

in ratione ST^3 ad SA^3 , et lm minor est AT in ratione SB^3 ad ST^3 . Est verò ratio ST^3 ad SA^3 , major ratione SB^3 ad ST^3 (511) et proinde differentia rectarum LM et AT

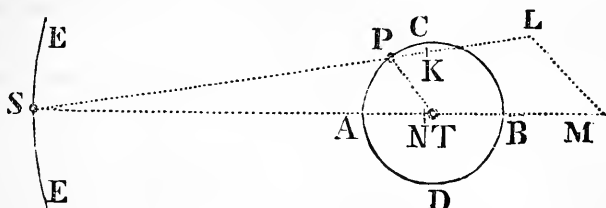
major erit quam differentia rectarum AT et lm , et ideo summa $LM + lm$ major est quam $2AT$; Quare tandem erit TM major quam Tm , seu vis NM major in conjunctione quam in oppositione; Quod erat alterum.

⁽⁷⁾ * Ut circa ipsum revolvatur, &c. Demonstrationes enim sunt eadem, sive corpus S moveatur circum T, seu corpus T revolvatur circum S.

⁽²⁾ 512. * Cum autem vires NM , ML , &c. Ob magnam distantiam corporis S, erit ferè LS parallela MS , et $SN = ST = SK$, ac $ML = PT$; et quoniam NM in syzygiis est ut ML in quadraturis (501). Si auctâ vel diminutâ actione corporis S, orbita $CADB$ unâ cum lineis hinc penditibus PT , NM , ML augeatur vel diminuat (Cor. 6. hujus Prop. 66.) tres illæ lineæ in eadem ferè ratione inter se (cæteris paribus) augebuntur vel diminuentur. Est autem vis ML ad vim SK ut recta ML ad rectam SK , seu quam proximè ut PT ad ST ; Quare vis ML (adeoque et vis NM) est quam proximè ut vis SK et ratio PT , ad ST , conjunctim, hoc est, si vis acceleratrix SK dicatur A ut $\frac{A \times PT}{ST}$. Porro datâ vi absolutâ

corporis S, vis acceleratrix A in distantia SK seu ST est ut $\frac{1}{ST^2}$ (ex hyp.) Quare vires NM , ML , datâ vi absolutâ corporis S, sunt ut $\frac{PT}{ST^3}$; hoc est (si detur distantia PT) ut ST^3 reciprocè. Verùm si variabilis sit vis absoluta V corporis S, erit vis acceleratrix A in distantia ST , ut vis absoluta V directè et quadratum distantia ST inversè, (nam manente vi absolutâ

est, sint quamproximè ut vis SK et ratio PT ad ST conjunctim, hoc est, si detur tum distantia PT , tum corporis S vis absoluta, ut ST cub. reciprocè; sint autem vires illæ NM , ML causæ errorum et effectuum omnium, de quibus actum est in præcedentibus corollariis: manifestum



est, quod effectus illi omnes, stante corporum T et P systemate, et mutatis tantum distantia ST et vi absolutâ corporis S , sint quamproximè in ratione compositâ ex ratione directâ vis absolutæ corporis S , et ratione triplicatâ inversâ distantie ST . Unde si systema corporum T et P revolvatur circa corpus longinquum S ; vires illæ NM , ML , et earum effectus erunt (per Corol. 2. et 6. Prop. IV.) reciprocè in duplicatâ ratione temporis periodici. Et inde etiam, ^(a) si magnitudo corporis S propor-

corporis S , vis acceleratrix est ut ST^2 inversè, et manente distantia ST vis acceleratrix est ut vis absoluta directè, proindeque variantibus vi absolutâ et distantia simul, vis acceleratrix est ut vis absoluta directè et quadratum distantie inversè); Quare si loco vis acceleratricis A ratio

illa composita in facto $\frac{A \times PT}{ST}$ ponatur, vires

NM , ML erunt quam proximè ut $\frac{V \times PT}{ST^3}$,

seu datâ PT , ut $\frac{V}{ST^3}$, hoc est in ratione com-

positâ ex ratione directâ vis absolutæ corporis S , et ratione triplicatâ inversâ distantie ST . Vis autem absoluta corporis S , est (ex Dem.) in ratione compositâ vis acceleratricis A et quadrati distantie ST , et vis acceleratrix A in distantia ST est (per Corol. 2. Prop. 4.) in ratione compositâ ex ratione directâ distantie ST et ratione duplicatâ inversâ temporis periodici corporis T circum S ad distantiam ST circum describentis, adeoque vis absoluta corporis S est ut cubus distantie ST directè, et quadratum temporis periodici corporis T inversè. Quare vires NM , ML (earumque effectus) quæ sunt directè ut vis absoluta, et inversè ut cubus distantie, sunt reciprocè in duplicatâ ratione temporis periodici corporis T .

^(a) * Si magnitudo seu massa corporis S proportionalis sit ipsius vi absolutæ, dato corpore S dabitur vis illius absoluta; unde si præterea data sit distantia PT , vires NM , ML et earum effectus erunt, ex suprâ demonstratis, ut cubus distantie ST inversè; sed diameter apparens FG corporis longinqui S ex T visi, hoc est, angulus FTG sub quo diameter FG de loco T videtur, est ut distantia ST inversè; nam cum globi S diameter parva admodum supponatur respectu distantie ST , angulus FTG , erit admodum exiguus, et globi radius SF ad ST normalis usurpari poterit pro arcu circuli centro T et intervallo TS descripti, adeoque



(154) angulus $FTS = \frac{FS}{ST}$, hoc est, ob datum radium SF , angulus FTS et ipsius duplus FTG erit ut ST inversè. Vires igitur NM , ML earumque effectus, erunt ut cubus diametri apparentis corporis longinqui S è corpore T spectati.

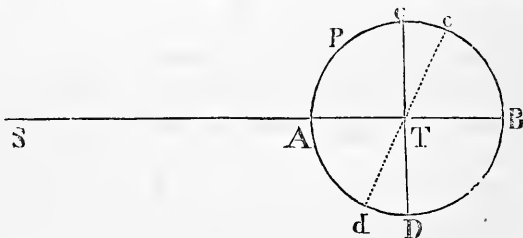
errorum tempora in alio quovis, quam proximè : sed brevius hâc methodo. (d) Vires N M, M L, cæteris stantibus, sunt ut radius T P, et harum effectus periodici (per Corol. 2. Lem. X.) ut vires, et quadratum temporis periodici corporis P conjunctim. Hi sunt errores lineares corporis P; et hinc errores angulares e centro T spectati (id est, tam motus augis et nodorum, quàm omnes in longitudinem et latitudinem errores apparentes) sunt, in quâlibet revolutione corporis P, ut quadratum temporis revolutionis quam proximè. Coniungantur hæ rationes cum rationibus Corollarii XIV. et in quolibet corporum T, P, S systemate, ubi P circum T sibi propinquum, et T circum S longinquum revolvitur, errores angulares corporis P, de centro T apparentes, erunt, in singulis revolutionibus corporis illius P, ut quadratum temporis periodici corporis P directè, et quadratum temporis periodici corporis T inversè. (e) Et inde motus medius augis

circâ corpus S revolvitur, ut patet, si loco orbis E S E in demonstratione ponatur orbis quem corpus T circum S describit.

(d) * Vires N M, M L, &c. Quoniam vires N M, M L sunt (Cor. 14.) ut vis S K et ratio P T ad S T conjunctim, manentibus vi S K et S T erunt vires illæ ut radius T P et proinde aucto vel diminuto radio illo T P, manent in datâ inter se ratione, et quoniam ob longinquitatem corporis S ad similes orbis variabilis P A B (sed sibi semper similis et æquè inclinati) partes similiter applicantur quamproximè, illarum effectus periodici (per Corol. 2. Lem. X.) sunt ut vires ipsæ et quadratum temporis periodici corporis P circum T conjunctim, hoc est, ut radius T P, et quadratum temporis periodici corporis P quamproximè. Porro si in orbitâ circulari vel circulo finitima P A B, sit arcus D d error linearis periodicus v. gr. notli D in antecedentia ad d regressi tempore unius revolutionis corporis P circum T, angulus D T d, sub quo error ille D d è centro T videtur, hoc est, error angularis periodicus erit = $\frac{D d}{T P}$ (154). Erro-

res igitur angulares periodici sunt ut errores lineares directè et radius T D vel T P inversè, adeoque ut quadratum temporis periodici corporis P quamproximè. Et hæc quidem vera sunt, stantibus vi absolutâ corporis S et distantia S T et variantibus radio T P ac tempore periodico corporis P; verum stantibus radio T P et tempore periodico corporis P et variantibus vi absolutâ corporis S atque distantia S T, errores periodici tum lineares, tum angulares sunt (Corol. 14.) reciprocè ut quadratum temporis periodici corporis T circum S, quare variantibus tum ra-

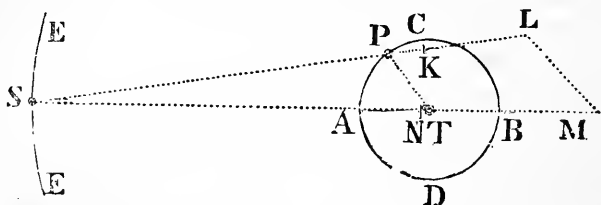
dio T P, et tempore periodico corporis P, tum radio S T, atque vi absolutâ corporis S, errores angulares corporis P de centro T apparentes, erunt in singulis revolutionibus corporis illius P circum T, in ratione ex binis superioribus ratio-



nibus compositâ, seu erunt ut quadratum temporis periodici corporis P, directè et quadratum temporis periodici corporis T, inversè.

(e) * Et inde motus medius augis, &c. Si corpus quodvis celerius et tardius vel in plagas oppositas per vices moveatur, illius velocitas æquabilis media, seu motus medius obtinetur, si spatium quod corpus illud in unam plagam latum, longo satis tempore percurrit, per illud notabile tempus dividatur. Hinc quoniam apsidum et nodorum motus tardior et celerior est per vices, nunquam in antecedentia, nunc in consequentia fit, invenitur illorum motus medius angularis, si spatium angulare totum, quod plurimum revolutionum corporis P tempore describunt, per illud tempus dividatur. Quare cum motus angularis periodicus augis et nodorum sit (ex Dem.) ut quadratum temporis periodici corporis P directè, et quadratum temporis periodici corporis T inversè, si ratio hæc composita per tempus periodicum corporis P pluries sumptum dividatur, erit quotiens seu motus medius angu-

erit in datâ ratione ad motum medium nodorum; et motus uterque erit ut tempus periodicum corporis P directè et quadratum temporis periodici corporis T inversè. Augendo vel minuendo excentricitatem et inclinacionem orbis P A B ^(f) non mutantur n.otus augis et nodorum sensibilter, nisi ubi eadem sunt nimis magnæ.



Corol. 17. Cum autem linea L M nunc major sit nunc minor quam radius P T, exponatur vis mediocris L M per radium illum P T; et erit hæc ad vim mediocrem S K vel S N (quam exponere licet per S T) ut longitudo P T ad longitudinem S T. Est autem vis mediocris S N vel S T, quâ corpus T retinetur in orbe suo circum S, ad vim, quâ corpus P retinetur in orbe suo circum T, ^(g) in ratione compositâ ex ratione radii S T, ad radium P T, et ratione duplicatâ temporis periodici corporis P circum T ad tempus periodicum corporis T circum S. Et ex æquo, vis mediocris L M ad vim, quâ corpus P retinetur in orbe suo circum T (quâve corpus idem P, eodem tempore periodico, circum punctum quodvis immobile T ad distantiam P T revolvi posset) est in ratione illâ duplicatâ periodicorum temporum. Datis igitur temporibus periodicis unâ cum distantia P T, datur vis mediocris L M; ^(h) et eâ datâ, datur etiam vis M N quam proximè per analogiam linearum P T, M N.

laris augis et nodorum ut tempus periodicum corporis P directè et quadratum temporis periodici corporis T inversè; et inde motus medius augis et nodorum, qui sunt ambo ut eadem quantitas, seu ut tempus periodicum corporis P directè et quadratum temporis periodici corporis T inversè, datam habent ad se mutuò rationem.

^(f) * *Non mutantur*, &c. Nam vires M L, N M motuum augis et nodorum productrices, cæteris stantibus, non multum mutantur, si augeatur vel minuatur excentricitas et inclinatio orbis P A B, nisi magna satis fuerit illa mutatio, ut patet ex ratione quâ vires illæ M L, N M Prop. 66. determinantur.

^(g) * *In ratione compositâ ex ratione radii S T*, &c. Nam (per Cor. 2. Prop. 4.) vis acceleratrix mediocris S T quâ corpus T circum S ad distantiam S T circum vel orbem circulo finitimum describere supponitur, est ad vim simi-

lem quâ corpus P in orbitâ suâ circulari vel circulo finitimâ retinetur in ratione compositâ ex ratione radii S T ad radium P T directè, et ratione duplicatâ temporis periodici corporis T circum S, ad tempus periodicum corporis P circum T, inversè. Quare vis prior est ad posteriorem in ratione compositâ ex ratione radii S T ad radium P T, et ratione duplicatâ temporis periodici corporis P ad tempus periodicum corporis T; cumque sit etiam, ex Dem., vis mediocris L M ad vim mediocrem S T, ut P T ad S T, erit per compositionem rationum et ex æquo, vis mediocris L M, ad vim acceleratricem quâ corpus P retinetur in orbe suo circum T, ut quadratum temporis periodici corporis P circum T ad quadratum temporis periodici corporis T circum S.

^(h) * *Et eâ datâ*, datur etiam vis N M (500).

Corol. 18. Iisdem legibus, quibus corpus P circum corpus T revolvitur, fingamus corpora plura fluida circum idem T ad æquales ab ipso distantias moveri; deinde ex his contiguïs factis conflari annulum fluidum, rotundum ac corpori T concentricum; et singulæ annuli partes, motus suos omnes ad legem corporis P peragendo, propius accedent ad corpus T, et celerius movebuntur in conjunctione et oppositione ipsarum et corporis S, quam in quadraturis. Et nodi annuli hujus, seu intersectiones ejus cum plano orbitæ corporis S vel T, quiescent in syzygiis; extra syzygias verò movebuntur in antecedentia, et velocissimè quidem in quadraturis, tardius aliis in locis. Annuli quoque inclinatio variabitur, ⁽ⁱ⁾ et axis ejus singulis revolutionibus oscillabitur, completæque revolutione ad pristinum situm redibit, nisi quâtenus per præcessionem nodorum circumfertur.

Corol. 19. Fingas jam globum corporis T, ex materiâ non fluidâ constantem, ampliari et extendi usque ad hunc annulum, et alveo per circuitum excavato continere aquam, motuque eodem periodico circa axem suum uniformiter revolvî. Hic liquor per vices acceleratus et retardatus (ut in superiore corollario) ^(k) in syzygiis velocior erit, in quadraturis tardior quam superficies globi, et sic fluet in alveo refluatque ad modum maris. Aqua, revolvendo circa globi centrum quiescens, si tollatur attractio corporis S, nullum acquireret motum fluxus et refluxus. ^(l) Par est ratio globi uniformiter progredientis in directum, et interea revolventis circa centrum suum (per legum Corol. 5.) ut et globi de cursu rectilineo uniformiter tracti, (per legum Corol. 6.) Accedat autem corpus S, et ab ipsius mæquabili attractione mox turbabitur aqua. Etenim major erit attractio aquæ propioris, minor ea remotioris. ^(m) Vis autem L M trahet aquam deorsum in quadraturis, facietque ipsam descendere usque ad syzygias; et vis K L trahet eandem sursum in syzygiis, sistetque descensum ejus et faciet ipsam ascendere usque ad quadraturas: nisi quâtenus motus fluendi et refluendi ab alveo aquæ dirigatur, et per frictionem aliquâtenus retardetur.

Corol. 20. Si annulus jam rigeat, et minuatur globus, cessabit motus

⁽ⁱ⁾ * *Et axis ejus seu recta per centrum annuli ducta ad planum ejus perpendiculariter, cum plano illo singulis revolutionibus oscillabitur, hoc est, ad planum E S T magis et minus per vices inclinabitur* (Cor. 10.) *completæque, &c.* totum verò Corollarium patet ex Corol. 3. 5. 10. 11. 15.

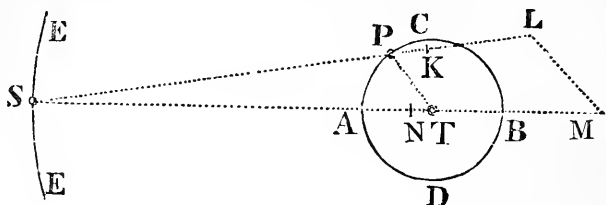
^(k) * *In syzygiis velocior erit, &c.* Per Cor. 18. et 3. Nam velocitas uniformis quâ globus circum axem suum revolvitur eodem tempore periodico quo pars quælibet fluidi suam revolutio-

nem absolvit, media erit inter maximam velocitatem fluidi in syzygiis et minimam in quadraturis.

^(l) * *Par est ratio, &c.* Id est, exclusâ actione corporis S aqua uniformiter revolvendo circum centrum globi vel uniformiter moti in directum vel de cursu rectilineo per lineas parallelas uniformiter tracti, nullum acquireret motum fluxûs et refluxûs, *accedat autem, &c.*

^(m) * 514. *Vis autem L M, &c.* Patet per Corol. 5. Verum ut totum hoc Corollarium 19^{um}.

fluendi et refluendi; (^a) sed oscillatorius ille inclinationis motus et præcessio nodorum manebunt. Habeat globus eundem axem cum annulo, gyrosque compleat iisdem temporibus, et superficie suâ contingat ipsum interius, eique inhæreat; et participando motum ejus, compages utriusque



oscillabitur, et nodi regredientur. (^o) Nam globus, ut mox dicetur, ad suscipiendas impressiones omnes indifferens est. Annuli globo orbatu maximus inclinationis angulus est, ubi nodi sunt in syzygiis. Inde in progressu nodorum ad quadraturas conatur is inclinationem suam minuire, et isto conatu motum imprimit globo toti. (^p) Retinet globus motum impressum, usque dum annulus conatu contrario motum hunc tollat, imprimatque motum novum in contrariam partem: Atque (^q) hâc ratione maximus decrescentis inclinationis motus fit in quadraturis nodorum, et minimus inclinationis angulus in octantibus post quadraturas; dein maximus reclinacionis motus in syzygiis, et maximus angulus in octantibus

clarius intelligatur, sit c a d b globi solidi æquator hoc est, circulus globi maximus ad axem rotationis globi perpendicularis C A D B zona fluida satis profunda, seu annulus fluidus globo circumpositus, et supponendo quod centrum

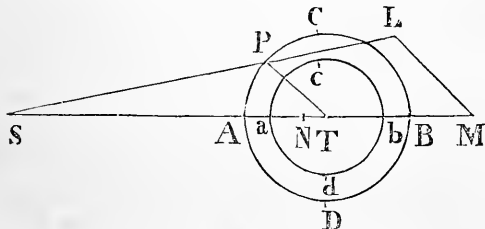
corpore S inæqualiter attracta totusque proinde annulus movebuntur, ut in Corol. 19^o. ex Corollariis præcedentibus determinatum est.

(ⁿ) * Sed oscillatorius ille, &c. Patet per Cor. 18. et not. superiorem.

(^o) * Nam globus indifferens est, &c. Liqueat etiam ex legibus 1^a. et 2^a. et not. 9.

(^p) * Retinet globus motum impressum. Per Leg. 1. et 2.

(^q) * Atque hâc ratione maximus inclinationis motus fit in quadraturis nodorum (per Corol. 18. et 10.) non idèo tamen ibidem fit minimus inclinationis angulus, sed in octantibus post quadraturas. Sint enim nodi K et L in octantibus post syzygias A et B, et retrogrediendo accedant ad quadraturas C, D; dum nodus K percurrit arcum K C, et nodus L, arcum L D, inclinatio per actionem vis N M, continuo decrescit, cumque nodus K, pervenit in C, et transit ad octantem k perseverat, ex inertia materiæ, motus inclinationis decrescentis per totum arcum K C impressus; Licet vis N M in contrarium agat per totum arcum C k = C K; vis enim N M

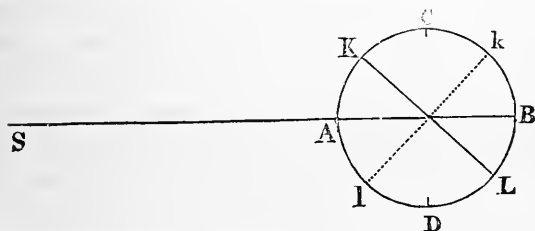


gravitatis globi solidi accuratè vel quamproximè coincadat cum figuræ centro T, globus eodem quamproximè modo trahetur a corpore longinquo S, et trahet ipse particulam P fluidi (71) ac si tota illius massa esset in centro T coacta (quod quidem accuratè verum esse quibusdam in casibus postea demonstrabitur), sed hic approximatio sufficit; quare fluidi particula quævis P a

proximis. Et eadem est ratio globi annulo nudati, qui in regionibus æquatoris vel altior est paulò quam juxta polos, vel constat ex materiâ paulo densiore. (*) Supplet enim vicem annuli iste materiæ in æquatoris regionibus excessus. Et quanquam, auctâ utcunque globi hujus vi centripetâ, tendere supponantur omnes ejus partes deorsum, ad modum gravitantium partium telluris, tamen phænomena hujus et præcedentis corollarii (s) vix inde mutabuntur; nisi quod loca maximarum et minimarum altitudinum aquæ diversa erunt. Aqua enim jam in orbe suo sustinetur et permanet, non per vim suam centrifugam, sed per alveum in quo fluit. Et præterea vis L M trahit aquam deorsum maxime in quadraturis, et vis K L seu N M — L M trahit eandem sursum maximè in syzygiis. Et hæ vires conjunctæ desinunt trahere aquam deorsum et incipiunt trahere

per arcum C k motum inclinationis decrescens iisdem gradibus dimittit, quibus per arcum K C productus et acceleratus est. Quare ille decrescens inclinationis motus penitus non de-

raturas incidere, minimam in syzygiis. Verùm si manente eadem vi centrifugâ augeatur vis centripetâ, seu gravitas particularum aquæ, particula illæ non vi suâ centrifugâ, sed alvei parietibus, ut in mari atque fluminibus telluris contingit, sus-



struitur, nisi nodus K pervenerit in k tumque vis N M planum reclinat, hoc est, nodo existente in k incipit motus reclamationis sive motus inclinationis crescentis et perseverat usque ad octantem proximum L atque ibi cessat. Liqueat igitur minimum angulum inclinationis fieri in octantibus nodorum k, l post quadraturas C, D maximum verò dum nodi versantur in octantibus K et L post syzygias A, B.

(*) * *Supplet enim vicem annuli, &c.* Patet per not. 514. Si materiæ in æquatoris regionibus excessus per annulum C c A D b, (vid. fig. not. 514.) exhibeatur et reliqua globi materia in centro T coacta intelligatur

(s) * *Vix inde mutabuntur.* Nam major partium globi in centrum T gravitas non impedit quin annulus fluidus vel solidus, impressione virium L M, N M suscipiat, loca tamen maximarum et minimarum altitudinum aquæ diversa erunt. Hucusque enim supposuimus particulas aquæ ex virium centripetâ et centrifugâ æquilibrium, in orbe suo sustineri et permanere instar corporis solitarii P circum T in spatio libero revolventis; atque inde ex Cor. 5. ostensum est in Cor. 18. maximam aquæ altitudinem in quad-

ratibus incidere, minimam in syzygiis. Verùm si manente eadem vi centrifugâ augeatur vis centripetâ, seu gravitas particularum aquæ, particula illæ non vi suâ centrifugâ, sed alvei parietibus, ut in mari atque fluminibus telluris contingit, sus-

tinentur et in orbe suo permanent ac proinde non amplius ad legem corporis solitarii circum centrum T, in spatio libero revolventis a centro illo T recedunt, vel ad illud accedunt. Loca igitur maximarum et minimarum altitudinum aquæ diversa erunt: velocitas tamen partium aquæ, cæteris paribus, maxima erit in syzygiis, minima in quadraturis (per Cor. 5.) Præterea vis L M addititia trahit aquam deorsum, seu ad centrum T, maximè in quadraturis (504) et vis ablatitia K L trahit eandem sursum, maximè in syzygiis (501) et ideo si globus cum aquâ circumpositâ non revolveretur circa centrum T, minimæ aquarum altitudines in quadraturis C et D, maximæ in syzygiis A et B essent; verum revolvente cum globo aquâ à C ad A, vis addititia post quadraturas agens, aquam deorsum semper urget, donec vi ablatitiâ vincatur; et similiter hæc vis ablatitia post syzygias sursum trahit aquas, quarum proinde minimæ altitudines non incident in quadraturas, sed post quadraturas, maximæ verò post syzygias. Insuper rotatio globi circa proprium axem maximas aquarum altitudines a syzygiis A et B versus quadraturas D et C transfert, intereadum vires L M, N M simul junctæ maximas eas aquarum altitudines in syzygiis instaurare perpetuò nituntur, aqua autem à C et D continuo fluit versus A et B, dum elevatio ab A versus D et a B versus C transfertur, et ideo inter A et D ut et inter B et C dantur duo motus contrarii quibus aqua accumulatur ita ut altitudines

aquam sursum in octantibus ante syzygias, ac desinunt trahere aquam sursum incipiuntque trahere aquam deorsum in octantibus post syzygias. Et inde maxima aquæ altitudo evenire potest in octantibus post syzygias, et minima in octantibus post quadraturas circiter; nisi quâtenus motus ascendendi vel descendendi ab his viribus impressus vel per vim insitam aquæ paulò diutius perseveret, vel per impedimenta alvei paulò citius sistatur.

Corol. 21. Eâdem ratione, quâ materia globi juxta æquatorem redundans efficit ut nodi regrediantur, atque ideo per hujus incrementum augetur iste regressus, per diminutionem verò diminuitur, et per ablationem tollitur; (*) si materia plusquam redundans tollatur, hoc est si globus juxta æquatorem vel depressior reddatur, vel rarior quam juxta polos, oriatur motus nodorum in consequentia.

Corol. 22. Et inde vicissim, ex motu nodorum innotescit constitutio globi. Nimirum si globus polos eosdem constanter servat, et motus fit in antecedentia, materia juxta æquatorem redundat; si in consequentia, deficit. Pone globum uniformem et perfectè circumscriptum in spatiis liberis primo quiescere; dein impetu quocunque obliquè in superficiem suam facto propelli, et motum inde concipere (v) partim circularem, partim in directum. Quoniam globus iste ad axes omnes per centrum suum transeuntes indifferenter se habet, neque propensior est in unum axem, unumve axis situm, (x) quam in alium quemvis; perspicuum est, quod is axem suum, axisque inclinationem vi propriâ nunquam mutabit. (y) Impellatur jam globus obliquè, in eâdem illâ superficiem parte, quâ prius, impulsu quocunque novo; et cùm citior vel serior impulsus effectum nil mutet, mani-

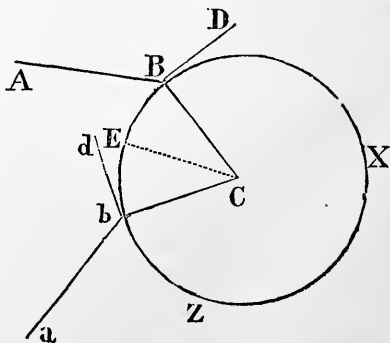
maximæ inter hæc puncta incidant ferè circà octantes.

(*) * Si materia plusquam redundans tollatur, seu si materia redundans negativa fiat, motus nodorum qui erat in antecedentia, negativus evadet, hoc est, oriatur motus nodorum in consequentia.

(v) * Partim circularem, partim in directum. Vis A B quâ globus B X Z obliquè impellitur, secundum directionem A B, in duas vires resolvitur, quarum altera ad centrum C juxta radium B C dirigitur, ei motum globi in directum producit, altera secundum tangentem B D radio B C normalem agit, et motum rotationis circà axem plano A B D X C perpendiculararem inducit.

(x) * Quam in alium quemvis; antequam motus imprimatur, perspicuum est quod is axem suum rotationis axisque inclinationem ad planum quodvis positione datum vi propriâ nunquam mutabit.

(y) * Impellatur jam globus obliquè, in eâdem illâ superficiem parte B quâ prius, &c.



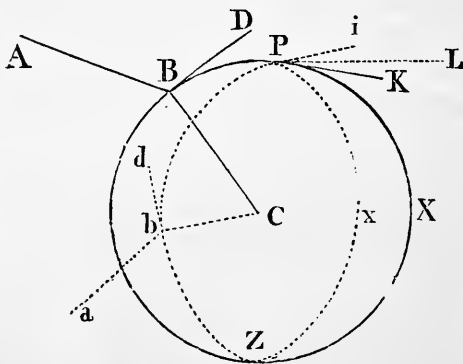
festum est, quod hi duo impulsus successivè impressi eundem producent motum, ac si simul impressi fuissent, hoc est, eundem, ac si globus vi simplici ex utroque (per legum Corol. 2.) compositâ impulsus fuisset, atque ideo simplicem, circa axem inclinatione datum. ^(z) Et par est ratio impulsûs secundi facti in locum alium quemvis in æquatore motus primi; ut et impulsus primi facti in locum quemvis in æquatore motus, quem impulsus secundus sine primo generaret; atque ideo impulsuum amborum factorum in loca quæcunque: ^(a) generabunt hi eundem motum circula-rem ac si simul et semel in locum intersectionis æquatorum motuum illo-rum, quos seorsim generarent, fuissent impressi. Globus igitur homo-geneus et perfectus non retinet motus plures distinctos, sed impressos omnes componit et ad unum reducit, et quâtenus in se est, gyatur semper motu simplici et uniformi circa axem unicum, inclinatione semper invaria-bili datum. Sed nec vis centripeta inclinationem axis, aut rotationis ve-locitatem mutare potest. Si globus plano quocunque, per centrum suum et centrum in quod vis dirigitur transeunte, dividi intelligatur in duo he-misphæria; urgebit semper vis illa utrumque hemisphærium æqualiter, et propterea globum, quoad motum rotationis, ^(b) nullam in partem inclinabit. Addatur vero alicubi inter polum et æquatorem materia nova in formam

(^z) * *Et par est ratio impulsus secundi facti* sim producent quos producerent, si in punctum *in locum alium quemvis b, in æquatore B X Z* P singulæ agerent seorsim, forentque P K, P i; *motûs primi*. Resolvitur enim vis a b in duas vires, quarum una ad centrum C dirigitur per radius b C; alia secundum tangentem b d agit; et vires duæ utriusque impulsus ad centrum C per radios B C, b C directæ in unam componentur secundum directionem radii alicujus E C agentem, quâ globus in directum movebitur uniformiter; vires autem B D, b d quæ rotationem globi producant, eodem modo componentur ad unicum rotationis motum efficiendum ac si fuisset vis B D in loco b impressa, aut vis b d, in loco B æquatoris B X Z motûs primi; vis enim B D eundem rotationis motum inducit, sive imprimatur in B, sive in b.

(A) • *Generabunt hi, &c.* Globus B P X Z b duabus viribus A B, a b obliquè impellatur, iisque singulis in duas alias vires, secundùm directiones B C, B D; b c, b d ut suprà divisiss, sit B P X Z æquator quem punctum B vi B D describit, et b P x Z æquator alter quem punctum b vi b d describet, horum æquatorum communes intersectiones P, Z; vires quæ secundum radios B C, b c, agunt in unam componentur, ut suprà, quæ globus movebitur uniformiter in directum; vires autem B D, b d, eosdem rotationis motus seor-

sed vires duæ P K, P i, in unam P L componuntur quæ globus circa æquatorem unicum rotatur. Quarè vires seu impulsus A B, a b generabunt motum unicum simplicem ac uniformem, tum directum, tum circularem circa axem unicum inclinatione semper invariabili datum adeoque et sibi semper parallelum.

(b) * *Nullam in partem inclinabit.* Sit S
virium centrum, A P Q E globus circà axem

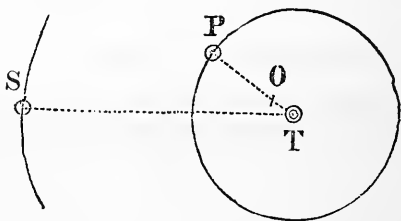


nem absolutam, quæ magis dirigitur in corporum T et P commune gravitatis centrum O, quam in corpus maximum T, quæque quadrato distantiae S O magis est proportionalis reciprocè, quam quadrato distantiae S T: (c) ut rem perpendiculari facile constabit.

PROPOSITIO LXVIII. THEOREMA XXVIII.

Positis iisdem attractionum legibus, dico quod corpus exterius S, circa interiorum P et T commune gravitatis centrum O, radiis ad centrum illud ductis, describit areas temporibus magis proportionales, et orbem ad formam ellipsos umbilicum in centro eodem habentis magis accedentem, si corpus intimum et maximum his attractionibus perinde atque cætera agitetur, quam si id vel non attractum quiescat, vel multò magis aut multò minus attractum aut multò magis aut multò minus agitetur.

(d) Demonstratur eodem fere modo cum Prop. LXVI. sed argumento prolixiore, quod ideo prætereo. Sufficeret rem sic æstimare. Ex demonstratione Propositionis novissimæ liquet centrum, in quod corpus S conjunctis viribus urgetur, proximum esse communi centro gravitatis duorum illorum. Si coincideret hoc centrum cum centro illo communi, et quiesceret commune centrum gravitatis corporum trium; describerent corpus S ex unâ parte, et commune centrum aliorum duorum ex alterâ parte, circa commune omnium centrum quiescens, ellipses accuratas. (e) Liquet hoc per Corolla-

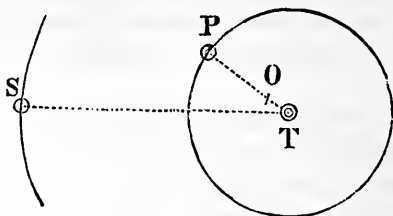


(c) * *Ut rem perpendiculari facile constabit.* Nam vis acceleratrix compositæ quâ corpus S a corporibus T et P trahitur directio cadit inter lineas S P, S T, et cæteris paribus, magis accedit ad S T, quam ad S P (si modò corpus majus T cæteris paribus magis trahat quam corpus minus P) quemadmodum centrum gravitatis O, propius est corpori T quam corpori P; præterea manente distantia S T, vis acceleratrix corporis S versùs P augetur vel diminuitur, dum decrescit vel crescit distantia S P, et similiter distantia S O, augetur vel diminuitur, prout crescit vel decrescit S P; Quare attractio absoluta (seu tota) corporis S quadrato distantiae S O magis proportionalis est reciprocè, quam quadrato distantiae S T; insuper commune gravitatis centrum O fere spectari potest tanquam punctum in quo corporum T et P vires physicè uniuntur.

(d) * *Demonstratur eodem fere modo, &c.* Nimirum resolvendo singulas attractiones corporis S versùs P et T in alias quarum duæ ad centrum O dirigantur et aliæ duæ directiones habeant rectæ T P parallelas.

(e) * *Liquet hoc, &c.* Nam si centrum in quod corpus S conjunctis viribus urgetur coincideret cum centro O gravitatis communi duorum corporum P et T hæc duo corpora P et T ellipses accuratas seorsim describerent circum se mutuo et circum centrum illud O (per Corol. 2. Prop. 58). Et præterea corpus S ex unâ parte et duorum aliorum systema tanquam unum corpus consideratum, hoc est, eorum commune gravitatis centrum O ex alterâ parte ellipses accuratas describerent circum commune trium S, T, P centrum gravitatis quiescens (per Corol. 2. Prop. 58.) Quod adhuc clarius intelligetur, si

rium secundum Propositionis LVIII. collatum cum demonstratis in Prop. LXIV. et LXV. Perturbatur iste motus ellipticus aliquantulum per distantiam centri duorum a centro, in quod tertium S attrahitur. Detur præterea motus communi trium centro, et augebitur perturbatio. Proinde minima est perturbatio, ubi commune trium centrum quiescit; hoc est, ubi corpus intimum et maximum T lege cæterorum attrahitur: fitque major semper, ubi trium commune illud centrum, ^(f) minuendo motum corporis T, moveri incipit, et magis deinceps magisque agitur.



Corol. Et hinc, si corpora plura minora revolvantur circa maximum, colligere licet quod orbitæ descriptæ propius accedent ad ellipticas, et arearum descriptiones fient magis æquabiles, si corpora omnia viribus acceleratricibus, quæ sunt ut eorum vires absolutæ directæ et quadrata distantiarum inversè, se mutuo trahant agentque, et orbitæ cujusque umbilicus collocetur in communi centro gravitatis corporum omnium interiorum [^(e) nimirum umbilicus orbitæ primæ et intimæ in centro gravitatis corporis maximi et intimi; ille orbitæ secundæ, in communi centro gravitatis corporum duorum intimorum; iste tertiæ, in communi centro gravitatis trium interiorum; et sic deinceps] quam si corpus intimum quiescat et statuatur communis umbilicus orbitarum omnium.

PROPOSITIO LXIX. THEOREMA XXIX.

In systemate corporum plurium, A, B, C, D, &c. si corpus aliquod A trahit cætera omnia B, C, D, &c. viribus acceleratricibus quæ sunt reciproçè ut

legantur Propositiones 64. 65. Perturbatur iste motus ellipticus aliquantulum per distantiam centri O, duorum P et T a centro in quod tertium S trahitur. Detur præterea motus non uniformis in directum communi trium centro, (quod continget, si corpus intimum et maximum T, lege cæterorum non attrahitur, ut ex dictis patet) et augebitur perturbatio, proinde, &c.

^(f) * Minuendo motum corporis T, &c. Quâ ratione fit ut centrum commune trium corporum, interea dum corpora S et P moventur, nunc accedat ad corpus T nunc ab illo recedat, pro mutata corporum illorum distantia, et hinc magis ac magis perturbabitur motus ellipticus et magis

ac magis deinceps agitabitur centrum commune gravitatis trium corporum.

^(e) * Nimirum umbilicus orbitæ primæ et intimæ, quam v. gr. corpus parvum P hic describit in centro gravitatis corporis maximi et intimi T quod ferè coincidit cum communi centro O gravitatis duorum P et T (per Cas. 1. Prop. 65.); umbilicus orbitæ secundæ quam v. gr. corpus S describit in communi centro gravitatis O, corporum duorum intimorum P et T; umbilicus tertiæ orbitæ quam aliud corpus longius distans describeret in communi centro gravitatis trium interiorum P, T, S, &c. Nam idem est ratiocinium seu tria seu quatuor aut plura sint corpora (ut in Prop. 64. 65.)

quadrata distantiarum a trahente ; et corpus aliud B trahit etiam cætera A, C, D, &c. viribus quæ sunt reciproce ut quadrata distantiarum a trahente : erunt absolutæ corporum trahentium A, B vires ad invicem, ut sunt ipsa corpora A, B, quorum sunt vires.

Nam attractiones acceleratrices corporum omnium B, C, D versus A, paribus distantiiis, sibi invicem æquantur ex hypothesi ; et similiter attractiones acceleratrices corporum omnium versus B, paribus distantiiis, sibi invicem æquantur. Est autem absoluta vis attractiva corporis A ad vim absolutam attractivam corporis B, ^(h) ut attractio acceleratrix corporum omnium versus A ad attractionem acceleratricem corporum omnium versus B, paribus distantiiis ; ⁽ⁱ⁾ et ita est attractio acceleratrix corporis B versus A, ad attractionem acceleratricem corporis A versus B. Sed attractio acceleratrix corporis B versus A est ad attractionem acceleratricem corporis A versus B, ut massa corporis A ad massam corporis B ; propterea quod vires motrices, quæ (per definitionem secundam, septimam et octavam) sunt ut vires acceleratrices et corpora attracta conjunctim, hic sunt (per motus legem tertiam) ^(k) sibi invicem æquales. Ergo absoluta vis attractiva corporis A est ad absolutam vim attractivam corporis B, ut massa corporis A ad massam corporis B. Q. e. d.

Corol. 1. Hinc si singula systematis corpora A, B, C, D, &c. seorsim spectata trahant cætera omnia viribus acceleratricibus, quæ sunt reciproce ut quadrata distantiarum a trahente ; erunt corporum illorum omnium vires absolutæ ad invicem ut sunt ipsa corpora.

Corol. 2. Eodem argumento, si singula systematis corpora A, B, C, D, &c. seorsim spectata trahant cætera omnia viribus acceleratricibus, quæ sunt vel reciproce, vel directè in ratione dignitatis cujuscunque distantiarum a trahente, quæve secundum legem quamcunque communem ex distantiiis ab unoquoque trahente definiuntur ; constat quod corporum illorum vires ^(l) absolutæ sunt ut corpora.

Corol. 3. In systemate corporum quorum vires decrescunt in ratione

^(h) * *Ut attractio acceleratrix corporum omnium, seu ut attractio acceleratrix uniuscujusque corporis versus A, &c. Patet enim quod si vis absoluta dupla vel tripla, &c. sit, actio quoque acceleratrix in distantia datâ dupla vel tripla erit.*

⁽ⁱ⁾ * *Et ita est attractio acceleratrix corporis B versus A, ad attractionem acceleratricem corporis A versus B, ob distantiam inter B et A, et A et B eandem.*

^(k) * *Sibi invicem æquales.* Si enim attractio acceleratrix corporis B versus A dicatur V et attractio acceleratrix corporis A versus B dicatur v ; vis motrix in B, erit $B \times V$; in A erit $A \times v$; et (per leg. 3^{am}.) $B \times V = A \times v$. Unde $V : v = A : B$. Ergo absoluta, &c.

^(l) * *Vires absolutæ sunt ut corpora.* Omnia enim ratiocinia eadem manent in hujus Corollarii hypothesi ac in demonstratione et hypothesi Propositionis.

duplicatâ distantiarum, si minora circa maximum in ellipsis, umbilicum communem in maximi illius centro habentibus, ^(m) quam fieri potest accuratissimis revolvantur; et radiis ad maximum illud ductis describant areas temporibus quam maximè proportionales: erunt corporum illorum vires absolutæ ad invicem, aut accuratè aut quamproximè, in ratione corporum; et ⁽ⁿ⁾ contra. Patet per Corol. Prop. LXVIII. collatum cum hujus Corol. 1.

Scholium.

His propositionibus manuducimur ad analogiam inter vires centripetas, et corpora centralia, ad quæ vires illæ dirigi solent. Rationi enim consentaneum est, ut vires, quæ ad corpora diriguntur, pendeant ab eorundem naturâ et quantitate, ut fit in magneticis. Et quoties hujusmodi casus incidunt, æstimandæ erunt corporum attractiones, assignando singulis eorum particulis vires proprias, et colligendo summas virium. Vocem attractionis hic generaliter usurpo pro corporum conatu quocunque accedendi ad invicem: sive conatus iste fiat ab actione corporum vel se mutuo petentium, vel per spiritus emissos se invicem agitantium; sive is ab actione ætheris, aut aëris, mediivæ cujuscunque seu corporei seu incorporei oriatur corpora innatantia in se invicem utcunque impellentis. Eodem sensu generali usurpo vocem *impulsus*, non species virium et qualitates physicas, sed quantitates et proportionales mathematicas in hoc tractatu expendens ut in definitionibus explicui. In mathesi investigandæ sunt virium quantitates et rationes illæ, quæ ex conditionibus quibuscunque positæ consequentur: deinde, ubi in physicam descenditur conferendæ sunt hæ rationes cum phænomenis; ut innotescat quænam virium conditiones singulis corporum attractivorum generibus competant. Et tum demum de virium speciebus, causis et rationibus physicis tutius disputare licebit. Videamus igitur quibus viribus corpora sphærica, ex particulis modo jam exposito attractivis constantia, debeant in se mutuo agere; et quales motus inde consequantur.

^(m) * *Quam fieri potest accuratissimis revolvantur*, ut in duobus casibus Prop. 65. expositum est.

⁽ⁿ⁾ * *Et contrâ.* Si vires corporum illorum absolutæ sint ad invicem in ratione corporum, et minora corpora circa maximum in ellipsis umbilicum communem in maximi illius centro habentibus, quam fieri potest, accuratissimis re-

volvantur, et radiis ad maximum illud ductis describant areas temporibus quam maximè proportionales, corporum illorum seorsim spectatorum vires acceleratrices decrescent in ratione duplicatâ distantiarum aut accuratè aut quamproximè; ut liquet ex Corol. 2^o. Prop. 58. collato cum Prop. 64. 65.

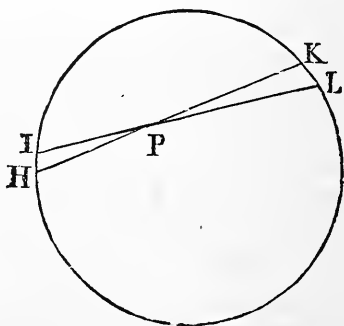
SECTIO XII.

De corporum sphaericorum viribus attractivis.

PROPOSITIO LXX. THEOREMA XXX.

Si ad sphaericæ superficiei puncta singula tendant vires æquales centripetæ decrescentes in duplicatâ ratione distantiarum a punctis: dico quod corpusculum intra superficiem constitutum his viribus nullam in partem attrahitur.

Sit $H I K L$ superficies illa sphaerica, et P corpusculum intus constitutum. Per P agantur ad hanc superficiem lineæ duæ $H K$, $I L$, arcus quam minimos $H I$, $K L$ intercipientes; et, ob triângula $H P I$, $L P K$ (per Corol. 3. Lem. VII.) ^(o) similia, arcus illi erunt distantis $H P$, $L P$ proportionales; et superficiei sphaericæ particulæ quævis ad $H I$ et $K L$, rectis per punctum P transeuntibus undique terminatæ, erunt in duplicatâ illâ ratione. Ergo vires harum particularum in corpus P exercitæ sunt inter se æquales. Sunt enim ut particulæ directæ, et quadrata distantiarum inverse. Et hæ duæ rationes componunt rationem æqualitatis. Attractiones igitur, in contrarias partes æqualiter factæ, se mutuo destruent. Et simili argumento, attractiones omnes per totam sphaericam superficiem a contrariis attractionibus destruuntur. Proinde corpus P nullam in partem his attractionibus impellitur. Q. e. d.



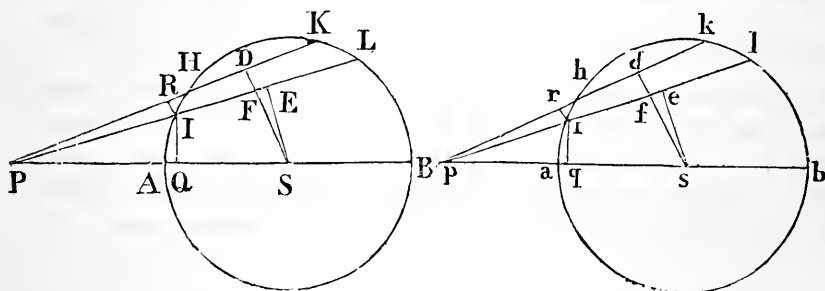
^(o) * *Similia*, &c. Anguli enim $H P I$, $L P K$ ad verticem oppositi, et anguli $H I L$, $L K H$ eidem arcui insistentes æquantur (per Prop. 27. Lib. 3. Elem.) Nam arcus evanescentes $H I$, $K L$, pro ipsorum chordis usurpari possunt (per Cor. 3. Lem. 7.) Quare arcus $H I$, $K L$ distantis $H P$, $L P$ proportionales sunt, et hinc si ad superficiem sphaericam per punctum

P ductæ intelligantur innumeræ rectæ ad arcus quamminimos ut $H I$, $K L$ terminatæ, rectæ illæ figuras solidas (pyramides vel conos) similes formabunt quorum bases in superficie sphaericâ similes erunt, et proindè (per Lem. 5.) rationem habebunt duplicatam laterum $H I$, $H L$ seu distantiarum $H P$, $L P$. Ergo vires, &c.

PROPOSITIO LXXI. THEOREMA XXXI.

Isdem positis, dico quod corpusculum extra sphaericam superficiem constitutum attrahitur ad centrum sphaerae; vi reciproce proportionali quadrato distantiae suae ab eodem centro.

Sint $A H K B$, $a h k b$ aequales duae superficies sphaericae, centris S, s , diametris $A B$, $a b$ descriptae, et P, p corpuscula sita extrinsecus in diametris illis productis. Agantur a corpusculis lineae $P H K$, $P I L$, $p h k$, $p i l$, auferentes a circulis maximis $A H B$, $a h b$, aequales arcus $H K$, $h k$ et $I L$, $i l$: Et ad eas demittantur perpendiculara $S D$, $s d$; $S E$, $s e$; $I R$, $i r$; quorum $S D$, $s d$ secant $P L$, $p l$ in F et f : Demittantur etiam



ad diametros perpendiculara $I Q$, $i q$. Evanescant anguli $D P E$, $d p e$: et (P) ob aequales $D S$ et $d s$, $E S$ et $e s$, lineae $P E$, $P F$ et $p e$, $p f$ et lineola $D F$, $d f$ pro aequalibus habeantur; quippe quarum ratio ultima, angulis illis $D P E$, $d p e$ simul evanescentibus, (q) est aequalitatis. His itaque constitutis, (r) erit $P I$ ad $P F$ ut $R I$ ad $D F$, et $p f$ ad $p i$ ut $d f$, vel $D F$ ad $r i$; et ex aequo $P I \times p f$ ad $P F \times p i$ ut $R I$ ad $r i$, hoc est (per Corol. 3. Lem. VII.) (s) ut arcus $I H$ ad arcum $i h$. (t) Rursus

(P) * Et ob aequales $D S$ et $d s$, $E S$ et $e s$, &c. (Per Prop. 14. Lib. 3. Elem.)

(q) * Est aequalitatis. Nam evanescentibus $D P E$, $d p e$ angulis, puncta F, f coincidunt cum punctis E, e , et iis punctis coincidentibus, aequales sunt lineae $P E$, $P F$ et $p e$, $p f$, et lineolae $D F$, $d f$ fiunt differentiae linearum $D S$ et $E S$, $d s$ et $e s$, ac proinde (ob aequales $D S$ et $d s$, $E S$ et $e s$) aequantur.

(r) * Erit $P I$ ad $P F$, &c. Ob parallelas $R I$, $D F$ et $r i$, $d f$.

(s) Ut arcus $I H$ ad arcum $i h$. Nam triangula evanescentia $R H I$, $r h i$ similia sunt ob angulos ad R et r rectos (ex Hyp.) et angulos ad H et h aequales, quos nempe metiuntur dimidii arcus aequales $H K$, $h k$ (per Prop. 32. Lib. 3. Elem.) arcus enim $H I$, $h i$ pro tangentibus in H et h usurpari possunt (per Cor. 3. Lem. 7.) Quare $R I$ est ad $r i$, ut arcus $I H$ ad arcum $i h$.

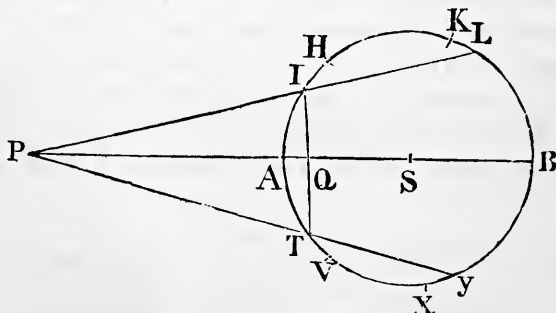
(t) * Rursus, &c. Ob triangula $P Q I$, $P E S$ et $p q i$, $p e s$ similia, est $P I : P S = I Q : S E$.

P I ad P S ut I Q ad S E, et p s ad p i ut s e vel S E ad i q; et ex æquo P I \times p s ad P S \times p i ut I Q ad i q. Et conjunctis rationibus P I quad. \times p f \times p s ad p i quad. \times P F \times P S, ut I H \times I Q ad i h \times i q; hoc ^(u) est, ut superficies circularis, quam arcus I I I convolutione semicirculi A K B circa diametrum A B describet, ad superficiem circularem, quam arcus i h convolutione semicirculi a k b circa diametrum a b describet. Et vires, quibus hæ superficies secundum lineas ad se tendentes attrahunt corpuscula P et p, sunt (per hypothesin) ut ipsæ superficies directè, et quadrata distantiarum superficierum a corporibus inversè, hoc est, ut p f \times p s ad P F \times P S. Suntque hæ vires ad ipsarum partes obliquas, quæ (factâ per legem Corol. 2. resolutione virium) secundum lineas P S, p s ad centra tendunt, ut P I ad P Q, et p i ad p q; id est (ob similia triangula P I Q et P S F, p i q et p s f) ut P S ad P F, et p s ad p f. Unde, ex æquo, fit attractio corpusculi hujus P versus S ad attractionem corpusculi p versus s, ut $\frac{P F \times p f \times p s}{P S} \text{ ad } \frac{p f \times P F \times P S}{p s}$, hoc ^(x) est, ut p s quad. ad P S quad. Et simili argumento vires, quibus superficies convolutione arcuum K L, k l descriptæ trahunt corpuscula, erunt ut p s quad. ad P S quad. inque eâdem ratione erunt vires superficierum omnium circularium in quas utraque superficies sphærica, capiendo semper s d æqualem S D et s e æqualem S E, distingui potest. Et,

^(u) 515. * Hoc est, ut superficies circularis, quam arcus I H convolutione semicirculi A K B circa diametrum A B describet. Nam circularis illa superficies æqualis est facto ex peripheriâ circuli cujus radius I Q in arcum avanescentem I H, et similiter superficies circularis quam arcus i h, convolutione semicirculi a k b circa diametrum a b, describet, æquatur facto ex peripheriâ circuli cujus radius i q, in arcum evanescentem i h, (152). Cum igitur peripheriæ circularum sint ut radii, facta illa erunt inter se ut I H \times I Q, ad i h \times i q.

^(x) * Hoc est, &c. Deleto in utrâque quantitate facto P F \times p f, erunt attractiones ut $\frac{p s}{P S}$ ad $\frac{p s}{P S}$ seu reducendo ad eundem denominatorem, ut $\frac{p s^2}{P S \times p s}$ ad $\frac{P S^2}{p s \times P S}$, hoc est, ut p s² ad P S².

516. Scholium. Si ex alterâ parte diametri A B capiatur arcus A T = A I, et arcus T V = I H, vires obliquæ et æquales I Q, T Q sibi



mutuò opponuntur, nullumque motum in corpusculo P producent. Undè patet vires integras in corpusculum P ab utroque hemispherio A H B, A T B seu a totâ superficiei sphæricæ exercitas esse omninò viribus ad centrum S tendentibus æquales.

per compositionem, vires totarum superficierum sphæricarum in corpuscula exercitæ erunt in eâdem ratione. Q. e. d.

PROPOSITIO LXXII. THEOREMA XXXII.

Si ad sphæræ cujusvis puncta singula tendant vires æquales centripetæ decre-scentes in duplicatâ ratione distantiarum a punctis; ac detur tum sphæræ densitas, tum ratio diametri sphæræ ad distantiam corpusculi a centro ejus: dico quod vis quâ corpusculum attrahitur, proportionalis erit semidiametro sphæræ.

Nam concipe corpuscula duo seorsim a (°) sphæris duabus attrahi, unum ab unâ et alterum ab alterâ, et distantias eorum a sphærarum centris proportionales esse diametris sphærarum respectivè, sphæras autem resolvi in particulas similes et similiter positas ad corpuscula. Et attractiones corpusculi unius, factæ versus singulas particulas sphæræ unius, erunt ad attractiones alterius versus analogas totidem particulas sphæræ alterius, in ratione compositâ ex ratione particularum directè et ratione duplicatâ distantiarum inversè. Sed particulæ sunt ut sphæræ, hoc est, in ratione triplicatâ diametrorum, et distantie sunt ut diametri; et ratio prior directè unâ cum ratione posteriore bis inversè est ratio diametri ad diametrum. Q. e. d.

Corol. 1. Hinc si corpuscula in circulis, circa sphæras ex materiâ æqualiter attractivâ constantes, revolvantur; sintque distantie a centris sphærarum proportionales earumdem diametris: Tempora periodica erunt æqualia.

Corol. 2. Et vice versâ, si tempora periodica sunt æqualia, distantie erunt proportionales diametris. Constant hæc duo per Corol. 3. Prop. IV.

Corol. 3. Si ad solidorum duorum quorumvis, similium et æqualiter densorum, puncta singula tendant vires æquales centripetæ decre-scentes in duplicatâ ratione distantiarum a punctis; vires, quibus corpuscula, (°) ad solida illa duo similiter sita, attrahentur ab iisdem, erunt ad invicem ut diametri solidorum.

(°) * *A sphæris duabus homogeneis, ejusdemque densitatis itâ nempè ut sub æqualibus voluminibus æquales materiæ quantitates ubique contineantur, et vis absoluta attrahens sit semper ut quantitas materiæ.*

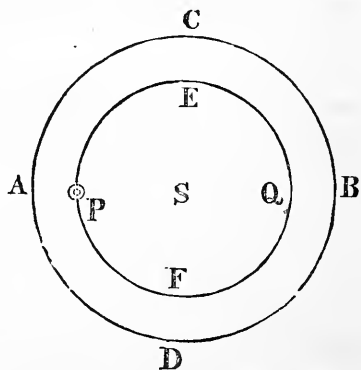
(°) * *Ad solida illa duo similiter sita, itâ ut distantie corpusculorum a similibus solidorum duorum particulis sint ut eorum solidorum diametri.*

517. *Scholium.* Hinc si hujusmodi sphæra per centrum perforetur, æqualia erunt tempora omnia, quibus corpus de locis quibusvis ad centrum usque cadit, (per Cor. 2. Prop. 38.) et corpusculorum in hujusmodi sphærâ per spatia libera minima revolvantium tempora periodica erunt æqualia (per Cor. 3. Prop. 4.) atque ad hujus generis sphæram pertinent quæ in Prop. 51. 52. hujusque Corollariis demonstrata sunt.

PROPOSITIO LXXIII. THEOREMA XXXIII.

Si ad sphaeræ alicujus datæ puncta singula tendant æquales vires centripetæ decrescentes in duplicatâ ratione distantiarum a punctis : dico quod corpusculum intra sphaeram constitutum attrahitur vi proportionali distantie suæ ab ipsius centro.

In sphaerâ A C B D, centro S descriptâ, locetur corpusculum P ; et centro eodem S, intervallo S P, concipe sphaeram interiorem P E Q F describi. Manifestum est, (per Prop. LXX.) quod sphaericæ superficies concentricæ, ex quibus sphaerarum differentia AE B F componitur, attractionibus suis per attractiones contrarias destructis, nil agunt in corpus P. Restat sola attractio sphaeræ interioris P E Q F. Et (per Prop. LXXII.) hæc est ut distantia P S. Q. e. d.

*Scholium.*

Superficies, ex quibus solida componuntur, hic non sunt purè mathematicæ, sed orbes adeo tenues, ut eorum crassitudo instar nihili sit ; nimirum orbes evanescentes, ex quibus sphaera ultimò constat, ubi orbium illorum numerus augetur et crassitudo minuitur in infinitum. Similiter per puncta, ex quibus lineæ, superficies et solida, componi dicuntur, intelligendæ sunt particulæ æquales magnitudinis contemnendæ.

PROPOSITIO LXXIV. THEOREMA XXXIV.

Iisdem positis, dico quod corpusculum extra sphaeram constitutum attrahitur vi reciprocè proportionali quadrato distantie suæ ab ipsius centro.

Nam distinguatur sphaera in superficies sphaericas innumeras. concentricas, et attractiones corpusculi a singulis superficiebus oriundæ erunt reciprocè proportionales quadrato distantie corpusculi a centro (per Prop.

LXXI.) Et componendo fiet summa attractionum, hoc est attractio corpusculi in sphaeram totam, in eâdem ratione. Q. e. d.

Corol. 1. Hinc in æqualibus distantiiis a centris homogenearum sphaerarum attractiones sunt ut sphaeræ. Nam (per Prop. LXXII.) si distantiae sunt proportionales diametris sphaerarum, vires erunt ut diametri. Minuatur distantia major in illâ ratione; et, distantiiis jam factis æqualibus, augebitur attractio in duplicatâ illâ ratione; ideoque erit ad attractionem alteram in triplicatâ illâ ratione, hoc est, in ratione sphaerarum.

Corol. 2. In distantiiis quibusvis attractiones sunt ut sphaeræ applicatae ^(a) ad quadrata distantiarum.

Corol. 3. Si corpusculum, extra sphaeram homogeneam positum, trahitur vi reciproce proportionali quadrato distantiae suae ab ipsius centro, constet autem sphaera ex particulis attractivis; ^(b) decrescet vis particulæ cuiusque in duplicatâ ratione distantiae a particula.

PROPOSITIO LXXV. THEOREMA XXXV.

Si ad sphaeræ datae puncta singula tendant vires æquales centripetæ, decrescentes in duplicatâ ratione distantiarum a punctis; dico quod sphaera quævis alia similis ab eâdem attrahitur vi reciproce proportionali quadrato distantiae centrorum.

Nam particulæ cuiusvis attractio est reciproce ut quadratum distantiae suae a centro sphaeræ trahentis, (per Prop. LXXIV.) et propterea eadem est, ac si vis tota attrahens maneret de corpusculo unico sito in centro huius sphaeræ. Hæc autem attractio tanta est, quanta foret vicissim attractio corpusculi ejusdem, si modo illud a singulis sphaeræ attractæ particulis eâdem vi traheretur, quâ ipsas attrahit. Foret autem illa corpusculi attractio (per Prop. LXXIV.) reciproce proportionalis quadrato distantiae suae a centro sphaeræ; ideoque huic æqualis attractio sphaeræ est in eâdem ratione. ^(c) Q. e. d.

^(a) * *Ad quadrata distantiarum.* Nam æqualibus distantiiis, attractiones sunt ut sphaeræ (per Cor. 1.) et æqualibus sphaeris, attractiones sunt ut quadrata distantiarum a centris reciproce (per Prop. 74.) Quare variantibus sphaeris et distantiiis simul, attractiones sunt ut sphaeræ ad quadrata distantiarum applicatae.

^(b) * *Decrescet vis particulæ cuiusque, &c.* Nam cum vis attractrix absoluta quantitati materiæ proportionalis supponatur, si vis particulari sphaeræ in majori vel minori ratione quam

duplicatâ distantiarum a particulis decresceret, corpusculum extra sphaeram constitutum majori vel minori vi traheretur quam reciproce proportionali quadrato distantiae a centro sphaeræ.

^(c) * *Q. e. d.* Demonstratio clarius intelligitur appositâ figurâ. Sphaera A sphaeram similem B attrahat, et vis acceleratrix quâ sphaeræ B particula quævis P in centrum C sphaeræ A urgetur est reciproce ut quadratum distantiae P C a centro sphaeræ trahentis (per Prop. 74.) et propterea eadem est ac si vis tota

(^d) *Corol. 1.* Attractiones sphaerarum, versus alias sphaeras homogeneas, sunt ut sphaerae trahentes applicatae ad quadrata distantiarum centrorum suorum a centrīs earum, quas attrahunt.

Corol. 2. Idem valet, ubi sphaera attracta etiam attrahit. Namque hujus puncta singula trahent singula alterius eadem vi, quā ab ipsis vicissim trahuntur; ideoque cum in omni attractione urgeatur (per Legem 3.) tam punctum attrahens, quam punctum attractum, (^e) geminabitur vis attractionis mutuae, conservatis proportionibus.

Corol. 3. Eadem omnia, quae superius de motu corporum circa umbilicum conicarum sectionum (^f) demonstrata sunt, obtinent, ubi sphaera attrahens locatur in umbilico: et corpora moventur extra sphaeram.

Corol. 4. Ea vero, quae de motu corporum circa centrum conicarum sectionum (^g) demonstrantur, (^h) obtinent ubi motus peraguntur intra sphaeram.

attrahens maneret de corpusculo unico C sito in centro sphaerae trahentis A; vis autem tota acceleratrix quā sphaera integra B a corpusculo C trahitur, tanta est quanta foret vicissim attractio ejusdem corpusculi C versus centrum D sphaerae B, si modò illud corpusculum C a singulis sphaerae B particulis eadem vi traheretur quā ipsas attrahit, ut manifestum est. Foret autem (in hac hyp.) illa corpusculi C versus centrum D attractio (per Prop. 74.) reciprocè proportionalis quadrato distantiae suae CD a centro D sphaerae B; Quare attractio sphaerae B versus C ut potè aequalis attractioni suppositae corpusculi C versus D, est in eadem ratione inversā quadrati distantiae CD. Q. e. d.

(^d) * *Cor. 1.* Vis acceleratrix quā sphaera B particula quavis P versus centrum C sphaerae A urgetur, est ut sphaera A applicata ad quadratum distantiae CP, (per Cor. 2. Prop. 74.) et propterea eadem est ac si vis tota attrahens quae esset ut sphaera A maneret de corpusculo unico C sito in centro sphaerae trahentis A; et similiter sphaera tota B ad centrum C trahitur ut corpusculum unicum in centro D situm (per Prop. 75.) vis autem acceleratrix quā corpusculum in centro D positum versus C trahitur, est ut vis absoluta corpusculi C seu ut sphaera A directè et quadratum distantiae CD inversè. Quare attractiones sphaerarum acceleratrices versus alias sphaeras homogeneas sunt ut sphaerae trahentes applicatae, &c.

(^e) * *Geminabitur vis attractionis mutuae, &c.* Si sphaera A sphaeram B vi propria attrahente destitutam trahat, erit vis acceleratrix sphaerae B versus centrum C sphaerae trahentis

A, ut $\frac{A}{C D^2}$, (per Cor. 2. Prop. 75.) jam si

sphaerae B vis propria attrahens tribuatur, vis acceleratrix sphaerae A versus B inde genita, erit ut $\frac{B}{C D^2}$, et vis illius motrix (15) ut $\frac{B \times A}{C D^2}$, quae



(per Leg. 3.) aequatur vi motrici sphaerae B versus sphaeram A ex reactione sphaerae A genitae. Quare dividendo per B, vis acceleratrix sphaerae B, versus centrum C sphaerae A, rursus erit ut $\frac{A}{C D^2}$, ideoque attractio tota acceleratrix sphaerae B, versus centrum sphaerae A, erit in distantia datā ut sphaera ipsa A, et in distantia variabili ut sphaera A ad quadratum distantiae applicata. Quod similiter dicendum est de attractione sphaerae A versus centrum sphaerae B. Observandum verò est quod si (ut hic supponitur) vires absolutae particularum utriusque sphaerae A et B aequales sint et utraque vi propria attractivā quantitati materiae proportionali praedita sit, attractio mutua dupla evadit.

(^f) * *Demonstrata sunt.* (In Sect. 3a. 6a. 7a. 9a. 11a.)

(^g) * *Demonstrantur.* (Prop. 10. 38. 47. 51. 52. 64.)

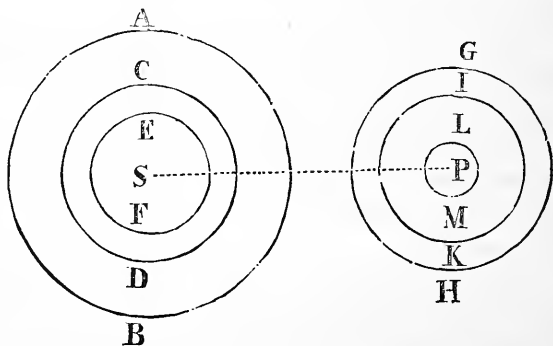
(^h) * *Obtinent, &c.* (Per Prop. 63.) ubi motus peraguntur intra sphaeram, hoc est, ubi intra sphaeram solidam via corporibus motis libera conceditur.

PROPOSITIO LXXVI. THEOREMA XXXVI.

Si sphaera in progressu a centro ad circumferentiam (quoad materiae densitatem et vim attractivam) utcunque dissimilares, in progressu verò per circuitum ad datam omnem a centro distantiam sunt undique similes; et vis attractiva puncti cuiusque decrescit in duplicatâ ratione distantiae corporis attracti: dico quod vis tota, quâ huiusmodi sphaera una attrahit aliam, sit reciproce proportionalis quadrato distantiae centrorum.

Sunto sphaerae quocunque concentricae similes A B, C D, E F, &c. quarum interiores additæ exterioribus componant materiam densiorem versus centrum, vel subductæ relinquant tenuiorem; et hæ (per Prop. LXXV.) trahent

sphaeras alias quocunque concentricas similes G H, I K, L M, &c. singulae singulas, viribus reciproce proportionalibus quadrato distantiae S P. ⁽¹⁾ Et componendo vel di-



videndo, summa virium illarum omnium, vel excessus aliquarum supra alias; hoc est, vis, quâ sphaera tota, ex concentricis quibuscunque vel concentricarum differentiis composita A B, trahit totam ex concentricis quibuscunque vel concentricarum differentiis compositam G H; erit in eâdem ratione. Augeatur numerus sphaerarum concentricarum in infinitum sic, ut materiae densitas unâ cum vi attractivâ, in progressu a circumferentiâ ad centrum, secundum legem quamcunque crescat vel decrescat; et, additâ materiâ non attractivâ, compleatur ubivis densitas deficiens, eo ut sphaerae acquirant formam quamvis optatam; et

(1) * Et componendo vel dividendo, &c. Hoc est, in datâ distantia centrorum communium S, P, sit attractio sphaerarum G H, I K, L M à sphaerâ A B, a, b, c; a sphaerâ C D, d, e, f; a sphaerâ E F, g, h, i: variante verò illâ distantia communium centrorum S, P vires omnes illæ mutabuntur respectivè secundum rationem illam

inversam quadrati distantiae centrorum, ergò summa vel differentia virium quibus omnes sphaerae G H, I K, L M à sphaeris A B, C D, E F attrahuntur in primâ distantia, erit ad summam vel differentiam virium in altero casu inversè ut quadrata distantiarum.

vis, quâ harum una attrahet alteram, erit etiamnum, per argumentum superius, in eâdem illâ distantîæ quadratæ ratione inversâ. Q. e. d.

Corol. 1. Hinc si ejusmodi sphæræ complures sibi invicem per omnia similes, se mutuò trahant; attractiones acceleratrices singularum in singulas erunt, in æqualibus quibusvis centrorum distantîis, ut sphæræ attrahentes.

(^k) *Corol. 2.* Inque distantîis quibusvis inæqualibus, ut sphæræ attrahentes applicatæ ad quadrata distantiarum inter centra.

Corol. 3. Attractiones verò motrices, seu pondera sphærarum in sphæras erunt, in æqualibus centrorum distantîis, ut sphæræ attrahentes et attractæ conjunctim, id est, ut contenta sub sphæris per multiplicationem producta.

(^l) *Corol. 4.* Inque distantîis inæqualibus, ut contenta illa directè et quadrata distantiarum inter centra inversè.

Corol. 5. Eadem valent, ubi attractio oritur a sphæræ utriusque virtute attractiva mutuo exercita in sphæram alteram. Nam viribus ambabus geminatur attractio, proportionem servatâ.

Corol. 6. Si hujusmodi sphæræ aliquæ circa alias quiescentes revolvantur, singulæ circa singulas; sintque distantîæ inter centra revolvantium et quiescentium proportionales quiescentium diametris; æqualia erunt tempora periodica.

Corol. 7. Et vicissim, si tempora periodica sunt æqualia; distantîæ erunt (^m) proportionales diametris.

Corol. 8. Eadem omnia, quæ superius de motu corporum circa umbilicos conicarum sectionum demonstrata sunt, obtinent; ubi sphæra attrahens formæ et conditionis cujusvis jam descriptæ locatur in umbilico.

(^k) * *Cor. 2.* Attractiones acceleratrices sphærarum G H, I K, L M, &c. in sphæras A B, C D, E F, &c. singularum versùs singulas sunt (per *Cor. 1. Prop. 75.*) ut sphæræ trahentes applicatæ ad quadrata distantiarum inter centra S, P. Quare componendo vel dividendo summa attractionum illarum omnium vel excessus aliquarum suprâ alias, hoc est, tota attractio acceleratrix sphæræ compositæ G I M H versùs sphæram compositam A C F B erit ut summa vel differentia sphærarum concentricarum similiarum A B, C D, E F, &c. ad quadratum distantîæ S P applicata. Sed si sphæræ trahentes sunt sibi invicem per omnia similes, summæ illæ vel differentiæ sunt ut sphæræ ipsæ. Quare patet veritas *Corol. 1. et 2.*

(^l) * *Cor. 4.* Corollaria 3^{um}. et 4^{um}. ex Co-

rollariis 1^o. et 2^o. manifesta sunt; Nam attractionis quantitas motrix, seu pondus sphæræ attractæ in sphæram trahentem æquipollet facto ex vi acceleratrice ductâ in quantitatem materiæ, seu in massam sphæræ attractæ; vis autem acceleratrix (per *Cor. 2. Prop. hujus*) est ut sphæra attrahens applicata ad quadratum distantîæ inter centra, et quantitates materiæ in sphæris per omnia similibus, sunt ut volumina, seu ut sphæræ ipsæ. Quare attractiones motrices seu pondera sphærarum in sphæras, sunt ut contenta sub sphæris per multiplicationem producta directè et quadrata distantiarum inter centra inversè.

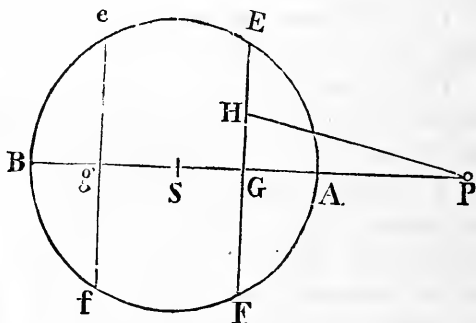
(^m) * *Proportionales diametris.* *Cor. 6. et 7. constant per Cor. 5. Prop. 4^a.*

Corol. 9. (ⁿ) Ut et ubi gygrantia sunt etiam sphæræ attrahentes, conditionis cujusvis jam descriptæ.

PROPOSITIO LXXVII. THEOREMA XXXVII.

Si ad singula sphærarum puncta tendant vires centripetæ proportionales distantii punctorum a corporibus attractis: dico quod vis composita, quâ sphæræ duæ se mutuo trahent, est ut distantia inter centra sphærarum.

Cas. 1. Sit A E B F sphæra; S centrum ejus; P corpusculum attractum, P A S B axis sphæræ per centrum corpusculi transiens; E F, e f plana duo, quibus sphæra secatur, huic axi perpendicularia, et hinc inde æqualiter distantia a centro sphæræ; G, g intersectiones planorum et axis; et H punctum quodvis in plano E F. Puncti H vis centripetæ in corpusculum P, secundum lineam P H exercita, est ut distantia P H; et (per Legum Corol. 2.) secundum lineam P G, seu versus centrum S, ut longitudo P G. Igitur



punctorum omnium in plano E F, hoc est plani totius vis, quâ corpusculum P trahitur versus centrum S, est ut distantia P G multiplicata per numerum punctorum, id est, ut solidum quod continetur sub plano ipso E F et distantia illa P G. Et similiter vis plani e f, quâ corpusculum P trahitur versus centrum S, est ut planum illud ductum in distantiam suam P g, sive ut huic æquale planum E F ductum in distantiam illam P g; et summa virium plani utriusque ut planum E F ductum in summam distantiarum P G + P g, id est, ut planum illud ductum in duplam centri et (°) corpusculi distantiam P S, hoc est, ut duplum planum E F ductum in distantiam P S, vel ut summa æqualium planorum E F + e f ducta in distantiam eandem. Et simili argumento, vires omnium planorum in sphærâ totâ, hinc inde æqualiter a centro sphæræ distantium, sunt ut summa planorum ducta in distantiam P S, hoc est, ut sphæra tota et ut distantia P S conjunctim. (P) Q. e. d.

(ⁿ) * *Ut et ubi gygrantia, &c.* Patet per Cor. 2. Prop. 58.

(°) * *Et corpusculi distantiam P S.* Est

enim $Pg = PG + 2GS$, adeoque $Pg + PG = 2PG + 2GS = 2PS$.

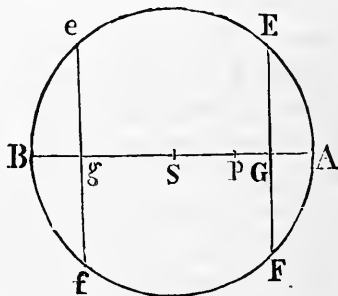
(P) * Q. e. d. Observandum est vires obli

Cas. 2. Trahat jam corpusculum P sphaeram A E B F. Et eodem argumento probabitur quod vis, quâ sphaera illa trahitur, erit ut distantia P S. Q. e. d.

Cas. 3. Componatur jam sphaera altera ex corpusculis innumeris P; et quoniam vis, quâ corpusculum unumquodque trahitur, est ut distantia corpusculi a centro sphaerae primæ, ⁽¹⁾ et ut sphaera eadem conjunctim, atque ideo eadem est, ac si prodiret tota de corpusculo unico in centro sphaerae; vis tota, quâ corpuscula omnia in sphaera secunda trahuntur, hoc est, quâ sphaera illa tota trahitur, eadem erit, ac si sphaera illa traheretur vi prodeunte de corpusculo unico in centro sphaerae primæ, ⁽²⁾ et propterea proportionalis est distantiae inter centra sphaerarum. Q. e. d.

Cas. 4. Trahant sphaerae se mutuo, et vis geminata proportionem priorem servabit. Q. e. d.

Cas. 5. Locetur jam corpusculum p intra sphaeram A E B F; et quoniam vis plani e f in corpusculum est ut solidum contentum sub plano illo et distantia p g; et vis contraria plani E F ut solidum contentum sub plano illo et distantia p G; ⁽³⁾ erit vis ex utraque composita ut differentia solidorum, hoc est, ut summa æqualium planorum ducta in semissem differentiae distantiarum, id est, ut summa illa ducta in p S distantiam corpusculi a centro sphaerae. Et simili argumento, attractio planorum omnium E F, e f in sphaerâ totâ, hoc est, attractio sphaerae totius, est conjunctim ut summa planorum omnium, seu sphaera tota, et ut p S distantia corpusculi a centro sphaerae. Q. e. d.



Cas. 6. Et si ex corpusculis innumeris p componatur sphaera nova, intra sphaeram priorem A E B F sita; probabitur ut prius quod attractio,

quas G H, in plano quovis E F, ex utraque axis P B parte in æqualibus distantis sumptas esse æquales et oppositas, nullumque proinde motum producere.

⁽¹⁾ * Et ut sphaera eadem conjunctim, per Cas. 1.

⁽²⁾ * Et propterea proportionalis est distantiae, &c. Si data est sphaera prima trahens per Cas. 2.

⁽³⁾ * Erit vis ex utraque composita ut differentia solidorum, hoc est, ut e f \times p g — E F \times

p G. Est autem S g = S G, adeoque p g — p G = p S + S G — p G = 2 p S; Quare cum sit etiam E F = e f, erit e f \times p g — E F \times p G = e f \times p g — p G = 2 e f \times p S = e f + E F \times p S. Si punctum G est inter p et S situm, vis tota erit ut e f \times p g + E F \times p G, et quoniam est semper S g = S G, atque in hoc casu p g + p G = p S + S G + p G = 2 p S, similiter invenietur vis tota ut e f + E F \times p S.

sive simplex sphaeræ unius in alteram, sive mutua utriusque in se invicem, erit ut distantia centrorum p S. Q. e. d.

PROPOSITIO LXXVIII. THEOREMA XXXVIII.

Si sphaeræ in progressu a centro ad circumferentiam sint utcumque dissimilares et inæquabiles, in progressu vero per circuitum ad datam omnem a centro distantiam sint undique similes; et vis attractiva puncti cujusque sit ut distantia corporis attracti: dico quod vis tota quâ hujusmodi sphaeræ duæ se mutuo trahunt sit proportionalis distantiae inter centra sphaerarum.

Demonstratur ex Propositione præcedente eodem modo, quo Propositio LXXVI. ex Propositione LXXV. demonstrata fuit. (§)

Corol. Quæ superius in Propositionibus X. et LXIV. de motu corporum circa centra conicarum sectionum demonstrata sunt, valent ubi attractiones omnes fiunt vi corporum sphaericorum conditionis jam descriptæ, et attracta corpora sunt sphaeræ conditionis ejusdem.

Scholium.

Attractionum casus duos insigniores jam dedi expositos; nimirum ubi vires centripetæ decrescunt in duplicatâ distantiarum ratione, vel crescunt in distantiarum ratione simplici; efficientes in utroque casu ut corpora gyrentur in conicis sectionibus, et componentes corporum sphaericorum vires centripetas eâdem lege, in recessu a centro, decrescentes vel crescentes cum seipsis: Quod est notatu dignum. Casus cæteros, qui conclusiones minus elegantes exhibent, sigillatim percurrere longum esset. Malim cunctos methodo generali simul comprehendere ac determinare ut sequitur.

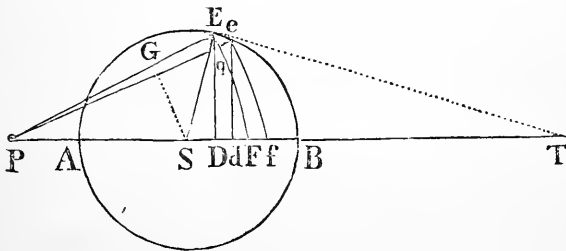
(§) Quæ in Corollariis Prop. 76. ubi attractio sphaeræ versùs sphaeram erat quadrato distantiae centrorum reciprocè proportionalis, demonstrata sunt, ea, mutatis mutandis, ad casum hujus Propositionis 78. transferri possunt. Nimirum si ejusmodi sphaeræ complures per omnia similes se mutuo trahant, attractiones accelera-

trices singularum in singulas erunt ut sphaeræ trahentes et distantiae inter centra conjunctim; attractiones verò motrices ut sphaeræ attrahentes et attractæ et distantiae inter centra conjunctim, eademque valent ubi attractio oritur a sphaeræ utriusque virtute attractivâ mutuo exercitâ in sphaeram alteram.

LEMMA XXIX.

Si describantur centro S circulus quilibet A E B, et centro P circuli duo E F, e f, secantes priorem in E, e, lineamque P S in F, f; et ad P S demittantur perpendiculara E D, e d: dico quod, si distantia arcuum E F, e f in infinitum minui intelligatur, ratio ultima lineæ evanescentis D d ad lineam evanescentem F f ea sit, quæ lineæ P E ad lineam P S.

Nam si linea P e secet arcum E F in q; et recta E e, quæ cum arcu evanescente E e coincidit, producta occurrat rectæ P S in T; et ab S de-



mittatur in P E normalis S G: ob ^(t) similia triangula D T E, d T e, D E S; erit D d ad E e, ut D T ad T E, seu D E ad E S; et ob ^(u) triangula E e q, E S G (per Lem. VIII. et Corol. 3. Lem. VII.) similia, erit E e ad e q seu F f ut E S ad S G; et ex æquo, D d ad F f ut D E ad S G; hoc est (ob similia triangula P D E, P G S) ut P E ad P S Q. c. d.

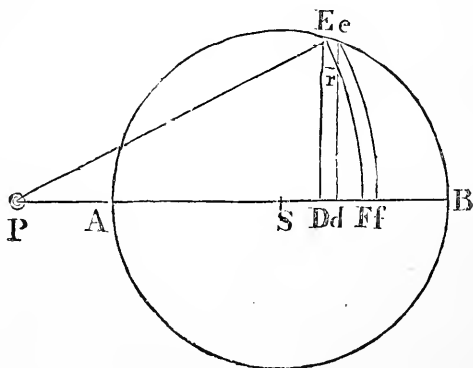
^(t) * Ob similia triangula D T E, d T e, D E S. Ob parallelas D E, d e, triangula D T E, d T e similia sunt; et quoniam recta T E circulum A E B tangit in E, erit angulus S E T rectus, et proinde demisso ex puncto E ad basim S T perpendiculo E D. erit triangulum D E S simile triangulo D T E (Prop. 8. Lib. 6. Elem.)

^(u) * Et ob triangula E e q, E S G, &c. Anguli ad G et q recti sunt et proinde æquales; et quoniam anguli P E q, S E e sunt quoque recti et æquales, (ex naturâ circuli) detracto communi angulo S E q, anguli residui G E S, q E e, erunt etiam æquales. Quare triangula E e q, E S G sunt similia (Prop. 4. Lib. 6. Elem.)

PROPOSITIO LXXIX. THEOREMA XXXIX.

Si superficies ob latitudinem infinitè diminutam jamjam evanescens $E F f e$, convolutione sui circa axem $P S$, describat solidum sphæricum concavo-convexum, ad cujus particulas singulas æquales tendant æquales vires centripetæ: dico quod vis, quâ solidum illud trahit corpusculum situm in P , est in ratione compositâ ex ratione solidi $D E q \times F f$, et ratione vis quâ particula data in loco $F f$ traheret idem corpusculum.

Nam si primò consideremus vim superficiæ sphæricæ $F E$, quæ convolutione arcus $F E$ generatur, et a linea $d e$ ubivis secatur in r ; erit superficiæ pars annularis, convolutione arcus $r E$ genita, ut lineola $D d$,



manente sphæræ radio $P E$ (uti (*) demonstravit Archimedes in lib. de Sphærâ et Cylindro.) Et hujus vis, secundum lineas $P E$ vel $P r$ undique in (†) superficie conicâ sitas exercita, ut hæc ipsa superficiæ pars annularis; hoc est, ut lineola $D d$, vel, quod perinde est, ut rectangulum sub dato sphæræ radio $P E$ et lineola illa $D d$: at secundum li-

(*) 518. *Uti demonstravit Archimedes, &c.* Facilis est demonstratio. Quoniam enim angulus $P E r$ rectus est (ex naturâ circuli) erit angulus $D E r$ æqualis angulo $D P E$, ob summum angulorum $D P E + P E D$ recto $P E r$ æqualem. Undè si ex puncto r in lineam $D E$ demissum intelligatur perpendicularum quod æquale erit lineæ $D d$, constituetur triangulum evanescens simile triangulo $E P D$, eritque adeo

$$D E : P E = D d : E r = \frac{P E \times D d}{D E}, \text{ sed}$$

(515) zona circularis convolutione arcûs $r E$ genita, est ut rectangulum $r E \times D E$; Quare si in hoc rectangulo loco $r E$ substituatür valor ipsius modò inventus, erit zona ut $P E \times D d$, hoc est, ob datum radium $P E$, ut $D d$. Q. e. d.

(†) * *In superficie conicâ.* Nam in convolu-

neam $P S$ ad centrum S tendentem minor in ratione $P D$ ad $P E$, (^z) ideoque ut $P D \times D d$. Dividi jam intelligatur linea $D F$ in particulas innumeras æquales, quæ singulæ nominentur $D d$; et superficies $F E$ dividitur (^a) in totidem æquales annulos, quorum vires erunt ut summa omnium $P D \times D d$, hoc est, ut $\frac{1}{2} P F q - \frac{1}{2} P D q$, ideoque ut (^b) $D E$ quad. Ducatur jam superficies $F E$ in altitudinem $F f$; et fiet solidi $E F f e$ vis exercita in corpusculum P ut $D E q \times F f$: puta si detur vis quam particula aliqua data $F f$ in distantia $P F$ exercet in corpusculum P . (^c) At si vis illa non detur, fiet vis solidi $E F f e$ ut solidum $D E q \times F f$ et vis illa non data conjunctim. Q. e. d.

tione puncti E , linea $P E$ superficiem conicam describit.

(^a) * Ideoque ut $P D \times D d$. Nam si vis secundum directionem $P E$ agens per lineam $P E$ exponatur, vis illius pars quæ agit secundum directionem $P S$, exponetur per lineam $P D$; erit $P E$ ad $P D$ ut rectangulum $P E \times D d$ ad rectangulum $P D \times D d$, quod proinde vim illam secundum directionem $P D$ exhibebit, vires autem obliquæ $E D$ ab utraq[ue] axis $P B$ parte se mutuò destruant.

(^a) * Dividitur in totidem æquales annulos. (Per not. 518.)

(^b) * Et superficies $F E$ dividitur in totidem æquales annulos, quorum vires erunt ut summa omnium $P D \times D d$, hoc est, ut $\frac{1}{2} P F q - \frac{1}{2} P D q$, ideoque ut $D E$ quad. Scilicet omnes $P D$, dum ex $P D$ in $P F$ mutantur uniformiter crescendo progressionem arithmeticam faciunt, quoniam omnes particule $D d$ quibus lineæ $P D$ successive augentur sunt æquales: ergo omnium $P D$ summa eâ ratione invenitur quâ summæ progressionum arithmeticarum obtinentur, nempe primum et ultimum progressionis terminum simul junctos multiplicando per numerum terminorum progressionis, et dimidium facti sumendo; Progressionis verò hujusce primus terminus est $P D$, ultimus $P F$ numerus vero terminorum $D F$, siquidem $D F$ est summa incrementorum æqualium evanescentium lineæ $P D$, ergo summa omnium $P D$ est $\frac{P F + P D \times D F}{2}$ sive

(quia $D F$ est differentia linearum $P F$ et $P D$)
est summa omnium $P D = \frac{P F + P D \times P F - P D}{2}$

sed (per 6. 2. Elem.) factum summæ et differ-

entiæ duarum linearum æquatur differentię quadratorum ipsorum, ergo $\frac{P F + P D \times P F - P D}{2}$

$= \frac{1}{2} P F^2 - \frac{1}{2} P D^2$ et summa omnium $P D \times D d = \frac{1}{2} P F^2 - \frac{1}{2} P D^2 \times D d$, sed $D d$ est particula quæ in omnibus hisce casibus ut eadem assumitur, ergo vires totius superficiæ $F E$ quæ sunt ut summa omnium $P D \times D d$ sunt ut $\frac{1}{2} P F^2 - \frac{1}{2} P D^2$ sive ut $P F^2 - P D^2$ sed $P F^2$ est æquale $P E^2$ per constr. et $P E^2 - P D^2 = D E^2$ (per 47. 1. El.) ergo vires superficiæ $F E$, sunt ut $D E^2$. Q. e. d.

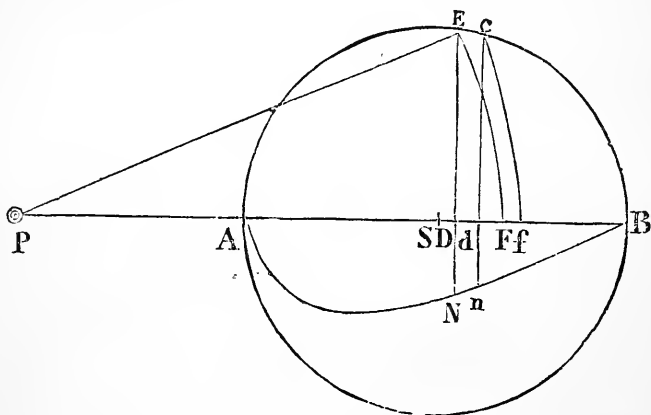
Idem aliter. Sit radius datus $P E = a$, variabilis $F D = x$, erit fluxio $D d = d x$, et $P D = a - x$, atquæ adeò $P D \times D d = a d x - x d x$, et sumptis utrinque fluentibus (165) $S. P D \times D d = a x - \frac{1}{2} x x = \frac{2 a x - x x}{2} = \frac{D E^2}{2}$, (Prop. 13. Lib. 6. Elem.) Quarè vis superficiæ convolutione arcus $F E$ genitæ erit ut $D E^2$.

(^c) * At si vis illa non detur, &c. Zona convolutione arcus $E e$ genita ducatur in datam altitudinem $F f$, et erit annuli solidi indè geniti vis secundum lineam $P E$ undiquè exercita ut hic ipse annulus et vis lineolæ $F f$ conjunctim, hoc est, si vis lineolæ $F f$ dicatur V , ut $P E \times D d \times F f \times V$ (518). At vis annuli secundum lineam $P S$ minor erit in ratione $P D$ ad $P E$, ideoque erit ut $P D \times D d \times F f \times V$. Et quoniam variante $P D$, manet factum $F f \times V$ quod nimirum vis V in singulis particulis datis $F f$, æqualis supponatur; Si sumantur fluentes, ut suprâ, erit vis tota solidi $E F f e$, in corpusculum P secundum lineam $P S$ exercita ut $D E^2 \times F f \times V$.

PROPOSITIO LXXX. THEOREMA XL.

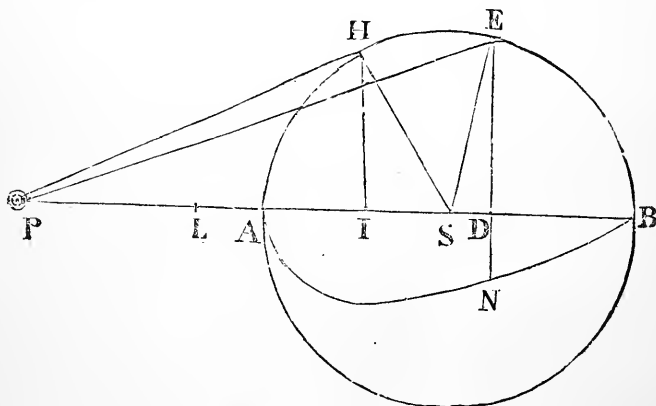
Si ad sphaeræ alicujus $A B E$, centro S descriptæ, particulas singulas æquales tendant æquales vires centripetæ, et ad sphaeræ axem $A B$, in quo corpusculum aliquod P locatur, erigantur de punctis singulis D perpendiculara $D E$, sphaeræ occurrentia in E , et in ipsis capiantur longitudines $D N$, quæ sint ut quantitas $\frac{D E q \times P S}{P E}$ et vis, quam sphaeræ particula sita in axe ad distantiam $P E$ exercet in corpusculum P , conjunctim: dico quod vis tota, quâ corpusculum P trahitur versus sphaeram, est ut area $A N B$ comprehensa sub axe sphaeræ $A B$, et lineâ curvâ $A N B$, quam punctum N perpetuo tangit.

Etenim stantibus quæ in Lemmate et Theoremate novissimo constructa sunt, concipe axem sphaeræ $A B$ dividi in particulas innumeras æquales



$D d$ et sphaeram totam dividi in totidem laminas sphaericas concavo-convexas $E F f e$, et erigatur perpendicularum $d n$. Per Theorema superius vis, quâ lamina $E F f e$ trahit corpusculum P , est ut $D E q \times F f$ et vis particulæ unius ad distantiam $P E$ vel $P F$ exercita conjunctim. Est autem (per Lemma novissimum) $D d$ ad $F f$ ut $P E$ ad $P S$, et inde $F f$ æqualis $\frac{P S \times D d}{P E}$; et $D E q \times F f$ æquale $D d$ in $\frac{D E q \times P S}{P E}$, et propterea vis laminæ $E F f e$ est ut $D d$ in $\frac{D E q \times P S}{P E}$ et vis particulæ ad distantiam $P F$ exercita conjunctim, hoc est (ex Hypothesi) ut $D N \times D o$, seu area evanescens $D N n d$. Sunt igitur laminarum om-

P A B demissa normali H I, bisecetur P I in L; et erit (per Prop. XII. Lib. 2. Elem.) P E q æquale P S q + S E q + 2 P S D. Est autem S E q seu S H q (ob ^(f) similitudinem triangulorum S P H, S H I) æquale rectangulo P S I. Ergo P E q æquale est contento sub P S et P S + S I + 2 S D, hoc ^(g) est, sub P S et 2 L S + 2 S D, id est, sub P S et 2 L D. Porro D E quad. æquale est S E q — S D q, seu ^(†) S E q — L S q + 2 S L D — L D q, id est, 2 S L D — L D q — A L B. Nam L S q — S E q seu L S q — S A q (per Prop. VI. Lib. 2. Elem.) æquatur rectangulo A L B. Scribatur itaque 2 S L D — L D q — A L B pro D E q; et quantitas $\frac{D E q \times P S}{P E \times V}$, quæ secundum Corollarium quartum Propositionis præcedentis est ut longitudo ordinatim applicatæ D N, resolvet sese in tres partes $\frac{2 S L D \times P S}{P F \times V} - \frac{L D q \times P S}{P E \times V} - \frac{A L B \times P S}{P E \times V}$: ubi si pro V scribatur ratio inversa vis centripetæ, et pro P E medium proportionale inter P S et 2 L D; tres illæ partes evadent ordinatim applicatæ linearum totidem curvarum, ^(h) quarum aræ per methodos vulgatas innotescunt. Q. e. f.



(^f) * Ob similitudinem triangulorum, &c. (Per Prop. 15. Lib. 6. Elem.)

(^g) * Hoc est sub P S et 2 L S + 2 S D. Ob P S + S I = P I + 2 S I = 2 L I + 2 S I = 2 L S.

([†]) * Seu S E² — L S², &c. Ob S D = L D — L S, adeoque S D² = L D² — 2 S L D + L S².

(^h) 519. Quarum aræ per methodos vulgatas innotescunt. Sint variables P E = z, L D =

x, adeoque D d = d x, sint constantes P A = a, P B = b, P S = c, et L S = m, L A = p, L B = q, et erit aræ A N D fluxio D N × d x ut $\frac{2 m c x d x}{z V} - \frac{c x x d x}{z V} - \frac{p q c d x}{z V}$: quoniam verò P E² (z z) = 2 P S × L D (2 c x), est x = $\frac{z z}{2 c}$ et d x = $\frac{z d z}{c}$, quibus valoribus loco x et d x in formula substitutis illa in hanc mutatur $\frac{m z^2 d z}{c V} - \frac{z^4 d z}{4 c^2 V} - \frac{p q d z}{V}$.

Exempl. 1. Si vis centripeta ad singulas sphaeræ particulas tendens sit reciproce ut distantia; pro V scribe distantiam PE; dein $2 PS \times LD$ pro PE q, et fiet DN ut $SL - \frac{1}{2} LD - \frac{ALB}{2LD}$. Pone DN æqua-

lem ejus duplo $2SL - LD - \frac{ALB}{LD}$: et ordinatæ pars data $2SL$ ducta in longitudinem AB describet aream rectangulam $2SL \times AB$; et pars indefinita LD ducta normaliter in eandem longitudinem per motum continuum, eâ lege ut inter movendum crescendo vel decrescendo æquetur semper longitudini LD, (i) describet aream $\frac{LBq - LAq}{2}$,
(†) id est, aream $SL \times AB$; quæ subducta de areâ priore $2SL \times A$

Sit vis attractiva ut distantia z dignitas $\frac{1}{z^n}$ erit $V = z^n$, quo valore loco V in formulâ posito, fiet $DN \times dx$ ut $\frac{mz^{2-n}dz}{c} - \frac{z^{4-n}dz}{4c^2}$ — $p q z^{1-n} dz$, unde sumptis singulorum terminorum fluentibus (165) erit S. $DN \times dx$, seu area AND, ut $\frac{mz^{3-n}}{3-n} \times c - \frac{z^{5-n}}{5-n} \times 4c^2 - \frac{pqz^{1-n}}{1-n} + Q$ constans. Sed fluens illa

evanescere debet dum fit PE (z) = PA (a) est ergo $Q = \frac{a^{5-n}}{5-n \times 4c^2} + \frac{pqa^{1-n}}{1-n} - \frac{ma^{3-n}}{3-n \times c}$ ac proinde fluens accurata ubi PE

(z) = PB (b) erit $\frac{mb^{3-n}}{3-n \times c} - \frac{b^{5-n}}{5-n \times 4c^2} - \frac{pq b^{1-n}}{1-n} + \frac{a^{5-n}}{5-n \times 4c^2} + \frac{pqa^{1-n}}{1-n} - \frac{ma^{3-n}}{3-n \times c}$.

520. Cum sit semper $PE^2 = 2PS \times LD$; et ubi PE fit PB sit LD = LB, ubi verò PE fit PA sit LD = LA, erit $PB^2 (b^2) = 2PS \times LB (2cq)$ et $PA^2 (a^2) = 2PS \times LA (2cp)$ quibus valoribus, loco b² et a² substitutis, formula fit

$\frac{2mqb^{1-n}}{3-n} - \frac{q^2b^{1-n}}{5-n} - \frac{pq b^{1-n}}{1-n} + \frac{p^2a^{1-n}}{5-n} + \frac{pqa^{1-n}}{1-n} - \frac{2mpa^{1-n}}{3-n}$,

et restitutis litteris figuræ

$\frac{2SLB \times PB^{1-n}}{3-n} - \frac{LB^2 \times PB^{1-n}}{5-n} - \frac{ALB \times PB^{1-n}}{1-n} + \frac{AL^2 \times PA^{1-n}}{5-n} + \frac{ALB \times PA^{1-n}}{1-n} - \frac{2SLA \times PA^{1-n}}{3-n}$.

A a 4

521. Cor. 1. Hinc liquet aream ANB, seu attractionem cui proportionalis est, semper posse algebraice inveniri, tribus tantum casibus exceptis in quibus est n = 1 vel 3, vel 5, seu in quibus vis attractiva decrescit in ratione distantie simplici, vel triplicatâ vel quintuplicatâ. In his enim casibus tribus divisores 1 — n, 3 — n, 5 — n, evanescunt; sed tum fluens per logarithmos, aut quod idem est, per quadraturam hyperbolæ obtinetur, ut exemplis infra positus patebit.

(i) 522. Describet aream $\frac{LBq - LAq}{2}$.

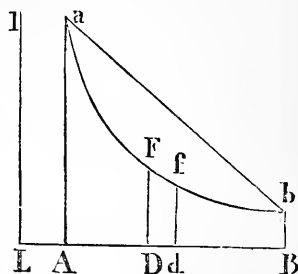
Area, quam describet, erit trapezium, nam si a puncto L in longitudinem AB semper erigantur perpendiculara æqualia LD, omnes terminabuntur in recta linea ducta a puncto L in terminum perpendiculari in B erecti et æquali LB, sicque formabitur triangulum cujus pars secundum AB sita est area quæsita, et ea erit trapezium cujus latera in A et B perpendicularia, inter se parallela sunt, et latus puncto A insistentis erit æquale LA, latus verò oppositum in B erectum erit æquale LB, hujus ergo trapezii superficies erit $\frac{LA + LB}{2} \times AB$, sed AB

= LB — LA, ergo per 6. 2. El. $\frac{LA + LB}{2} \times LB - LA = \frac{LB^2 - LA^2}{2}$: (quod

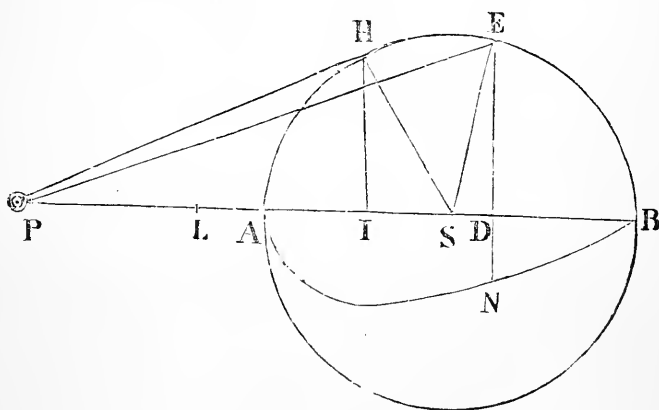
trapezium est æquale trapezio A a b B in figurâ Newtonianâ descripto, ut liquet per ejus figuræ const.)

(†) Id est, aream $SL \times AB$, cum enim hæc area sit $\frac{LA + LB}{2} \times AB$, sitque LB = LA + 2AS erit $LA + LB = 2LA + 2AS = 2LS$ unde $\frac{LA + LB}{2} \times AB = LS \times AB$. Unde etiam sequitur trapezium A a b B rectangulo LS × AB esse æquale.

relinquit aream $SL \times AB$. Pars autem tertia $\frac{ALB}{LD}$, ducta itidem per motum localem normaliter in eandem longitudinem, describet aream hyperbolicam; quæ subducta de areâ $SL \times AB$ relinquet aream quæsitam ANB . Unde talis emergit problematis constructio. Ad puncta L, A, B erige perpendiculara Ll, Aa, Bb , quorum Aa ipsi LB , et Bb ipsi LA æquetur. Asymptotis Ll, LB per puncta a, b describatur hyperbola ab . Et acta chorda ba claudet aream aba areâ quæsitâ ANB æqualem.



Exempl. 2. Si vis centripeta ad singulas sphæræ particulas tendens sit reciprocè ut cubus distantiae, vel (quod perinde est) ut cubus ille applica-



Cæterum per methodos vulgares casus iste sequenti ratione solvitur. Sit $AD = x$. $DD = dx$ erit areâ AND fluxio $DN \times DD = 2SL \times dx - LA \times dx - x \times dx - \frac{ALB \times dx}{LD}$. Primi termini $2SL \times dx$, fluens (165) est $2SL \times x = 2SL \times AB$, ubi AD , seu $x = AB$. Secundi termini $LA \times dx + x \times dx$, fluens est $LA \times x + \frac{1}{2}x \times x = \frac{2LA + AB \times AB}{2} = LS \times AB$, quando x , seu AD , fit AB . Quare duorum priorum terminorum fluens est $2SL \times AB - SL \times AB$ sive $SL \times AB$. Jam ut tertii termini $\frac{ALB \times dx}{LD}$ fluens inveniatur describatur hyperbola AB , prout Newtonus præscribit,

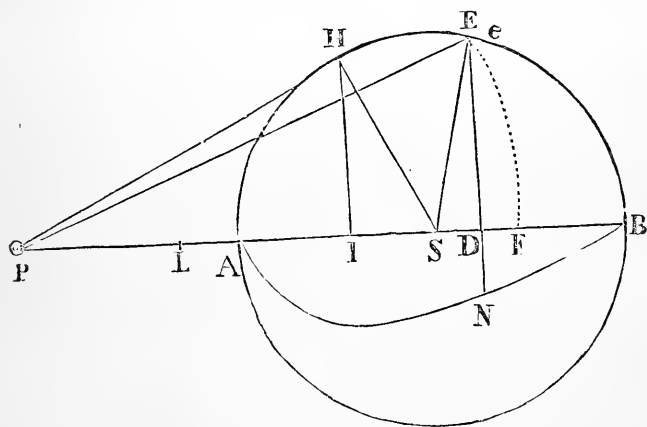
et super asymptoto LB erigantur perpendiculara duo infinitè propinqua, DF, df , hyperbolæ occurrentia in F et f , sitque $AD = x$, $DD = dx$, et erit (per Theor. 4. de Hyperbolâ) $LA \times Aa = LD \times DF$, adeoque $DF = \frac{LA \times Aa}{LD} = \frac{ALB}{LD}$, et $DF \times DD$, seu

fluxio areâ $AaFD = \frac{ALB \times dx}{LD}$. Quare

area hyperbolica $AaFD$, æqualis est fluenti tertii termini, et area hyperbolica $AaBb$, est ejusdem termini fluens, ubi x , seu $AD = AB$. Hæc igitur subducta de rectangulo $SL \times AB$, sive de trapezio $AaBb$ ipsi æquali, relinquet aream quæsitam ANB . Relinquitur autem area Afb ; undè patet constructio.

523. Cor. 1. Si distantia corpusculi P a

tus ad planum quodvis datum; scribe $\frac{P E \text{ cub.}}{2 A S q}$ pro V , dein $2 P S \times L D$ pro $P E q$; et fiet $D N$ ut $\frac{S L \times A S q}{P S \times L D} - \frac{A S q}{2 P S} - \frac{A L B \times A S q}{2 P S \times L D q}$, id
 $(^k)$ est (ob continuè proportionales $P S$, $A S$, $S I$) ut $\frac{L S I}{L D} - \frac{1}{2} S I - \frac{A L B \times S I}{2 L D q}$. Si ducantur hujus partes tres in longitudinem $A B$, prima $\frac{L S I}{L D}$ generabit aream hyperbolicam; secunda $\frac{1}{2} S I$ aream $\frac{1}{2} A B \times S I$; tertia $\frac{A L B \times S I}{2 L D q}$ aream $\frac{A L B \times S I}{2 L A} - \frac{A L B \times S I}{2 L B}$, id est $\frac{1}{2} A B \times S I$. De primâ subducatur summa secundæ et tertiæ, et manebit area



sphærâ evanescat, erit $B b = L A = 0$ ideoque hyperbola $A F b$ cum suis asymptotis $L l$, $L B$ congruet nullaque erit ejus area. Quare corpusculo posito in A , seu in contactu sphæræ attractio erit ut rectangulum $S L \times A B = 2 A S^2$, ut etiam demonstrari posset eodem modo ac demonstrata fuit Prop. 72.

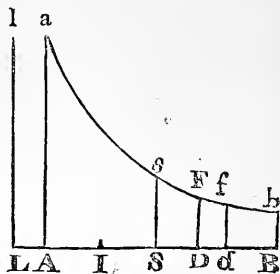
524. Cor. 2. Vis quâ corpusculum P , versûs portionem sphæræ convolutione superficiei $A E F$, genitam trahitur est ut $L B - \frac{1}{2} x \times x - A a F D$; Nam (per not. 522.) vis illa est ut $2 S L \times x - L A \times x - \frac{1}{2} x \times x - A a F D$, et $2 S L = 2 L A + 2 A S$ et $2 S L - L A = L A + 2 A S = L B$, unde vis illa est $L B - \frac{1}{2} x \times x - A a F D$; sed P posito in contactu sphæræ est $L B = A B$ et aræ hyperbolicâ evanescit, vis ergo fit in contactu

$A B - \frac{1}{2} x \times x$, sive $A B - \frac{1}{2} A D \times A D$.

525. Cor. 3. Quoniam attractio corpusculi P versûs sphæram totam est ut $S L \times A B - A a b B$, ejusdem attractio versûs portionem sphæræ convolutione superficiei $F E e B$ (fig. Prop. 80.) genitam, erit ut $S L \times A B - L P \times x + \frac{1}{2} x \times x + A a F D - A a b B = S e L \times A B - L B \times A D + \frac{1}{2} A D^2 - D F b B$, sive substitutis $L A + \frac{1}{2} A B$ pro $S L$, $L A + A B$ loco $L B$, et pro $A B - A D$ posito $B D$ fiet ut $L A + \frac{1}{2} B D \times B D - D F b B$, et corpusculo in contactu posito, erit ut $\frac{1}{2} B D^2$.

(k) * Id est, ob continuè proportionales, &c. Per Prop. 8. l. 6. El. undè $A S^2 = P S \times S I$.

quæsita A N B. ⁽¹⁾ Unde talis emergit problematis constructio. Ad puncta L, A, S, B erige perpendiculara L l, A a, S s, B b, quorum S s ipsi S I æquetur, perque punctum s asymptotis L l, L B describatur hyperbola a s b occurrens perpendicularis A a, B b in a et b; et rectangulum 2 A S I subductum de area hyperbolica A a s b B relinquet aream quæsitam A N B.



Exempl. 3. Si vis centripeta, ad singulas sphaeræ particulas tendens, decrescit in quadruplicatâ ratione distantiae a particulis; scribe $\frac{P E q q}{2 A S \text{ cub.}}$

⁽¹⁾ 526. * Unde talis emergit problematis constructio. Sit, ut supra A D = x, D d = d x, erit areæ A N D, fluxio D N × D d, ut L S I × d x $\frac{A L B \times S I \times d x}{L D} - \frac{1}{2} S I \times d x - \frac{2 L A + x^2}{2}$.

Jam ut primi termini $\frac{L S I \times d x}{L D}$, fluens habetur, describatur hyperbola a s b, eo modo quo jubet Newtonus, erectisque perpendicularis D F, d f, sit A D = x, D d = d x, et quoniam (per Theor. 4. de Hyperbolâ) L S × S I = L D × D F, erit D F = $\frac{L S I}{L D}$, et D F

× D d = $\frac{L S I \times d x}{L D}$. Patet igitur (ut in

not. 522.) aream Hyperbolicam A a s b B, æqualem esse fluenti primi termini, dum A D seu x = A B; secundi termini $\frac{1}{2} S I \times d x$, fluens est $\frac{1}{2} S I \times A D = \frac{1}{2} S I \times A B$, dum fit A D = A B; tertii tandem termini fluens hoc

modo invenitur. Quantitatis $\frac{d x}{(L A + x)^2}$ flu-

ens (165) est $-\frac{1}{L A + x} + Q$ constans; et

quoniam fluens illa evanescere debet ubi x = 0, erit Q = $\frac{1}{L A}$. Quare fluens accurata est

$\frac{1}{L A} - \frac{1}{L D} = \frac{1}{L A} - \frac{1}{L B}$, ubi x = A B.

Est igitur tertii termini $\frac{1}{2} A L B \times S I \times$

$\frac{d x}{L A + x^2}$ fluens = $\frac{A L B \times S I}{2 L A} -$

$\frac{A L B \times S I}{2 L B} = \frac{1}{2} L B \times S I - \frac{1}{2} L A \times$

S I = $\frac{1}{2} A B \times S I$, undè summa 2^a et 3^a termini est A B × S I = 2 A S × S I. Quare rectangulum 2 A S I subductum de areâ hyperbolicâ A a s b B relinquet aream quæsitam A N B.

527 Cor. 1 Si corpus P sphaeram tangat in

A, attractio evadet infinita, nam in hoc casu L A = 0 et A a cum asymptoto L l coïncidit, ac proinde attractio per aream hyperbolæ infinitam B L l a s b exponitur.

528. Corol. 2. Vis quâ corpusculum P in sphaeræ portionem convolutione superficiei A E F genitam, trahitur, est ut A a F D - $\frac{1}{2} S I \times$ A D - $\frac{1}{2} L B \times S I + \frac{A L B \times S I}{2 L D}$, ut ex

notâ 526. manifestum est. Quare in contactu ubi L A = 0, erit vis illa ut area infinita A a F D, cujus respectu aliæ finitæ quantitates evanescent.

529. Cor. 3. Et quoniam corpusculi P attractio in sphaeram totam est ut area hyperbolica A a s b B - 2 A S I, ejusdem attractio versùs portionem concavo-convexam, convolutione superficiei F E b B, genitam, erit ut A a s b B - A a F D - 2 A S I + $\frac{1}{2} A D \times S I +$

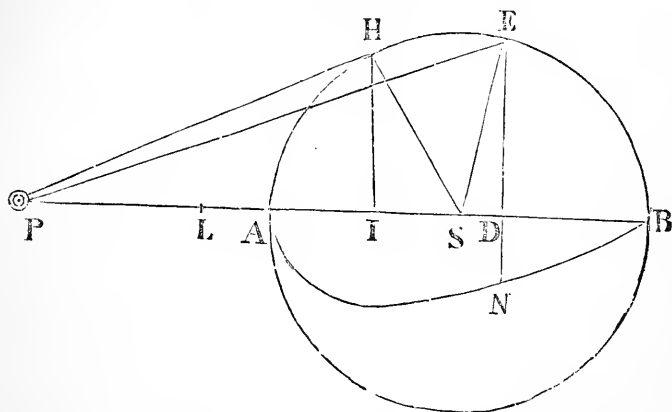
$\frac{1}{2} L B \times S I - \frac{A L B \times S I}{2 L D} = D F b B$

+ $\frac{1}{2} L A - \frac{1}{2} B D \times S I - \frac{A L B \times S I}{2 L D}$,

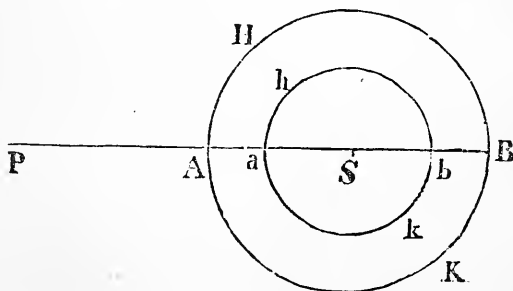
ponendo A B pro 2 A S, $\frac{1}{2} L A + \frac{1}{2} A B$ pro $\frac{1}{2} L B$, et $\frac{1}{2} B D$ pro $\frac{1}{2} A B - \frac{1}{2} A D$.

530. Cor. 4. Simili modo inveniri potest vis quâ corpus P trahitur versùs sphaeram concavam A a H B K a, si ex attractione in sphaeram totam solidam detrahatur attractio in sphaeram interiorem a h b k. Patet autem corpusculi P in A, seu in contactu positi attractionem versùs sphaeram cavam A a H B K a, interiori concentricam, infinitam esse; Nam si ex vi infinitâ quâ versùs sphaeram solidam A H B K S, trahitur, subducatur vis finita quâ versùs sphaeram interiorem a h b k s urgetur, relinquitur attractio infinita versùs sphaeram concavam A a H B K a. quin imò, si ex sphaerâ concavâ detrahatur paucis a contactu remota ut H h B K k, at tractio corpusculi in contactu A positi versùs residuam H h A a K k, adhuc infinita erit, et patet (per Cor. 2. et 3).

pro V, dein $\sqrt{2PS \times LD}$ (^m) pro PE, et fiet DN ut $\frac{SIq \times SL}{\sqrt{2SI}}$
 $\times \frac{1}{\sqrt{LDc}} - \frac{SIq}{2\sqrt{2SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LD}} - \frac{SIq \times ALB}{2\sqrt{2SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LDqc}}.$



(ⁿ) Cujus tres partes ductæ in longitudinem AB, producant areas totidem, viz. $\frac{2SIq \times SL}{\sqrt{2SI}}$ in $\frac{1}{\sqrt{LA}} - \frac{1}{\sqrt{LB}}$; $\frac{SIq}{\sqrt{2SI}}$ in



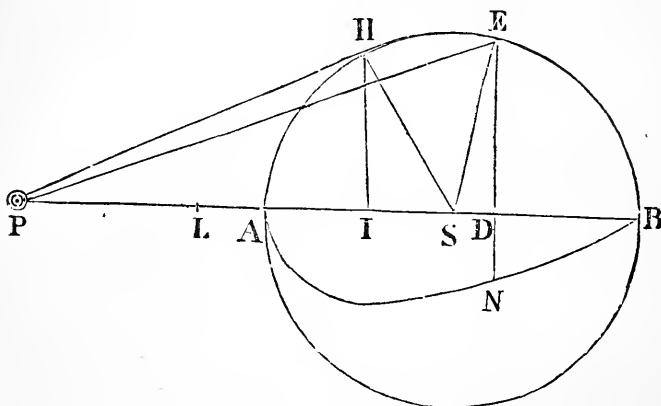
(^m) * Pro PE. Erit $PE^5 = 4PS^2 \times LD^2$
 $\times \sqrt{2PS \times LD}$, et $AS^2 = PS \times SI \times \sqrt{PS \times SI}$.
 Unde fiet $\frac{SLD \times PS}{PE \times V} = \frac{4SLD \times PS \times AS^3}{PE^5} =$
 $\frac{4SL \times LD \times PS^2 \times SI \sqrt{PS \times SI}}{4PS^2 \times LD^2 \times \sqrt{2PS \times LD}} =$
 $\frac{SL \times SI \sqrt{SI}}{SL \times SI^2} = \frac{LD \sqrt{2LD}}{LD \sqrt{2SI \times LD}} =$
 $\frac{SI^2 \times SL}{2\sqrt{2SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LD^3}}$. Et ita de cæteris
 terminis.

(ⁿ) Cujus tres partes, &c. Sit $AD = x$
 fluxio $AD = dx$, et erit area AND fluxio

DN $\times dx$, ut $\frac{SI^2 \times SL}{\sqrt{2SI}} \times \frac{dx}{LA+x}^{\frac{3}{2}} -$
 $\frac{SI^2}{2\sqrt{2SI}} \times \frac{dx}{LA+x}^{\frac{1}{2}} - \frac{SI^2 \times ALB}{2\sqrt{2SI}}$
 $\times \frac{dx}{LA+x}^{\frac{5}{2}}$, quantitas $\frac{dx}{LA+x}^{\frac{3}{2}}$, seu
 $\frac{1}{LA+x} - \frac{3}{2} dx$ fluens est $\frac{-2}{LA+x}^{\frac{1}{2}} + Q$
 const. (165) quæ evanescere debet ubi $x = 0$;
 quare erit $Q = \frac{2}{\sqrt{LA}}$ et fluens accurata =
 $\frac{2}{\sqrt{LA}} - \frac{2}{\sqrt{LB}}$, dum fit $x = AB$. Primi

$$\sqrt{LB} - \sqrt{LA}; \text{ et } \frac{SIq \times ALB}{2\sqrt{2SI}} \text{ in } \frac{1}{\sqrt{LA} \text{ cub.}} - \frac{1}{\sqrt{LB} \text{ cub.}}$$

(^o) Et hæ post debitam reductionem fiunt $\frac{2SIq \times SL}{LI}$, SIq , et $SIq +$



$\frac{2SI \text{ cub.}}{3LI}$. Hæ vero, subductis posterioribus de priore, evadunt

$\frac{4SI \text{ cub.}}{3LI}$. Proinde vis tota, quâ corpusculum P in sphaeræ centrum

igitur termini fluens erit $\frac{2SI \times SL}{\sqrt{2SI}}$ in $\frac{1}{\sqrt{LA}}$
 $-\frac{1}{\sqrt{LB}}$. Quantitatis $\frac{dx}{LA+x}^{\frac{1}{2}}$, fluens
 est $2(LA+x)^{\frac{1}{2}} + Q$ const. et factâ $x=0$,
 invenitur $Q = -2\sqrt{LA}$; quare fluens accu-
 rata est $2\sqrt{LB} - 2\sqrt{LA}$, dum $x =$
 AB . Secundi igitur termini fluens erit
 $\frac{SI^2}{\sqrt{2SI}}$, in $\sqrt{LB} - \sqrt{LA}$.

Quantitatis $\frac{dx}{LA+x}^{\frac{5}{2}}$, fluens est $-\frac{2}{5(LA+x)^{\frac{3}{2}}}$
 $+ Q$, et $Q = \frac{2}{3\sqrt{LA}^3}$, undè fluens inte-
 gra erit $\frac{2}{5\sqrt{LA}^3} - \frac{2}{3\sqrt{LB}^3}$, ubi $x =$
 AB , et proinde tertii termini fluens est
 $\frac{SI^2 \times ALB}{3\sqrt{2SI}}$ in $\frac{1}{\sqrt{LA}^3} - \frac{1}{\sqrt{LB}^3}$.

(^o) * Et hæ post debitam reductionem, &c.
 Est $PS \times SI = AS^2$ (per Prop. VIII. Lib. VI.
 Elem.) sed $PS = LS + LI$, ob $PL =$
 LI , (per constr.) et $SI = LS - LI$, ergò
 $PS \times SI = LS^2 - LI^2 = AS^2$, et
 hinc $LI^2 = LS^2 - AS^2 = LS + AS$

$\times LS - AS = LB \times LA$. Quare LI sive
 $LS - SI = \sqrt{LA \times LB}$, et $2LS -$
 $2SI = 2\sqrt{LA \times LB}$, et $2SI = 2LS$
 $- 2\sqrt{LA \times LB} = LB - 2\sqrt{LB \times LA}$
 $+ LA$, et extractâ utrinque radice quadratâ
 $\sqrt{2SI} = \sqrt{LB} - \sqrt{LA}$. His positis,
 facilis est terminorum reductio; erit enim,

$$-\frac{1}{\sqrt{LB}} = \frac{\sqrt{LB} - \sqrt{LA}}{\sqrt{LB \times LA}} = \frac{\sqrt{2SI}}{LI}.$$

Quare patet primum fluentis terminum esse
 $\frac{2SI^2 \times SL}{LI}$; secundum verò esse SI^2 .

Tertius terminus, reductione ad communem
 denominatorem factâ, est $\frac{SI^2 \times LA \times LB}{3\sqrt{2SI}}$

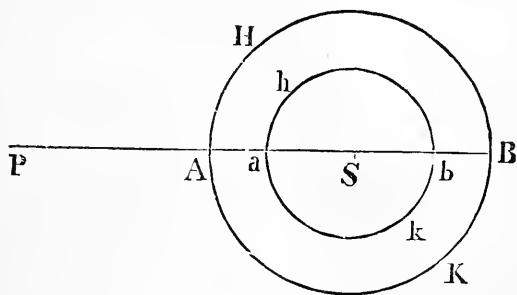
$$\times \frac{\sqrt{LB^3} - \sqrt{LA^3}}{LA \times LB \sqrt{LA \times LB}} = \frac{SI^2 \times \sqrt{LB^3} - \sqrt{LA^3}}{3LI \times \sqrt{LB} - \sqrt{LA}}.$$

Peractâ di-
 visione invenitur $\frac{LB^{\frac{3}{2}} - LA^{\frac{3}{2}}}{LB^{\frac{1}{2}} - LA^{\frac{1}{2}}} = LB +$

$$LB^{\frac{1}{2}} + LA^{\frac{1}{2}} + LA = LB + LI +$$

trahitur, est ut $\frac{S I \text{ cub.}}{P I}$, (^P) id est, reciprocè ut $P S \text{ cub.} \times P I$. Q. e. i.

Eâdem methodo determinari potest attractio corpusculi siti intra sphæram, sed expeditius per Theorema sequens.



$LA = 2SI + 3LI$, ob $LB + LA = 2LS = 2SI + 2LI$. Quare tertius terminus est $\frac{SI^2 \times 2SI + 3LI}{3LI} = SI^2$

+ $\frac{2SI^3}{3LI}$, unde tres fluentes ad communem denominatorem reducti fiunt

$$\frac{6SI^2 \times SL - SI^2 \times 3LI - SI^2 \times 3LI - 2SI^3}{3LI} = \frac{6SI^2 \times SL - LI - 2SI^3}{3LI}, \text{ sed quia}$$

$$SL - LI = SI \text{ fiunt } \frac{6SI^3 - 2SI^3}{3LI} = \frac{4SI^3}{3LI}.$$

(^P) * Id est reciprocè ut $PS^3 \times PI$. Nam cum sit $PS \times SI = AS^2$, ideòque $SI = \frac{AS^2}{PS}$, hinc, dato radio AS , est SI ut $\frac{1}{PS}$.

SI^3 , ut $\frac{1}{PS^3}$; est verò $LI = \frac{1}{2}PI$ ideòque

etiam et LI ut PI , unde erit $\frac{4SI^3}{3LI}$ ut

$$\frac{1}{PS^3 \times PI}, \text{ neglectâ fractione } \frac{4}{3}.$$

531. Cor. 1. In accessu corporis P ad sphæram, ita crescit illius attractio, ut in contactu infinita evadat, dum enim coincidit P cum A , puncta H et I cum eodem puncto A coincidunt, fitque $PI = 0$, et proindè quantitas $\frac{1}{PS^3 \times PI}$ infinita.

532. Cor. 2. Attractio corpusculi in contactu A positi versùs sphæram cavam $A h B K a$, infinita est. Hæc enim attractio habetur, si ex attractione infinita versùs sphæram solidam

$A H B K S$, subducatur attractio finita versùs sphæram interiorem $a h b k S$.

533. Hic adjungemus solutionem casûs tertii qui pendet a quadraturâ hyperbolæ, ubi nempe vis est ut PE^5 reciprocè (520). Scribe igitur PE^5 , pro V ; dein $PS^3 \times LD^3$ pro PE^6 , et $PS \times SI$ pro AS^2 , unde est $\frac{PS}{PE \times V} = \frac{SI^2}{4LD^3}$ et fiet DN , ut $\frac{SL \times SI^2}{2LD^2} - \frac{SI^2}{4LD} - \frac{ALB \times SI^2}{4LD^3}$ sen, ut $\frac{SL \times SI^2}{LD^2} - \frac{1}{2} \frac{SI^2}{LD} - \frac{1}{2} \frac{ALB \times SI^2}{LD^3}$; undè fluxio $DN \times Dd$, erit ut $\frac{SL \times SI^2 \times dx}{LA + x|^2} - \frac{1}{2} \frac{SI^2 \times dx}{LA + x} - \frac{1}{2} \frac{ALB \times SI^2 \times dx}{LA + x|^3}$, positâ $AD = x$.

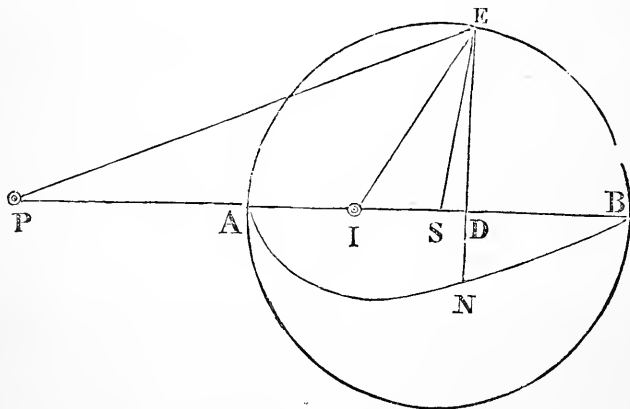
Quantitatis $\frac{dx}{LA + x|^2}$, fluentem suprâ (526) invenimus esse $\frac{1}{LA} - \frac{1}{LB} = \frac{LB - LA}{LA \times LB} = \frac{AB}{LI^2}$ ubi x seu $AD = AB$. Quare primi termini fluens erit $\frac{SL \times SI^2 \times AB}{LI^2}$.

Quantitatis $\frac{dx}{LA + x|^3}$ fluens $= \frac{-1}{2(LA + x)^2} + Q \text{ const.}$ quæ evanescere debet positâ x , seu $AD = 0$, quare erit $Q = \frac{1}{2LA^2}$ et fluens accurata, ubi $AD = AB$, erit $\frac{1}{2LA^2} -$

PROPOSITIO LXXXII. THEOREMA XLI.

In sphaerâ centro S intervallo S A descriptâ, si capiantur S I, S A, S P continuè proportionales : dico quod corpusculi intra sphaeram, in loco quovis I, attractio est ad attractionem ipsius extra sphaeram, in loco P, in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione distantiarum a centro I S, P S, et subduplicatâ ratione virium centripetarum, in locis illis P et I, ad centrum tendentium.

Ut, si vires centripetæ particularum sphaeræ sint reciprocè ut distantiae corpusculi a se attracti; vis, quâ corpusculum situm in I trahitur a sphaerâ totâ, erit ad vim, quâ trahitur in P, in ratione compositâ ex sub-



duplicatâ ratione distantiae S I ad distantiam S P, et ratione subduplicatâ vis centripetæ in loco I, a particulâ aliquâ in centro oriundæ, ad vim centripetam in loco P ab eâdem in centro particulâ oriundam, id est, ratione subduplicatâ distantiarum S I, S P ad invicem reciprocè. Hæ duæ rationes subduplicatæ componentur rationem æqualitatis, et propterea attrac-

$$\frac{1}{2} \frac{L B^2}{L A^2} = \frac{L B^2 - L A^2}{2 L A^2 \times L B^2} = \frac{2 S L \times A B}{2 L I^4} \\ = \frac{S L \times A B}{L I^4}; \text{ undè tertii termini fluens erit}$$

$$\frac{1}{2} \frac{A L B \times S I^2 \times S L \times A B}{L I^4} = \frac{1}{2} \frac{S L \times S I^2 \times A B}{L I^2},$$

et differentia fluentium primi et tertii termini erit $\frac{1}{2} \frac{S L \times S I^2 \times A B}{L I^2}$. Secundi termini

erit $\frac{1}{2} S I^2 \times \frac{d x}{L A + x}$, fluens est area hyperbolæ quæ ita describitur. Ad puncta L, A, B, (vid.

fig. exempli 2^æ) erige perpendiculara L l, A a, B b, et asymptotis L l, L B, describe Hyperbolam æquilateram cujus sit dignitas $\frac{1}{2} S I^2$, et quoniam est (Theor. 4. Hyp.) $L D \times D F = \frac{1}{2} S I^2$ ideòque $D F = \frac{1}{2} \frac{S I^2}{L D}$, erit $D F \times D d =$

$\frac{1}{2} \frac{S I^2 \times d x}{L A + x}$ positâ A D = x. Quapropter area hyperbolica A a b B, æqualis est fluenti secundi termini ubi A D = A B. Hæc igitur area subducta de rectangulo $\frac{1}{2} \frac{S L \times S I^2 \times A B}{L I^2}$ relinquet aream quæsitam A N B.

tiones in I et P a sphærâ totâ factæ æquantur. Simili computo, si vires particularum sphæræ sunt reciprocè in duplicatâ ratione distantiarum, colligetur quod attractio in I sit ad attractionem in P, ut distantia S P ad sphæræ semidiametrum S A : si vires illæ sunt reciprocè in triplicatâ ratione distantiarum, attractiones in I et P erunt ad invicem ut S P quad. ad S A quad. : Si in quadruplicatâ, ut S P cub. ad S A cub. Unde cum attractio in P, in hoc ultimo casu, inventa fuit reciprocè ut P S cub. \times P I, attractio in I erit reciprocè ut S A cub. \times P I, id est (ob datum S A cub.) reciprocè ut P I. ^(q) Et similis est progressus in infinitum. Theorema verò sic demonstratur.

Stantibus jam ante constructis, et existente corpuseculo in loco quovis P, ^(r) ordinatim applicata D N inventa fuit ut $\frac{D E q \times P S}{P E \times V}$. Ergo si agatur I E, ordinata illa pro alio quovis corpuseculi loco I, ^(s) mutatis mutandis, evadet ut $\frac{D E q \times I S}{I E \times V}$. Pone vires centripetas, e sphæræ puncto quovis E manantes, esse ad invicem in distantiiis I E, P E, ut P Eⁿ ad I Eⁿ (ubi numerus n designet indicem potestatum P E et I E) ^(t) et ordinatæ illæ fient ut $\frac{D E q \times P S}{P E \times P E^n}$ et $\frac{D E q \times I S}{I E \times I E^n}$, quarum ratio ad invicem est ut P S \times I E \times I Eⁿ ad I S \times P E \times P Eⁿ. Quoniam ob continuè proportionales S I, S E, S P, ^(u) similia sunt triangula S P E, S E I, et inde fit I E ad P E ut I S ad S E vel S A; pro ratione I E ad P E scribe rationem I S ad S A; et ordinarum ratio evadet P S \times I Eⁿ ad S A \times P Eⁿ. ^(x) Sed P S ad S A subduplicata est ratio dis-

^(q) * *Similis est progressus in infinitum.* Vi- res centripetæ acceleratrices a particulâ aliquâ in centro positâ oriundæ, sint inter se in distantiiis I S, P S reciprocè ut harum distantiarum potestates I Sⁿ, P Sⁿ, et vis quâ corpuseculum situm in I trahitur a sphærâ totâ, erit ad vim quâ trahitur in loco P ut I S ^{$\frac{n}{2}$} ad P S ^{$\frac{1}{2}$} et P S ^{$\frac{n}{2}$} ad I S ^{$\frac{n}{2}$} conjunctim, hoc est, ut P S ^{$\frac{n-1}{2}$} ad I S ^{$\frac{n-2}{2}$} . Quare cum sit, (ex Hyp.) P S :

A S = A S : S I, adeoque I S = $\frac{A S^2}{P S}$, et

I S ^{$\frac{n-1}{2}$} = $\frac{A S^{n-1}}{P S^{\frac{n-1}{2}}}$, vires illæ erunt ad

$$\frac{P S^{\frac{n-1}{2}}}{P S^{\frac{n-1}{2}}}$$

invicem ut P S ^{$\frac{n-1}{2}$} ad $\frac{A S^{n-1}}{P S^{\frac{n-1}{2}}}$, seu ut

$$\frac{P S^{\frac{n-1}{2}}}{P S^{\frac{n-1}{2}}}$$

P Sⁿ⁻¹ ad A Sⁿ⁻¹. Hinc si n = 1, vires erunt in ratione æqualitatis, si n = 2, erunt ut P S ad A S; Si n = 3 ut P S² ad A S², si n = 4 ut P S³ ad A S³, et itâ porro in infinitum.

^(r) * *Ordinatim applicata D N inventa fuit,* &c. (Cor. 4. Prop. 80.)

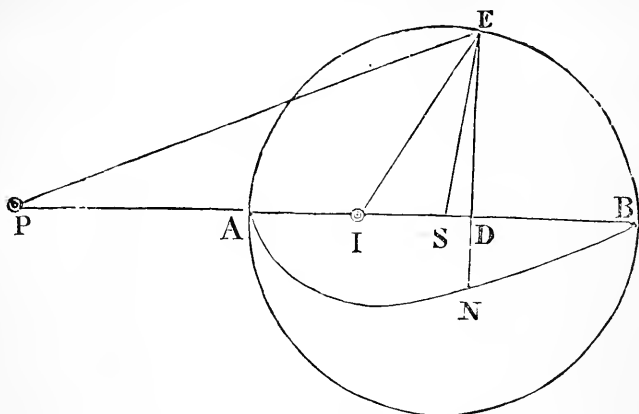
^(s) * *Mutatis mutandis.* Nempè corpore in I sito, radio I E, describendus arcus circuli, et in formulâ attractionis $\frac{D E^2 \times P S}{P E \times V}$, loco P S et P E, scribe I S, et I E.

^(t) * *Et ordinatæ illæ,* &c. Si loco V scribantur P Eⁿ, et I Eⁿ, quæ sunt reciprocè ut vires acceleratrices in locis P et I, (per Cor. 4. Prop. 80.)

^(u) * *Similia sunt triangula S P E, S E I,* per Prop. 6. Lib. 6. Elem.

^(x) * *Sed P S ad S A subduplicata est ratio distantiarum P S, S I, ob continuè proportionales P S, S A, S I.* Porro vires in distantiiis P S, I S, sunt ad invicem ut I Sⁿ, ad P Sⁿ

tantiarum PS, SI ; et IE^n ad PE^n (ob proportionales IE ad PE ut IS ad SA) subduplicata est ratio virium in distantiis PS, IS . Ergo



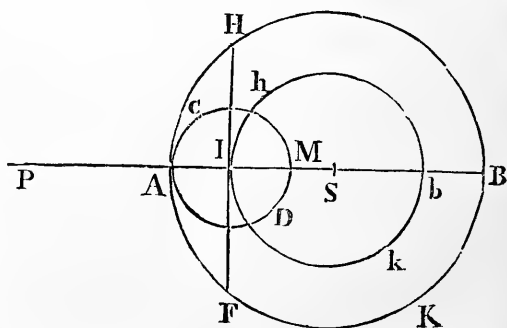
ordinatæ, et propterea areæ quas ordinatæ describunt, hisque proportionales attractiones, sunt in ratione compositâ ex subduplicatis illis rationibus. Q. e. d.

(ex Hyp.) et $IS : PS = IS^2 : AS^2 = IE^2 : PE^2$, (ob proportionales $IE : PE = IS : AS$), atque adeò $IS^n : PS^n = IE^{2n} : PE^{2n}$, et $IS^{\frac{n}{2}} PS^{\frac{n}{2}} = IE^n : PE^n$. Quare IE^n est ad PE^n in ratione subduplicatâ virium in distantiis PS, IS , et ordinatarum ratio $PS \times IE^n$, ad $SA \times PE^n$ æqualis est rationi $PS^{\frac{1}{2}} \times IS^{\frac{n}{2}}$, ad $IS^{\frac{1}{2}} \times PS^{\frac{n}{2}}$.

534. *Scholium.* Iisdem positis quæ in Prop. 82. si centro I radio IA sphaera $ACMD$ descripta sit, vis quâ corpusculum in I situm a totâ sphaerâ maiore $AHBK$ versus centrum S trahitur, æqualis est vi quâ subductâ sphaera minore $ACMD$ traheretur. Nam corpusculum in centro I sphaeræ $ACMD$ positum, æqualiter undiquè ab hujus sphaeræ minoris partibus trahitur.

535. *Cor. 1.* Si centro S radio SI descripta sit sphaera $Ihbk$, et vis centripeta in recessu corporis attracti decrescat in triplicatâ ratione distantiarum a particulis materiæ trahentibus, corpusculum in I situm seu in contactu sphaeræ cavæ $AIH BK I$, subductâ sphaerâ interiore $Ihbk$, vi infinitâ retrahitur a centro S versus A . Nam vis quâ corpusculum in contactu I a

sphaerâ interiore $Ihbk$ versus centrum S trahitur, infinita est (520. 527) respectu vis illius quâ extrâ contactum traheretur. Sed vis quâ a



sphaerâ totâ solidâ $AHBK S$, versus idem centrum S trahitur finita est, ut potè quæ rationem finitam habeat ad vim finitam, quâ corpusculum in loco P urgeretur (Prop. 82.) ergò vis quâ a sphaerâ cavâ $AIH BK I$, retrahitur a centro versus A infinita est; vis enim quâ in centrum S , a sphaerâ solidâ $AHBK S$ in centrum trahitur, æqualis est vi sphaeræ interioris $Ihbk S$, demptâ vi contrariâ sphaeræ cavæ $AIH BK I$.

536. *Cor. 2.* Ductâ per I rectâ HF ad AB

PROPOSITIO LXXXIII. PROBLEMA XLII.

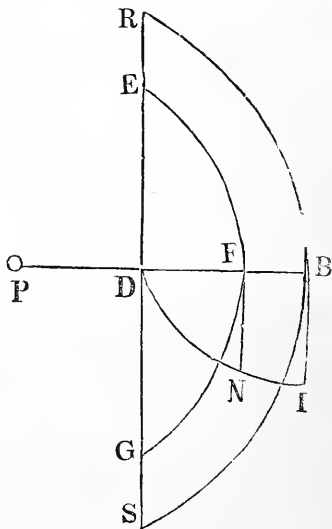
Invenire vim quâ corpusculum in centro sphaeræ locatum ad ejus segmentum quodcumque attrahitur.

Si P corpus in centro sphaeræ, et R B S D segmentum ejus plano R D S et superficie sphaericâ R B S contentum. Superficie sphaericâ E F G centro P descriptâ secetur D B in F, ac distinguatur segmentum in partes B R E F G S, F E D G. Sit autem superficies illa non purè mathematica, sed physica, profunditatem habens quam minimam. Nominetur ista profunditas O, et erit hæc superficies (per ^(y)) demonstrata Archimedis) ut $P F \times D F \times O$. Ponamus præterea vires attractivas particularum sphaeræ esse reciproçè ut distantiarum dignitas illa, cujus index est n; et vis, quâ superficies E F G trahit corpus P,

erit (per Prop. LXXIX.) ut $\frac{D E q \times O}{P F^n}$,

id (^(z)) est, ut $\frac{2 D F \times O}{P F^n - 1} - \frac{D F q \times O}{P F^n}$.

Huic proportionale sit perpendicularum F N ductum in O; et (^(a)) area curvilinea B D I, quam ordinatim applicata F N in longitudinem D B per motum continuum ducta describit, erit ut vis tota quâ segmentum totum R B S D trahit corpus P. Q. e. i.



perpendiculari et sphaeræ occurrente in H et F vis quâ sphaeræ segmentum A H F corpusculum in contactu, I situm versus A trahit, est etiã infinita in eâdem virium hypothesi. Nam partes omnes segmenti cavi I H b B K F I, corpus in I positum ad centrum S trahunt, ideòque a solo segmento A H F a centro versus A retrahitur, sed vi infinita a centro retrahitur 555. Ergo, &c.

(^(y)) * Per demonstrata Archimedis. Nam (515) elementum superficiei E F G, est ut P F ducta in elementum lineæ D F, adeòque ob datam P F, respectu superficiei totius E F G, superficies illa (165) erit ut $P F \times D F$, et proinde lamina ex hac superficie et profunditate O, genita erit ut $P F \times D F \times O$.

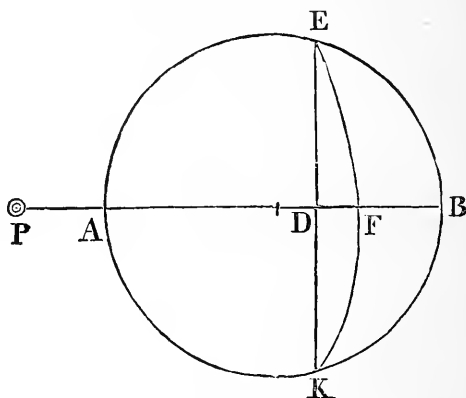
(^(z)) * Id est, &c. Nam (per Prop. 15. Lib. 6. Elem.) $D E^2 = 2 P F - D F \times D F$
 $= 2 P F \times D F - D F^2$. Quare $\frac{D E^2 \times O}{P F^n}$
 $= \frac{2 D F \times O}{P F^n - 1} - \frac{D F^2 \times O}{P F^n}$.

(^(a)) 537. * Et area curvilinea, &c. Si segmentum R B S D R, in lamiras innumeras profunditatis evanescentis O divisum intelligatur, et capiatur semper perpendicularum F N, vi singularum laminarum proportionale; manifestum est (per Lem. 4.) summam elementorum $F N \times O$, seu aream curvilineam D N I B, proportionalem fore summæ virium. Sit igitur $P D = a$, $P F = x$, $D F = x - a$, et erit

PROPOSITIO LXXXIV. PROBLEMA XLIII.

Invenire vim, quâ corpusculum, extra centrum sphaeræ in axe segmenti cujusvis locatum, attrahitur ab eodem segmento.

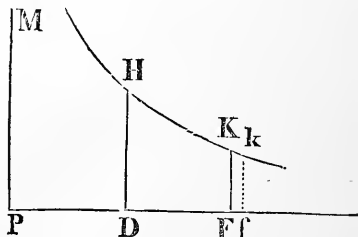
A segmento E B K trahatur corpus P in ejus axe A D B locatum. Centro P intervallo P E describatur superficies sphaerica E F K, quâ distinguatur segmentum in partes duas E B K F E et E F K D E. (b) Quæraturs vis partis prioris per Prop. LXXXI. et vis partis posterioris per Prop. LXXXIII.; et summa virium erit vis segmenti totius E B K D E. Q. e. i.



laminæ sphaericæ E F G vis attractiva ut $\frac{2x dx - 2a dx}{x^n - 1} - \frac{xx dx - 2ax dx + a dx}{x^n}$
 $= \frac{dx}{x^{n-2}} - \frac{a dx}{x^n} = x^{2-n} dx - a a x^{-n} dx$, cujus fluens $= \frac{x^{3-n}}{3-n} - \frac{a a x^{1-n}}{1-n} + Q$ const. Sed posita $x = a$, segmentum et vis illius evanescent, ergo erit $Q = -\frac{a^{3-n}}{3-n} + \frac{a^{3-n}}{1-n} = \frac{2a^{3-n}}{3-n \times 1-n}$,
 et fluens accurata $= \frac{x^{3-n}}{3-n} - \frac{a a x^{1-n}}{1-n} + \frac{2a^{3-n}}{3-n \times 1-n}$.

538. Cor. Hinc patet vim quâ corpus in P locatum, a segmento trahitur semper posse algebraicè exponi, duobus casibus exceptis in quibus n est 1 vel 3. tunc autem per logarithmos vel areas hyperbolicas habetur. In 1^o. casu areæ D N I, fluens erit $x dx - \frac{a dx}{x}$. Primi termini fluens est $\frac{1}{2} x x + Q$, quæ evanescere debet posita $x = a$, quare erit $Q = -\frac{1}{2} a a$, et fluens accurata $= \frac{1}{2} x x - \frac{1}{2} a a$. Ut secundi termini fluens obtineatur, per punctum P agatur P M ad P F normalis, et asymptotis P M, P F, describatur Hyperbola æquilatera cujus sit dignitas $P D^2$; per puncta D, F, f erigantur perpendiculara D H, F K, f k hyperbolæ occurrentia in H, K, k, sintque puncta F, f, infinitè propinqua, et erit area hyperbolica D H K F, æqualis flu-

enti secundi termini; nam (per Theor. 4. de hyperbolâ) $P D \times D H = P D^2 = P F \times F K$, et ideò $F K = \frac{P D^2}{P F}$, ac $F K \times F f = \frac{P D^2 \times D x}{P F}$ et area D H K F evanescit, ubi $P F$ seu $x = P D$.



In 2^o. casu areæ D N I, fluens est $\frac{dx}{x} - \frac{a dx}{x^3}$. Secundi termini fluens est $\frac{a a}{2 x x} + Q$, et invenitur $Q = -\frac{1}{2}$, posita $x = a$, atque adeò fluens accurata, erit $\frac{a a}{2 x x} - \frac{1}{2}$. Ponatur $a = 1$, et primi termini $\frac{dx}{x}$, fluens, erit area hyperbolica D H K F $= S. \frac{a a dx}{x}$. Quare area D N I est ut, $D H K F + \frac{1}{2} - \frac{1}{2 x x}$.

(b) * Quæraturs vis partis prioris. 525. 529.

Scholium.

Explicatis attractionibus corporum sphæricorum, jam pergere liceret ad leges attractionum aliorum quorundam ex particulis attractivis similiter constantium corporum; sed ista particulatim tractare minus ad institutum spectat. Suffecerit propositiones quasdam generaliores de viribus hujusmodi corporum deque motibus inde oriundis, (c) ob earum in rebus philosophicis aliqualem usum, subjungere.

(c) * *Ob earum in rebus philosophicis aliqualem usum.* Vide Quæstiones Lib. 4. Optices Newtoni. 30. Theoremata ad calcem Astronomiæ Clariss. Keilii, Physicam Clariss. s' Gravesandii,

Dissertationem Clariss. De Maupertuis in Commentariis Paris. 1732. ubi has Newtoni sectiones clarè exponit.

SECTIO XIII.

De corporum non sphæricorum viribus attractivis.

PROPOSITIO LXXXV. THEOREMA XLII.

Si corporis attracti, ubi attrahenti contiguum est, attractio longè fortior sit, quam cum vel minimo intervallo separantur ab invicem : vires particularum trahentis, in recessu corporis attracti, decrescunt in ratione plusquam duplicatâ distantiarum a particulis.

Nam si vires decrescunt in ratione duplicatâ distantiarum a particulis ; attractio versus corpus sphæricum, propterea quod (per Prop. LXXIV.) sit reciprocè ut quadratum distantie attracti corporis a centro sphære, haud sensibilibiter augebitur ex contactu ; atque adhuc minus augebitur ex contactu, si attractio in recessu corporis attracti decrescat in ratione minore. Patet igitur propositio de sphæris attractivis. ^(d) Et par est ratio orbium sphæricorum concavorum corpora externa trahentium. Et multo magis res constat in orbibus corpora interius constituta trahentibus, cum attractiones passim per orbium cavitates ab attractionibus contrariis (per Prop. LXX.) tollantur, ideoque vel in ipso contactu nullæ sunt. Quod si sphæris nisce orbibusque sphæricis partes quælibet a loco contactus remotæ auferantur, et partes novæ ubivis addantur : mutari possunt figuræ horum corporum attractivorum pro lubitu, nec tamen partes additæ vel subductæ, cum sint a loco contactus remotæ, augebunt notabiliter attractionis excessum, qui ex contactu oritur. Constat igitur propositio de corporibus figurarum omnium. Q. e. d.

PROPOSITIO LXXXVI. THEOREMA XLIII.

Si particularum, ex quibus corpus attractivum componitur, vires in recessu corporis attracti decrescunt in triplicatâ vel plusquam triplicatâ ratione distantiarum a particulis, attractio longè fortior erit in contactu, quam cum trahens et attractum intervallo vel minimo separantur ab invicem.

Nam attractionem in accessu attracti corpusculi ad hujusmodi sphæram

(d) * Et par est ratio orbium sphæricorum concavorum. (Per Prop. 71.)

trahentem ^(e) augeri in infinitum, constat per solutionem Problematis XLI. in exemplo secundo ac tertio exhibitam. Idem, per exempla illa et Theorema XLI. inter se collata, ^(f) facile colligitur de attractionibus corporum versus orbes concavo-convexos, sive corpora attracta collocentur extra orbes, sive intra in eorum cavitatibus. Sed et addendo vel auferendo his sphaeris et orbibus ubivis extra locum contactus materiam quamlibet attractivam, eò ut corpora attractiva induant figuram quamvis assignatam, constabit Propositio de corporibus universis. Q. e. d.

PROPOSITIO LXXXVII. THEOREMA XLIV.

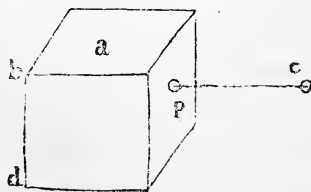
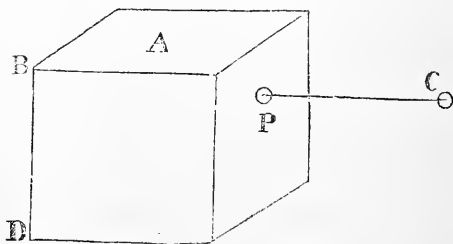
Si corpora duo sibi invicem similia, et ex materiâ æqualiter attractivâ constantia, seorsim attrahant corpuscula sibi ipsis proportionalia et ad se similiter posita: attractiones acceleratrices corpusculorum in corpora tota erunt ut attractiones acceleratrices corpusculorum in eorum particulas totis preportionales, et in totis similiter positas.

Nam si corpora distinguantur in particulas, quæ sint totis proportionales, et in totis similiter sitæ; erit, ut attractio in particulam quamlibet unius corporis ad attractionem in particulam correspondentem in corpore altero, ita attractiones in particulas singulas primi corporis ad attractiones in alterius particulas singulas correspondentes; et componendo, ita attractio in totum primum corpus ^(g) ad attractionem in totum secundum. Q. e. d.

^(e) * Augeri in infinitum constat, &c. (521. 527. 531.)

^(f) * Faciè colligitur de attractionibus, &c. 528. 530. 552. 555. 556.

^(g) 539. * Ad attractionem in totum secundum. Corpora similia A, a, seorsim attrahant corpuscula C, c sibi ipsis proportionalia et ad se similiter posita, sintque P, p particulae totis A, a, proportionales et in totis similiter sitæ et attractio decrescat in ratione dignitatis distantiarum, cujus sit index n; erit attractio corpusculi C in particulam P ad attractionem corpusculi c in particulam p, ut $P \times p c^n$, ad $p \times P C^n$. Unde si corpora A et a in particulas innumeras ut P et p divisa intelligantur, erit, componendo, attractio corpusculi C in totum corpus A ad attractionem corpusculi c in totum corpus a, ut $P \times p c^n$ ad $p \times P C^n$, quod particulae omnes P, p sint ubique totis similes et in iis similiter sitæ, et distantiae earum a corpusculis C, c semper maneant proportionales distantiiis

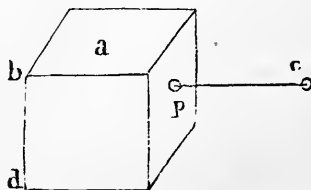
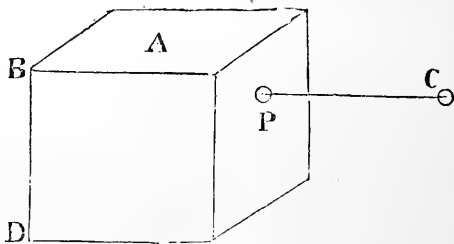


Corol. 1. Ergo si vires attractivæ particularum, augendo distantias corpusculorum attractorum, decrescant in ratione dignitatis cujusvis distantiarum; attractiones acceleratrices in corpora tota erunt ut corpora directè, et distantiarum dignitates illæ inversè. Ut si vires particularum decrescant in ratione duplicatâ distantiarum a corpusculis attractis, corpora autem sint ut A cub. et B cub. ideoque tum corporum latera cubica, tum corpusculorum attractorum distantiae a corporibus, ut A et B: attractiones acceleratrices in corpora erunt ut $\frac{A \text{ cub.}}{A \text{ quad.}}$ et $\frac{B \text{ cub.}}{B \text{ quad.}}$, id est, ut corporum latera illa cubica A et B. Si vires particularum decrescant in ratione triplicatâ distantiarum a corpusculis attractis; attractiones acceleratrices in corpora tota erunt ut $\frac{A \text{ cub.}}{A \text{ cub.}}$ et $\frac{B \text{ cub.}}{B \text{ cub.}}$, id est, æquales. Si vires decrescant in ratione quadruplicatâ; attractiones in corpora erunt ut $\frac{A \text{ cub.}}{A \text{ q. q.}}$ et $\frac{B \text{ cub.}}{B \text{ q. q.}}$, id est, reciprocè ut latera cubica A et B. Et sic in cæteris.

Corol. 2. ^(h) Unde vicissim, ex viribus, quibus corpora similia trahunt

P C, p c. Cum igitur sit P ad p ut A ad a, et distantiae p c, P C sint lateribus homologis b d, B D proportionales (ex Hyp.) erit attractio corpusculi C, in totum corpus A, ad attractionem corpusculi c in totum corpus a, ut $A \times p c^n$ ad $a \times P C^n$, atque etiam ut $A \times b d^n$ ad $a \times B D^n$, et ut $B D^3 \times b d^n$, ad $b d^3 \times B D^n$, hoc est, ut $b d^n$ ad $B D^n$, ob proportionales $A : a = B D^3 : b d^3$, (per Hyp.) ex quibus patet Corollarium 1^{um}. quod sequitur; Nam si $n = 2$, erunt attractiones ut B D ad b d; si $n = 3$, erunt æquales; si, $n = 4$, erunt ut b d, ad B D, hoc est, reciprocè ut latera cubica corporum.

^(h) 540. * Unde vicissim, &c. Nam si experimentis inventum sit attractionem corpusculi C in corpus A, esse ad attractionem corpusculi c in a, ut numerus N ad numerum n, ponaturque vim particularum attractivarum in recessu corpusculi attracti decrescere in ratione dignitatis distantiarum cujus sit index x erit (539) $n : N = B D^x - 3 : b d^x - 3$, adeo-



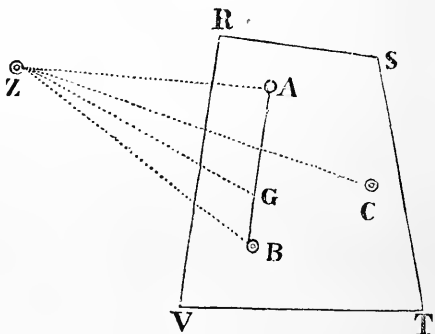
que (si L logarithmum significet quantitatis cui præponitur) erit $L. \frac{n}{N} = L. \frac{B D^x - 3}{b d^x - 3}$
 $= \frac{x - 3}{L. \frac{B D}{b d}} \times L. \frac{B D}{b d}$. Quare erit $x \times$
 $L. \frac{B D}{b d} = L. \frac{n}{N} + 3. L. \frac{B D}{b d}$, et $x =$

corpuscula ad se similiter posita, colligi potest ratio decrementi virium particularum attractivarum in recessu corpusculi attracti; si modo decrementum illud sit directè vel inversè in ratione aliquâ distantiarum.

PROPOSITIO LXXXVIII. THEOREMA XLV.

Si particularum æqualium corporis cujuscunque vires attractivæ sint ut distantie locorum a particulis: vis corporis totius tendet ad ipsius centrum gravitatis; et eadem erit cum vi globi ex materiâ consimili et æquali constantis, et centrum habentis in ejus centro gravitatis.

Corporis R S T V particulæ A, B trahant corpusculum aliquod Z viribus, quæ, si particulæ æquantur inter se, sint ut distantie A Z, B Z; sin particulæ statuantur inæquales, sint ut hæ particulæ et ipsarum distantie A Z, B Z conjunctim, sive (si ita loquar) ut hæ particulæ in distantias suas A Z, B Z respectivè ductæ. Et exponantur hæ vires per contenta illa $A \times AZ$ et $B \times BZ$. Jungatur A B, et secetur ea in G ut sit A G ad B G ut particula B ad particulam A; et erit G commune centrum gravitatis particularum A et B. Vis $A \times AZ$ (per legem Corol. 2.) resolvitur in vires $A \times GZ$ et $A \times AG$, et vis $B \times BZ$ in vires $B \times GZ$ et $B \times BG$. Vires autem $A \times AG$ et $B \times BG$, ob proportionales A ad B et B G ad A G, æquantur; ideoque cum dirigantur in partes contrarias, se mutuo destruunt. Restant vires $A \times GZ$ et $B \times GZ$. Tendunt hæ ab Z versus centrum G, et vim $A + B \times GZ$ component;



L. $\frac{n}{N}$
 $\frac{B D}{B D} + 3$. Invenietur itaque dignitatis in-

L. $\frac{B D}{b d}$
 dex x, per tabulas logarithmicas. Exempli

causâ. Si $\frac{n}{N} = \frac{b d}{B D}$, erit L. $\frac{b d}{B D} = -$

L. $\frac{B D}{b d}$, et ideò x = -1 + 3 = 2. Si $\frac{n}{N}$

= 1, erit L. $\frac{n}{N} = 0$, et proindè x = 3. Si

$\frac{n}{N} = \frac{B D}{b d}$, erit x = 4, prorsus ut suprâ. Si

$\frac{n}{N} = \frac{B D^p}{b d^p}$, erit L. $\frac{n}{N} = p \times L. \frac{B D}{b d}$, et x

= p + 3. Sed si $\frac{n}{N} = \frac{b d^p}{B D^p}$, invenie-

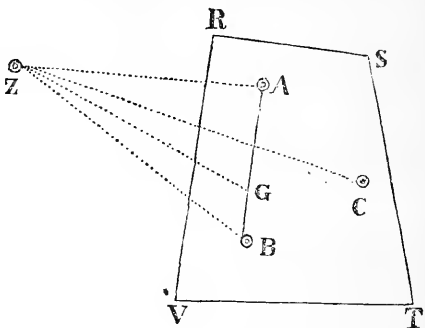
tur x = 3 - p. Si $\frac{B D}{b d} = 10$, erit x =

L. $\frac{n}{N}$

$\frac{L. \frac{n}{N}}{1.0000000} + 3 = L. \frac{n}{N} + 3$.

hoc est, vim eandem ac si particulæ attractivæ A et B consisterent in eorum communi gravitatis centro G, globum ibi componentes.

Eodem argumento, si adjungatur particula tertia C, et componatur hujus vis cum vi $\overline{A} + \overline{B} \times GZ$ tendente ad centrum G; vis inde oriunda tendet ad commune centrum gravitatis globi illius in G et particulæ C; hoc est, ad commune centrum gravitatis trium particularum A, B, C; et eadem erit, ac si globus et particula C consisterent in centro illo communi, globum majorem ibi componentes. Et sic pergitur in infinitum. Eadem est igitur vis tota particularum omnium corporis cujuscunque R S T V, ac si corpus illud, servato gravitatis centro, ⁽ⁱ⁾ figuram globi indueret. Q. e. d.



Corol. Hinc motus corporis attracti Z idem erit, ac si corpus attrahens R S T V esset sphaericum: et propterea si corpus illud attrahens vel quiescat, vel progrediatur uniformiter in directum; corpus attractum ^(k) movebitur in ellipsi centrum habente in attrahentis centro gravitatis.

PROPOSITIO LXXXIX. THEOREMA XLVI.

Si corpora sint plura ex particulis æqualibus constantia, quarum vires sunt ut distantie locorum a singulis: vis ex omnium viribus composita, quæ corpusculum quodcunque trahitur, tendet ad trahentium commune centrum gravitatis; et eadem erit, ac si trahentia illa, servato gravitatis centro communi, coirent et in globum formarentur.

Demonstratur eodem modo, atque Propositio superior.

Corol. Ergo motus corporis attracti idem erit, ac si corpora trahentia, servato communi gravitatis centro, coirent et in globum formarentur. Ideoque si corporum trahentium commune gravitatis centrum vel quiescit, vel progreditur uniformiter in lineâ rectâ; corpus attractum movebitur in ellipsi, centrum habente in communi illo trahentium centro gravitatis.

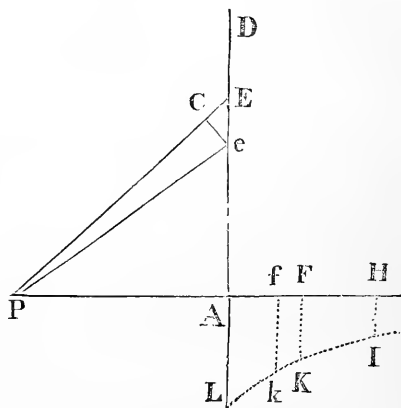
⁽ⁱ⁾ * *Figuram globi indueret.* Per Prop. 77.

^(k) * *Movebitur in ellipsi, &c.* Per Cor. Prop. 78. et per Cor. 1. Prop. 10.

PROPOSITIO XC. PROBLEMA XLIV.

Si ad singula circuli cujuscunque puncta tendant vires æquales centripetæ, crescentes vel decrescentes in quâcunque distantiarum ratione: invenire vim, quâ corpusculum attrahitur ubivis positum in rectâ, quæ plano circuli ad centrum ejus perpendiculariter insistit.

Centro A intervallo quovis A D, in plano, cui recta A P perpendicularis est, describi intelligatur circulus; et invenienda sit vis, quâ corpusculum quodvis P in eundem attrahitur. A circuli puncto quovis E ad corpusculum attractum P agatur recta P E. In rectâ P A capiatur P F ipsi P E æqualis, et erigatur normalis F K, quæ sit ut vis quâ punctum E trahit corpusculum P. Sitque I K L curva linea quam punctum K perpetuò tangit. Occurrat eadem circuli plano in L. In P A capiatur P H æqualis P D, et erigatur perpendiculum H I curvæ prædictæ occurrens in I; et erit corpusculi P attractio in circulum ut area A H I L ducta in altitudinem A P. Q. e. i.



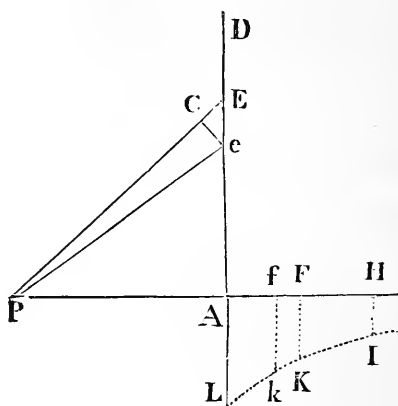
Etenim in A E capiatur linea quam minima E e. Jungatur P e et in P E, P A capiuntur P C, P f ipsi P e æquales. Et quoniam vis, quâ nulli centro A intervallo A E in plano prædicto descripti punctum quodvis E trahit ad se corpus P, ponitur esse ut F K, et inde vis quâ punctum illud trahit corpus P versus A, ⁽¹⁾ est ut $\frac{A P \times F K}{P E}$, et vis, quâ annulus totus trahit corpus P versus A, ut annulus et $\frac{A P \times F K}{P E}$ conjunctim; ^(m) annulus autem iste est ut rectangulum sub radio A E et latitudine

⁽¹⁾ * Est ut $\frac{A P \times F K}{P E}$, per Leg. Cor. 2.

^(m) * Annulus autem iste, &c. Nam annulus E Z X e, æqualis est differentiæ

E e, ⁽ⁿ⁾ et hoc rectangulum (ob proportionales P E et A E, E e et C E) æquatur rectangulo P E × C E seu P E × F f; erit vis, quâ annulus iste trahit corpus P versus A, ut

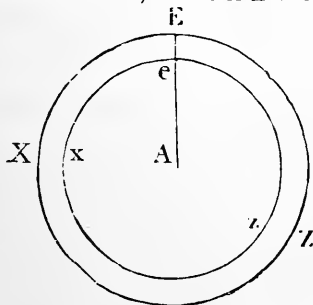
P E × F f et $\frac{A P \times F K}{P E}$ conjunctim, id est, ut contentum F f × F K × A P, sive ut area F K k f ducta in A P. ^(o) Et propterea summa virium, quibus annuli omnes in circulo, qui centro A et intervallo A D describitur, trahunt corpus P versus A, est ut area tota A H I K L ducta in A P. Q. c. d.



Corol. 1. Hinc si vires punctorum decrescunt in duplicatâ distantiarum ratione, hoc est, si sit F K ut $\frac{1}{P F}$ quad., ^(p) atque ideo area A H I K L ut $\frac{1}{P A} - \frac{1}{P H}$; erit attractio corpusculi P in circulum ut $1 - \frac{P A}{P H}$, id est, ut $\frac{A H}{P H}$.

Corol. 2. Et universaliter, si vires punctorum ad distantias D sint reciproce ut distantiarum dignitas quælibet Dⁿ, hoc est, si sit F K ut $\frac{1}{D^n}$,

circulorum A E Z X, A e z x, hoc est, $\frac{A E \times E Z X E - A e \times e z x e}{2}$, et quoniam evanescente E e, fit E Z X E = e z x e,



erit annulus evanescent ut $\frac{A E - A e}{2} \times E Z X E$, hoc est, ut $E e \times E Z X E$ sive quia radius A E est ut peripheria E Z X E, ut E e × A E.

⁽ⁿ⁾ * Et hoc rectangulum, &c. Anguli enim ad C et A recti æquantur, et angulus P E A utrique triangulo C E e, A E P communis est, adeoque triângula hæc similia sunt, et latera habent proportionalia. (Per Prop. 4. Lib. 6. Elem.)

^(o) * Et propterea summa virium, &c. Per Cor. Lem. 4.

^(p) * Atque ideo area, &c. Sit enim P F = x, F f = d x, et erit F K × F f, ut $\frac{d x}{x}$ (ex

Hyp.) cujus fluens est $-\frac{1}{x} + Q$. const. (165). Et quoniam area A L K F evanescere debet, ubi P F = P A, erit Q = $\frac{1}{P A}$ et area A L K F

ut $\frac{1}{P A} - \frac{1}{P F} = \frac{1}{P A} - \frac{1}{P H}$ ubi P F = P H. Cum igitur attractio corpusculi P, in circulum sit ut A H I K L × P A, erit quoque ut $1 - \frac{P A}{P H} = \frac{P H - P A}{P H} = \frac{A H}{P H}$.

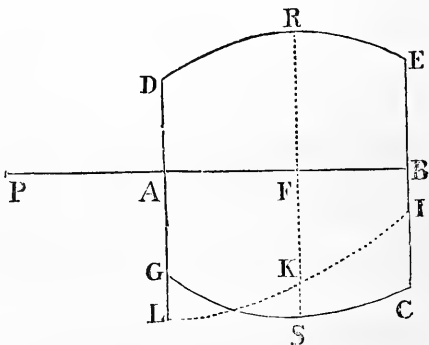
(^q) ideoque area A H I K L ut $\frac{1}{P A^{n-1}} - \frac{1}{P H^{n-1}}$; erit attractio corpusculi P in circulum ut $\frac{1}{P A^{n-2}} - \frac{P A}{P H^{n-1}}$.

Corol. 3. Et si diameter circuli augeatur in infinitum, et numerus n sit unitate major; attractio corpusculi P in planum totum infinitum erit reciproce ut $P A^{n-2}$, propterea quod (r) terminus alter $\frac{P A}{P H^{n-1}}$ evanescet.

PROPOSITIO XCI. PROBLEMA XLV.

Invenire attractionem corpusculi siti in axe solidi rotundi, ad cujus puncta singula tendunt vires æquales centripetæ in quâcunque distantiarum ratione decrecentes.

(^s) In solidum D E C G trahatur corpusculum P, situm in ejus axe A B. Circulo quolibet R F S ad hunc axem perpendiculari secetur hoc solidum, et in ejus semidiametro F S, in plano aliquo P A L K B per axem transeunte, capiatur (per Prop. XC.) longitudo F K vi, quâ corpusculum P in circulum illum attrahitur, proportionalis. Tangat autem punctum K curvam lineam L K I, planis extimorum circulorum A L et B I occurrentem in L et I; et erit attractio corpusculi P in solidum (^t) ut area L A B I. Q. e. i.



(^q) * Ideoque area, &c. Si enim D dicatur x, erit $P K \propto F f$ ut $\frac{d x}{x^n}$ (ex Hyp.) et (165) area

A F K L, ut $\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + Q.$ const.

positâ x seu P F = P A, invenitur Q = $\frac{1}{(n-1)P A^{n-1}}$, ideoque area A F K L, ut

$\frac{1}{(n-1)P A^{n-1}} - \frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$ hoc

est, ob datam quantitatem n - 1, ut $\frac{1}{P A^{n-1}}$

- $\frac{1}{P H^{n-1}}$ ubi P F = P H.

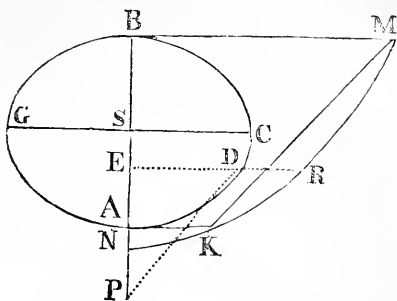
(r) * Terminus alter evanescet. Ob P H, infinitam.

(^s) * In solidum D E C G, &c. Convolutione superficiei A D R E B circa axem A B genitum.

(^t) * Ut area L A B I. Patet per Cor Lem. 4. Nam area illa est ut summa virium singulorum circulorum, qui per omnia puncta lineæ A B describi possunt.

541. *Scholium.* Sit abscissa P F = x, ejus fluxio d x, ordinatum applicata F R = y, P R = $\sqrt{y y + x x}$, et vis reciproce ut distantie dignitas cujus index n, erit F K ut $\frac{1}{P F^{n-1}}$

sectio conica cujus ordinatim applicata E R, ipsi P E perpendicularis, æquetur semper longitudini P D, quæ ducitur ad punctum illud D, in quo applicata ista sphæroidem secat. A sphæroidis verticibus A, B ad ejus axem A B erigantur perpendiculara A K, B M ipsis A P, B P æqualia respectivè, et propterea sectioni co-



seos N K R M semiaxis O N = s, alter semiaxis O T dicatur t, distantia verticis N a vertice A curvæ A C B, dicatur p, abscissa N E erit = p + x, et ordinatæ E R quadratum erit ex ellip-

seos natura $\frac{t t}{s s} \times 2 s p + 2 s x - p p - 2 p x - x x$, quod ex constructionis hypothesi fuit repertum

(542) = $a^2 + 2 a x + x x + \frac{c c}{b b} 2 b x - \frac{c c}{b b} x x$. Conferantur horum valorum termini homogenei, scilicet constantes cum constantibus, eos qui unam variabilem includunt cum similibus, &c. fient tres istæ æquationes (variabilibus deletis) $a^2 = \frac{t t}{s s} \times 2 s p - p p$; $a + \frac{c c}{b} =$

$\frac{t t}{s s} \times s - p$; $1 - \frac{c c}{b b} = -\frac{t t}{s s}$. Ex hac tertiâ æquatione, mutatis signis utrinque, reducto primo membro ad communem denominatorem, et

inversis terminis fit $\frac{s s}{t t} = \frac{b b}{c c - b b}$ et $s s =$

$\frac{b b t^2}{c c - b b}$. Tum secundæ æquationis $a + \frac{c c}{b}$

$= \frac{t t}{s s} \times s - p$ multiplicatis terminis per $\frac{s s}{t t}$, re-

ductione factâ primi membri ad eundem denominatorem, et substitutione factâ valoris $\frac{s s}{t t}$ supra

inveni fit $s - p = \frac{b}{c c - b b} \times \frac{b a + c c}{b}$.

Denique, primæ æquationis $a^2 = \frac{t t}{s s} \times$

$2 s p - p p$ multiplicatis membris per $\frac{s s}{t t}$, substitu-

to ejus valore, utrinque mutatis signis et addito s s, fit tandem $s s - \frac{b^2}{c^2 - b^2} a^2 = s s$

$- 2 s p + p p$, in quâ novâ æquatione cum secundum membrum sit ipsum quadratum quantitatis s - p, substituto ejus valore prius reperto, et loco s s in primo membro substituto etiam

ejus valore, fit $\frac{b b}{c^2 - b^2} \times \frac{t^2 - a^2}{t^2} =$

$\frac{b b}{c^2 - b^2} \times \frac{b a + c c}{t^2}$ et diviso utroque

membro per $\frac{b^2}{c^2 - b^2}$ transponendo a², et reducendo secundum membrum ad communem

denominatorem, deletisque terminis sese destruentibus est $t^2 = \frac{c^2}{c^2 - b^2} \times \frac{a^2 + 2 a b + c^2}{t^2}$,

sive quia P S = a + b est P S² - b² = a² + 2 a b, ideoque est $t^2 = \frac{c^2}{c^2 - b^2} \times$

$\frac{P S^2 - b^2 + c^2}{t^2}$ nempe O T² = $\frac{C S^2}{C S^2 - A S^2}$

$\times \frac{P S^2 - A S^2 + C S^2}{t^2}$ qui termini sunt omnes dati, hoc ergo invento cætera ad ellipsim pertinentia commodè invenientur.

In gratiam notæ sequentis, ex his valore

quantitatis $\frac{t^2 + s^2 - P O^2}{t^2}$ determinabimus,

denominatorem, deletisque terminis sese destruentibus est $t^2 = \frac{c^2}{c^2 - b^2} \times \frac{a^2 + 2 a b + c^2}{t^2}$,

sive quia P S = a + b est P S² - b² = a² + 2 a b, ideoque est $t^2 = \frac{c^2}{c^2 - b^2} \times$

$\frac{P S^2 - b^2 + c^2}{t^2}$ nempe O T² = $\frac{C S^2}{C S^2 - A S^2}$

$\times \frac{P S^2 - A S^2 + C S^2}{t^2}$ qui termini sunt omnes dati, hoc ergo invento cætera ad ellipsim pertinentia commodè invenientur.

In gratiam notæ sequentis, ex his valore

quantitatis $\frac{t^2 + s^2 - P O^2}{t^2}$ determinabimus,

denominatorem, deletisque terminis sese destruentibus est $t^2 = \frac{c^2}{c^2 - b^2} \times \frac{a^2 + 2 a b + c^2}{t^2}$,

sive quia P S = a + b est P S² - b² = a² + 2 a b, ideoque est $t^2 = \frac{c^2}{c^2 - b^2} \times$

$\frac{P S^2 - b^2 + c^2}{t^2}$ nempe O T² = $\frac{C S^2}{C S^2 - A S^2}$

$\times \frac{P S^2 - A S^2 + C S^2}{t^2}$ qui termini sunt omnes dati, hoc ergo invento cætera ad ellipsim pertinentia commodè invenientur.

In gratiam notæ sequentis, ex his valore

quantitatis $\frac{t^2 + s^2 - P O^2}{t^2}$ determinabimus,

denominatorem, deletisque terminis sese destruentibus est $t^2 = \frac{c^2}{c^2 - b^2} \times \frac{a^2 + 2 a b + c^2}{t^2}$,

sive quia P S = a + b est P S² - b² = a² + 2 a b, ideoque est $t^2 = \frac{c^2}{c^2 - b^2} \times$

$\frac{P S^2 - b^2 + c^2}{t^2}$ nempe O T² = $\frac{C S^2}{C S^2 - A S^2}$

$\times \frac{P S^2 - A S^2 + C S^2}{t^2}$ qui termini sunt omnes dati, hoc ergo invento cætera ad ellipsim pertinentia commodè invenientur.

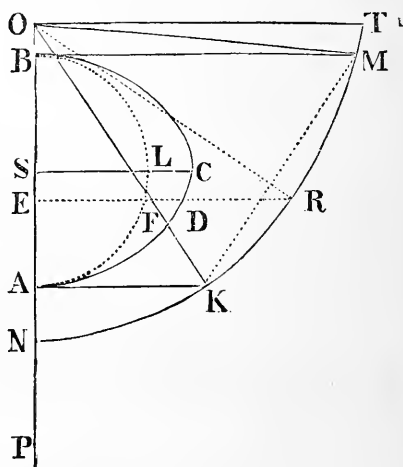
In gratiam notæ sequentis, ex his valore

nicae occurrentia in K et M; et jungatur K M auferens ab eâdem segmentum K M R K. Sit autem sphæroidis centrum S et semidiameter

quam esse æqualem quantitati $\frac{CS^2}{PS^2 - AS^2 + CS^2}$ ita ex valoribus supra inventis statuitur; Est $s = \frac{bbt^2}{c^2 - b^2}$ ex tertiâ æquatione, unde erit $s^2 + t^2 = \frac{b^2 t^2 + c^2 t^2 - b^2 t^2}{c^2 - b^2} = \frac{c^2 t^2}{c^2 - b^2}$, ideoque $\frac{s^2 + t^2}{t^2} = \frac{c^2}{c^2 - b^2} = \frac{CS^2}{CS^2 - AS^2}$. Est verò A O = s - p, et P O = P A + A O = a + s - p, et cum sit $s - p = \frac{cc}{c^2 - b^2} \times \frac{ba + cc}{c^2 - b^2}$ (ex secundâ æquatione) est P O = $a + \frac{b}{c^2 - b^2} \times \frac{ba + cc}{c^2 - b^2}$, quo valore reducto ad communem denominatorem, deletisque terminis sese destruentibus est P O = $\frac{cc}{c^2 - b^2} \times \frac{a + b}{c^2 - b^2}$ sive = $\frac{CS^2}{CS^2 - AS^2} \times \frac{PS}{PS^2 - AS^2 + CS^2}$ est $\frac{PO}{t^2} = \frac{PS}{PS^2 - AS^2 + CS^2}$ et $\frac{PO^2}{t^2} = \frac{PS^2}{PS^2 - AS^2 + CS^2}$. Unde tandem est $\frac{s^2 + t^2 - PO^2}{t^2} = \frac{CS^2}{CS^2 - AS^2}$ sive = $\frac{CS^2}{CS^2 - AS^2} \times (1 - \frac{PS^2}{PS^2 - AS^2 + CS^2})$ reducendoque ad eundem denominatorem, deletisque terminis sese destruentibus = $\frac{CS^2}{CS^2 - AS^2} \times \frac{-AS^2 + CS^2}{PS^2 - AS^2 + CS^2} = \frac{CS^2}{PS^2 - AS^2 + CS^2}$ diviso numeratore et denominatore per $CS^2 - AS^2$. Est ergo $\frac{s^2 + t^2 - PO^2}{t^2} = \frac{CS^2}{PS^2 - AS^2 + CS^2}$. Q. e. d.

544. Sit autem curva data A C B circulus, ita ut sphæroidis ejus convoluzione genita, sit accurata sphæra, erit curva N K R M parabola, stantibus enim quæ in n^o. 542. dicta sunt, erit ut prius P E = a + x, et ex naturâ circuli E P² = 2 b x - x x, unde erit P F quadratum = P E² + E F² = a² + 2 a x + x x + 2 b x - x x = a² + 2 a x + 2 b x; cum ergo ordinata E R ad curvam N K R M erit æqualis P F, ejus ordinatæ quadratum erit æquale abscissæ ipsi per quantitates constan-

tes ductæ, sed ultra primum gradum non assurgenti, quæ est parabolæ proprietas. Dicatur ergo ejus parabolæ latus rectum l, distantia verticis N a vertice A curvæ A C B dicatur p, ab scissa N E erit p + x et ex parabolæ natu.



erit ordinatæ E R quadratum = l p + l x confertur hic valor cum valore ejusdem E R² supra invento a² + 2 a x + 2 b x, termini constantes cum constantibus et qui variabilem includunt cum similibus, fient duæ æquationes l p = a², et l = 2 a + 2 b = 2 P S, ideoque p = $\frac{a^2}{2a + 2b} = \frac{PA^2}{2PS}$; et cum ex natura parabolæ, sit E R² = l x p + x erit p + x = $\frac{ER^2}{2PS}$; Cumque area parabolica inter abscissam, ordinatam, et curvam intercepta sit æqualis duobus tertiis rectanguli abscissæ per ordinatam, erit area parabolica N E R = $\frac{2}{3} ER^3 = \frac{ER^3}{2PS}$ et quoniam, ex constructione, ordinatæ in A et B erectæ sunt æquales P A et P B, erit area parabolica N A K = $\frac{PA^3}{3PS}$ et area parabolica N B M = $\frac{PB^3}{3PS} = \frac{PA + 2AS^3}{3PS}$ et differentia harum arearum A K R M B respondens axi sphærae A B, erit $\frac{6PA^2 \times AS + 12PA \times AS^2 + 8AS^3}{3PS}$, et denique dempto trapezio A K M B, segmentum parabolicum residuum K R M erit æquale

M O K $\propto \frac{1}{t^2}$; Dividitur autem sector
M O K in figuram rectilineam M O K et mix-

Corol. 3. Quod si corpusculum intra sphæroidem in axe collocetur, attractio erit ut ipsius distantia a centro. Id quod facilius hoc argumento

tilineam M R K; triangulum M O K valet $\frac{1}{2} P O \times A B$, nam producat recta M K per-
tinget ad P, propter P A = A K et P B =
B M, totum verò triangulum O M P = $\frac{1}{2} O P$
 $\times B M = \frac{1}{2} O P \times P B$, et triangulum
O K P = $\frac{1}{2} O P \times A K = \frac{1}{2} O P \times A P$,
unde sublato triang. O K P ex triang. O M P,
remanet triang. O M K = $\frac{1}{2} O P \times (P B -$
A P) = $\frac{1}{2} O P \times A B$. Unde tandem fluens
quæsita hujus tertii termini est $\frac{2 P O}{t^2} \times \frac{1}{2} O P$

$\times A B + \frac{2 P O}{t^2} \times M R K = \frac{P O^2}{t^2} \times A B$
 $+ \frac{2 P O}{t^2} \times M R K$, quæ detracta ex fluente

terminorum positivorum $A B \times \frac{s^2 + t^2}{t^2}$ fit

$A B \times \frac{s^2 + t^2 - P O^2}{t^2} - \frac{2 P O}{t^2} \times M R K$,

cum ergo sit $\frac{s^2 + t^2 - P O^2}{t^2} = \frac{C S^2}{P S^2 - A S^2 + C S^2}$

et $\frac{P O}{t^2} = \frac{P S}{P S^2 - A S^2 + C S^2}$

(545) est fluens quæsita (quia A B = 2 A S)

$\frac{2 A S \times C S^2 - 2 P S \times M R K}{P S^2 - A S^2 + C S^2}$.

Si autem curva A C B sit circulus, sphærois in
sphæram veram mutatur, fit C S = A S et segmentum

M R K fit $\frac{2 A S^3}{3 P S}$ (544) ideòque mutatur hæc for-

$\frac{2 A S \times A S^2 - \frac{2 P S \times 2 A S^3}{3 P S}}{P S^2 - A S^2 + A S^2}$
mula in istam

$= \frac{2 A S^3 - \frac{4}{3} A S^3}{P S^2} = \frac{2 A S^3}{5 P S^2}$ quæ expri-

met vim sphæræ; itaque divisa expressione
vis sphæroidis et vis sphæræ per communem

multiplicatorem 2; erit vis sphæroidis ad vim
sphæræ ut $\frac{A S \times C S^2 - P S \times M R K}{P S^2 - A S^2 + C S^2}$ ad

$\frac{A S^3}{3 P S^2}$. Q. e. d.

Potest etiam determinari vis sphæræ, hoc cal-
culo, sit ut prius P A = a, A B = 2 b, abscis-
sa A E = x, P F = v, erit P E² = a² +
2 a x + x x, et E F² = 2 b x - x x (ex na-
turâ circuli) ideòque P F² (v v) = a² + 2 a x
+ 2 b x, unde invenitur x = $\frac{v v - a^2}{2 \times (a + b)}$

d x = $\frac{2 v d v}{2 \times (a + b)} = \frac{v d v}{a + b}$ et P E = a + x

= $\frac{a^2 + 2 a b + v v}{2 \times (a + b)}$ et $\frac{d x}{P F} = \frac{d v}{a + b}$. Ita-

que, cum fluxio areæ quæ exprimit vim sphæræ

sit per Cor. 1. Prop. X C. ut d x = $\frac{P E d x}{P F}$,

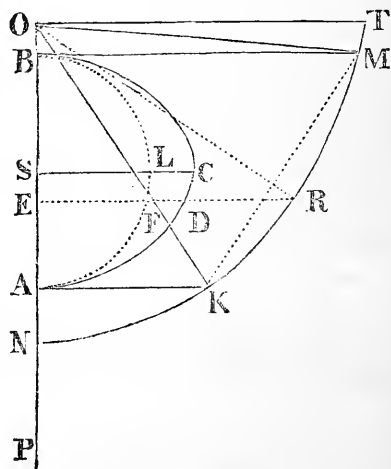
erit ea fluxio ut d x = $\frac{a^2 + 2 a b + v v}{2 \times (a + b)^2} d v$

cujus fluens est x = $\frac{a^2 v + 2 a b v + \frac{1}{3} v^3}{2 \times a + b^2}$

+ Q const., quæ evanescere debet ubi x = o

et v = a, ideòque est $\frac{a^3 + 2 a^2 b + \frac{1}{3} a^3}{2 \times a + b^2}$

+ Q = o, et Q = $\frac{\frac{4}{3} a^3 + 2 a^2 b}{2 \times a + b^2}$: vis autem



totius sphæræ obtinetur si fiat x = A B (2 b)
et v = P B (a + 2 b), estque ideò 2 b +

$\frac{4}{3} a^3 + 2 a^2 b - a^3 - 4 a^2 b - 4 a b^2 - \frac{1}{3} a^3 - 2 a^2 b - 4 a b^2 - \frac{8}{3} b^3$

$\frac{2 \times a + b^2}{4 a^2 b + 8 a b^2 + \frac{8}{3} b^3} = 2 b \times (1 -$

$\frac{2 a^2 + 4 a b + \frac{4}{3} b^2}{a \times a + b^2}$), et reducen-

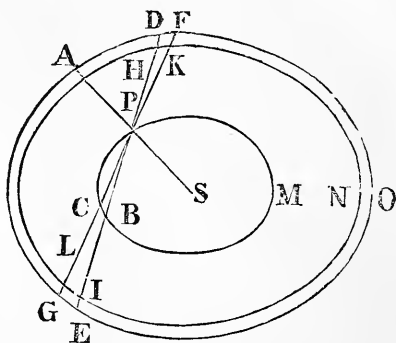
do ad eundem denominatorem = $\frac{2 b \times$
 $2 a^2 + 4 a b + 2 b^2 - a^2 - 4 a b - \frac{4}{3} b^2}{2 \times a + b^2}$

= $2 b \times \frac{\frac{2}{3} b^2}{2 \times a + b^2}$ sive ponendo A S pro b,

et P S pro a + b dividendoque numeratorem
et denominatorem per 2, vis tota sphæræ est

$\frac{2 A S^3}{3 P S^2}$. Q. e. i.

colligitur, sive particula in axe sit, sive in aliâ quâvis diametro datâ. Sit $A G O F$ sphæroidis attrahens, S centrum ejus, et P corpus attractum. Per corpus illud P agantur tum semidiameter $S P A$, tum rectæ duæ quævis $D E$, $F G$ sphæroidi hinc inde occurrentes in D et E , F et G ; sintque $P C M$, $H L N$ superficies sphæroidum duarum interiorum, exteriori similium et concentricarum, quarum prior transeat per corpus P , et secet rectas $D E$ et $F G$ in B et C , posterior secet easdem rectas in H , I et K , L . Habeant autem sphæroides omnes axem communem, et erunt rectarum partes hinc inde interceptæ $D P$ et $B E$, $F P$ et $C G$, $D H$ et $I E$, $F K$ et $L G$ sibi mutuò æquales; ^(y) propterea quod rectæ $D E$, $P B$ et $H I$ bisecantur in eodem puncto, ut et rectæ $F G$, $P C$ et $K L$. Concipe jam $D P F$, $E P G$ designare conos oppositos, angulis verticalibus $D P F$, $E P G$ infinitè parvis descriptos, et lineas etiam $D H$, $E I$ infinitè parvas esse; et conorum particulæ sphæroidum superficiebus abscissæ $D H K F$, $G L I E$, ob æqualitatem linearum $D H$, $E I$, ^(z) erunt ad invicem ut quadrata distantiarum suarum a corpusculo P , et propterea corpusculum illud æqualiter trahent. Et pari ratione, si superficiebus sphæroidum innu-

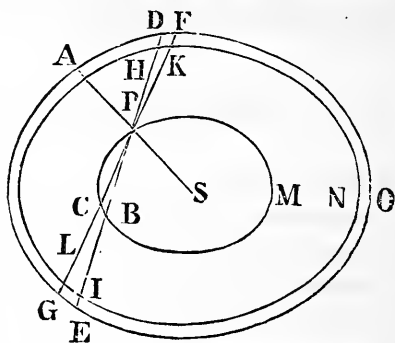


^(y) * Propterea quod rectæ $D E$, $P B$, &c. Cum enim tres ellipses $A G O$, $H L N$, $P C M$ similes sint, idemque centrum et axes communes ac proinde communes etiam diametros homologas habeant, patet lineas $D E$, $H I$, $P B$ esse in tribus illis ellipsis ad communem diametrum ordinatas, idemque dicendum esse de tribus lineis $F G$, $K L$, $P C$. Nam si per punctum A , in ellipsi $A G O$ homologum puncto P in ellipsi $P C M$ ducta intelligatur recta ipsi $P B$, seu $D E$ parallela, hæc linea ordinata erit ad eandem ellipseos $A G O$ diametrum ad quam in ellipsi $P C M$ ordinata est linea $P B$, atque adeò rectæ $D E$, $P B$ sunt ad eandem diametrum ordinatæ, idemque eodem modo de cæteris lineis ostendi potest. Quare ab illâ communi diametro rectæ $D E$, $P B$, et $H I$, bisecantur in eodem puncto, ut et rectæ $F G$, $P C$, et $K L$ a suâ communi diametro.

^(z) * Erunt ad invicem, &c. Si ex punctis D et E in lineam $F G$ demissa intelligantur perpendicularia infinitè parva p , et P , hæc, ob angulos $D P F$, $E P G$, æquales, erunt ut distan-

tia $D P$, $E P$, Sed quoniam evanescentibus angulis $D P F$, $E P G$, lineæ $D H$, $F K$ et $G L$, $E I$, fiunt parallelæ, erit superficies $D H K F$, ad superficiem $G L I E$, ut rectangulum $p \times \frac{D H + F K}{2}$, ad rectangulum $P \times \frac{G L + E I}{2}$, hoc est, (ob $D H + F K = L G + E I$) ut p ad P , seu ut $D P$ ad $E P$. Quare si $D P F$, $E P G$ conos vel pyramides in sphæroide $A G O$ designent, solida $D H K F$, $G L I E$ erunt ut superficies prædictæ in perpendicularia p , P , similia ductæ, hoc est, ut quadrata distantiarum $D P$, $E P$. Quoniam igitur vis quâ particula solida $D H K F$ trahit corpusculum P est ad vim quâ illud trahitur a particulâ solidâ $G L I E$, ut solidum $D H K F$ ad solidum $G L I E$, hoc est, ut $\frac{D P^2}{E P^2}$, ad $\frac{E P^2}{D P^2}$, manifestum est corpusculum P utrinque æqualiter attrahi.

merarum similium concentricarum et axem communem habentium dividantur spatia D P F, E G C B in particulas, hæ omnes utrinque æqualiter trahent corpus P in partes contrarias. Æquales igitur sunt vires conici D P F et segmenti conici E G C B, et per contrarietatem se mutuo destruunt. Et par est ratio virium materiæ omnis extra sphæroidem intimam P C B M. Trahitur igitur corpus P a sola sphæroide intimâ P C B M, et propterea (per Corol. 3. Prop. LXXII.) attractio ejus est ad vim, quâ corpus A trahitur a sphæroide totâ A G O D, ut distantia P S ad distantiam S. Q. e. d.



PROPOSITIO XCII. PROBLEMA XLVI.

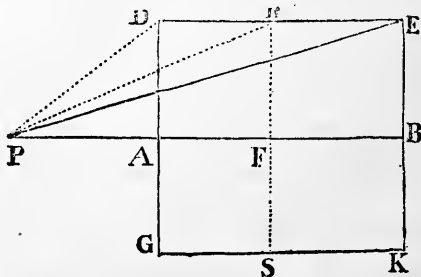
Dato corpore attractivo, invenire rationem decrementi virium centripetarum in ejus puncta singula tendentium.

E corpore dato formanda est sphæra vel cylindrus aliave figura regularis, cujus lex attractionis, cuivis decrementi rationi congruens (per Prop. LXXX. LXXXI. et XCI.) ^(a) inveniri potest. Dein factis experimentis

^(a) * *Inveniri potest.* Hoc est per Propositiones citatas inveniri potest generalis expressio seu formula attractionis corpusculi in sphæram vel cylindrum aliamve figuram regularem, et lex attractionis corpusculi in eandem figuram experimentis inventa conferri debet cum generali illâ formulâ, et indè habebitur æquatio cujus ope determinari poterit formulæ generalis exponens indeterminata, quæ exhibebit attractionem in singulas particulas materiæ.

Exemplum. In cylindrum A D E K G trahatur corpusculum P, situm in ejus axe A B, ut in Prop. XCI.; supponaturque vis in singulas cylindri particulas tendens reciproce ut distantie dignitas cujus index n, et dicatur P A = a, P D = b. P B = c, P E = e, R F = g, P F = x, P R = y, eritque $y y = x x + g g$, ideoque $y d y = x d x$. Quare fluxio vis quâ corpusculum P in cylindrum A D R S G trahitur, erit (541) ut $\frac{d x}{x^{n-2}} - \frac{x d x}{y^{n-1}} = \frac{d x}{x^{n-2}} - \frac{y d y}{y^{n-1}}$ $= x^2 - n d x - y^2 - n d y$; cujus fluens

$$= \frac{x^3 - n y^3 - n + Q \text{ const.}}{3 - n}; \text{ hæc autem}$$



evanescit, ubi $x = a$, et $y = b$; Quare erit $Q = \frac{b^3 - n a^3 - n}{b^3 - n a^3 - n} + \frac{c^3 - n e^3 - n}{3 - n}$, et fluens accurata $= \frac{b^3 - n a^3 - n + c^3 - n e^3 - n}{3 - n}$.

invenienda est vis attractionis in diversis distantiiis, et lex attractionis in totum inde patefacta dabit rationem decrementi virium partium singulorum, quam invenire oportuit.

PROPOSITIO XCIII. THEOREMA XLVII.

Si solidum ex unâ parte planum ex reliquis autem partibus infinitum, constet ex particulis æqualibus æqualiter attractivis, quarum vires in recessu a solido decrescunt in ratione potestatis cujusvis distantiarum plusquam quadraticæ, et vi solidi totius corpusculum ad utramvis plani partem constitutum trahatur: dico quod solidi vis illa attractiva, in recessu ab ejus superficie planâ, decrescet in ratione potestatis, cujus latus est distantia corpusculi a plano, et index ternario minor quam index potestatis distantiarum.

Cas. 1. Sit $L G l$ planum quo solidum terminatur. Jaceat solidum

ubi $x = c$, et $y = e$. Jam verò vis quâ corpusculum P in totum cylindrum A D E K G trahitur, experimentis inventa sit ut $b - a + c - e$, et habebitur æquatio $b - a + c - e = \frac{b^3 - a^3 - c^3 - e^3}{\bar{z} - n}$,

ex quâ determinandus est valor indicis generalis n. Porro posito n = 2, æqualia fiunt æquationis membra, ergo vis in singulas cylindri particulas tendens erit reciproce ut quadratum distantie a particula, quemadmodum in Cor. 1. Prop. 91. positum est. Verum si hæc ratione, varios tentando numeros, non potest indicis generalis n valor inveniri, ponatur $5 - n = z$, et vis corpusculi in cylindrum experimentis recepta sit ut quantitas q; et erit $qz = b^z - c^z + r$, $e^z = s$. et erit (L. significante Logarithmum quantitatis cui præfigitur) $L. a^z = L. p$, $L. b^z = L. v$, $L. c^z = L. r$, $L. e^z = L. s$, adeoque $z L. a = L. p$, et $z = \frac{L. p}{L. a}$

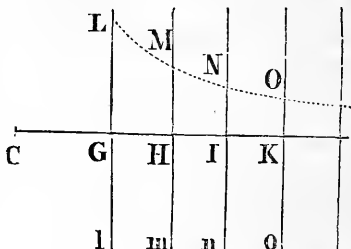
$$= \frac{L. v}{L. b} = \frac{L. r}{L. c} = \frac{L. s}{L. e}$$
 Unde $\frac{L. a \times L. v}{L. b} = \frac{L. a}{L. b}$

$$= L. p$$
, atque adeo $L. v \frac{L. a}{L. b} = L. p$, proindeque $\frac{L. v}{L. b} = p$. et simili modo invenietur $\frac{L. v}{L. c} = r$, et $\frac{L. v}{L. e} = s$. Quare æquatio erit $\frac{L. v}{L. b} = v - v \frac{L. a}{L. b} + v \frac{L. c}{L. b} - v \frac{L. e}{L. b}$,

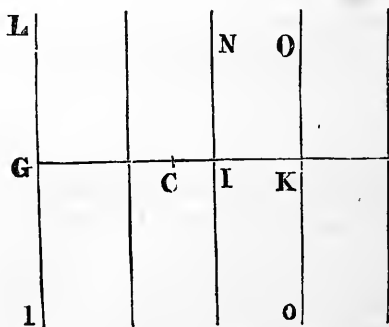
quæ ab exponente indeterminata libera est. Ut autem tollatur etiam L. v, ponatur $v = t + 1$, et (383) erit $L. v = L. t + 1 = t - \frac{1}{2} t + t + \frac{1}{3} t^3 - \frac{1}{4} t^4 + \frac{1}{5} t^5 -$, &c. in infinit. Si itaque in æquatione modo inventa loco v scribatur $t + 1$, et loco L. v series $t - \frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{3} t^3 -$, &c. obtinebitur æquatio ab exponentibus et logarithmis indeterminatis libera, ex quâ per reversionem serierum invenietur valor quantitatibus t, et inde reperietur L. v, atque per L. v habebitur valor indicis z, et inde valor ipsius n. Nam cum sit $z = \frac{L. v}{L. a}$, et $L. v = L. t + 1$, erit $z = \frac{L. t + 1}{L. a}$, et $n = 3 - z = 3 - \frac{L. t + 1}{L. a}$.

Si in æquatione vel quantitate exponentiali
proposita, indeterminata z in solis quantitatum
datum exponentibus reperiretur, hæc æquatio
vel quantitas superiori methodo posset ad aliam
reduci numero terminorum finitam, in qua nulla
esset amplius exponents vel logarithmus indeter-
minata. Nam si $q = f a^z + g b^z + h c^z$
 $\div \frac{2 L. b}{L. a}$, &c., sitque $v = a^z$ erit $q = f v +$
 $g v \frac{L. a}{L. b} + h v \frac{L. a}{L. c}$, &c. erit enim $z =$
 $\frac{L. v}{L. a}$ et $b^z = b^{\frac{L. v}{L. a}}$ et $L. b^z = \frac{2 L. v}{L. a} \times$
 $L. b = \frac{2 L. b}{L. a} L. v$, unde est $b^z = v \frac{L. b}{L. a}$
et sic de cæteris.

autem ex parte plani hujus versus I, inque plana innumera m H M, n I N, o K O, &c. ipsi G L parallela resolvatur. Et primo collocetur corpus attractum C extra solidum. Agatur autem C G H I planis illis innumeris perpendicularis, et decrescant vires attractivæ punctorum solidi in ratione potestatis distantiarum, cujus index sit numerus n ternario non minor. Ergo (per Corol. 3. Prop. XC.) vis, quâ planum quodvis m H M trahit punctum C, (b) est reciprocè ut $C H^{n-2}$. In plano m H M capiatur longitudo H M ipsi C H $n-2$ reciprocè proportionalis, et erit vis illa ut H M. Similiter in planis singulis l G L, n I N, o K O, &c. capiantur longitudines G L, I N, K O, &c. ipsis C G $n-2$, C I $n-2$, C K $n-2$, &c. reciprocè proportionales; et vires planorum eorundem erunt ut longitudines captæ, ideoque summa virium ut summa longitudinum, hoc est, vis solidi totius ut area G L O K in infinitum versus O K producta. Sed area illa (per notas quadraturarum methodos) est reciprocè ut C G $n-5$, et propterea vis solidi totius est reciprocè ut C G $n-5$. Q. e. d.



Cas. 2. Collocetur jam corpusculum C ex parte plani l G L intra solidum, et capiatur distantia C K æqualis distantiae C G. Et solidi pars L G l o K O, planis parallelis l G L, o K O terminata, corpusculum C in medio situm nullam in partem trahet, contrariis oppositorum punctorum actionibus se mutuò per æqualitatem tollentibus. Pro-



(b) * Est reciprocè, &c. Sit C H = x, erit M H ut $\frac{1}{x^{n-2}}$, (hyp.) et areæ G L M H, elementum ut $\frac{d x}{x^{n-2}}$, adeoque (165) area ipsa ut Q const. $-\frac{1}{(n-3) x^{n-3}}$, quæ evanescit ubi x = C G, Quare Q = $\frac{1}{(n-3) C G^{n-3}}$,

et area G L M H, ut $\frac{1}{(n-3) C G^{n-3}}$, $-\frac{1}{(n-3) C H^{n-3}}$. At cum C H infinita evadit, terminus $\frac{1}{(n-3) C H^{n-3}}$ evanescit fitque area infinita G L O K, ut $\frac{1}{(n-3) C G^{n-3}}$, seu ob datam n - 3, ut C G $n-3$, reciprocè.

inde corpusculum C solâ vi solidi ultra planum O K siti trahitur. Hæc autem vis (per casum primum) est reciproçè ut $CK^n - 3$, hoc est (ob æquales C G, C K) reciproçè ut $CG^n - 3$. Q. e. d.

Corol. 1. Hinc si solidum L G I N planis duobus infinitis parallelis L G, I N utrinque terminetur; (c) innotescit ejus vis attractiva, subducendo de vi attractivâ solidi totius infiniti L G K O vim attractivam partis ulterioris N I K O, in infinitum versus K O productæ.

Corol. 2. Si solidi hujus infiniti pars ulterior, quando attractio ejus collata cum attractione partis citerioris nullius pene est momenti, rejiciatur: attractio partis illius citerioris augendo distantiam (d) decrescet quam proximè in ratione potestatis $CG^n - 3$.

Corol. 3. Et hinc si corpus quodvis finitum et ex unâ parte planum trahat corpusculum e regione medii illius plani, et distantia inter corpusculum et planum collata cum dimensionibus corporis attrahentis perexigua sit, constet autem corpus attrahens ex particulis homogeneis, quarum vires attractivæ decrescunt in ratione potestatis cujusvis plusquam quadruplicatæ distantiarum; vis attractiva corporis totius decrescet quamproximè in ratione potestatis, cujus latus sit distantia illa perexigua, et index ternario minor quam index potestatis prioris. De corpore ex particulis constante, quarum vires attractivæ decrescunt in ratione potestatis triplicatæ distantiarum, assertio non valet; propterea quod, in hoc casu, attractio partis illius ulterioris corporis infiniti in Corollario secundo, semper est infinitè major quam attractio partis citerioris.

Scholium.

Si corpus aliquod perpendiculariter versus planum datum trahatur, et ex datâ lege attractionis quæretur motus corporis: solvetur problema

(c) * *Innotescit ejus vis, &c.* Ex demonstrationis attractio solidi totius L G K O, in infinitum versus O producti, est ut $\frac{1}{CG^n - 3}$ solidi verò infiniti N I K O, ut $\frac{1}{CI^n - 3}$. Quare attractio solidi L G I N, est ut $\frac{1}{CG^n - 3} - \frac{1}{CI^n - 3}$.

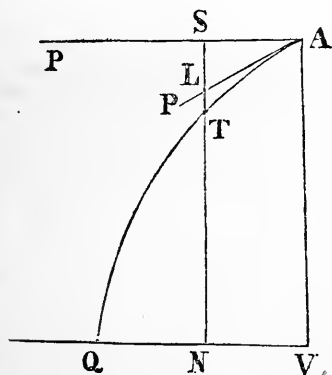
(d) * *Decrescet quam proximè, &c.* Vis enim attractiva, si corpus infinitum sit, est ut $\frac{1}{CG^n - 3} - \frac{1}{CI^n - 3}$; sed si perexigua

sit distantia C G respectu C I, terminus $\frac{1}{CI^n - 3}$, minimus erit respectu termini $\frac{1}{CG^n - 3}$ et negligi poterit, ideòque attractio erit quamproximè ut $CG^n - 3$ reciproçè. Quod tamen verum esse non potest, si fuerit $n = 3$; Nam in hoc casu $\frac{1}{CH^n - 2} = \frac{1}{CH}$, ideòque M H erit ut $\frac{1}{CH}$ et rectangulum M H \times C H datum, proindeque curva L M O hyperbola, cujus asymptotus C K, et area illius finita L M N I G vim exponit solidi L G I N; area verò infinita N O K I, vim solidi infiniti N I K O.

quærendo (per Prop. XXXIX.) motum corporis rectâ descendentis ad hoc planum, et (per legum Corol. 2.) componendo motum istum cum uniformi motu, ^(a) secundum lineas eidem plano parallelas facto. Et contra, si quæretur lex attractionis in planum secundum lineas perpendiculares factæ, eâ conditione ut corpus attractum in datâ quâcunque curvâ lineâ moveatur, ^(b) solvetur problema operando ad exemplum problematis tertii.

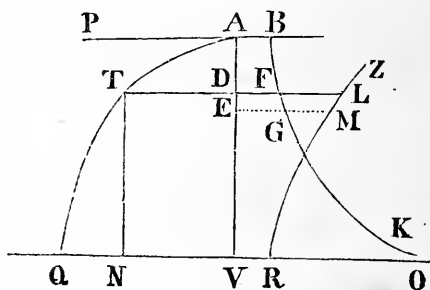
^(a) 546. *Secundum lineas eidem plano parallelas, &c.* Corpus A quod ad planum V Q perpendiculariter et secundum lineas lineæ A V parallelas trahitur, exeat de loco A juxta directionem quamlibet A P. 1°. Si projectionis di-

quam punctum G perpetuò tangit. In D F capiatur D L lateri quadrato areæ A B F D reciprocè proportionalis, et punctum L sit semper in lineâ curvâ Z L R, prorsus ut in Prop. 39. Jam dicatur A V = a, D V = x, T D



rectio A P plano V Q parallela fuerit, dabitur tempus quo corpus, datâ velocitate uniformi projectionis, percurreret lineam A S, et per Prop. 39. inveniatur in lineâ S N lineâ A V parallela spatium S T quod corpus vi attractrice eodem tempore describit, et hinc habebitur punctum T in trajectoriâ A T Q, quam corpus utroque motu, impresso nimirum et ex vi attractrice genito describit. 2°. Si directio projectionis A P plano trahenti V Q parallela non est, ductâ A S plano V Q et S L rectæ A V parallelis, motus projectionis A L resolvatur in motus A S et S L, et datis velocitatibus uniformibus A S et S L, dabuntur tunc tempus quo percurritur A S, tum spatium S T quod corpus hoc eodem tempore describit ex vi attractrice et motu impresso S L simul (per Cor. 3. Prop. 39.) unde habebitur punctum T trajectoriæ A T Q cujus omnia puncta eodem modo possunt inveniri.

Exemplum. Exeat corpus de loco A secundum directionem A P plano trahenti V Q parallelam, et ductâ D T eidem plano parallela, sit vis trahens in totâ lineâ D T, ut D V cubus reciprocè. De loco D, erigatur semper D F perpendicularis ad A V et vi trahenti in lineâ D T proportionalis, sitque B F G linea curva



= y, erit area A B F D ut $\frac{a a - x x}{x x}$ (430) et

proindè D L, ut $\frac{x}{\sqrt{a a - x x}}$ adeoque ele-

mentum D L M E, ut $\frac{x d x}{\sqrt{a a - x x}}$, et area

V D L R. ut hujus elementi fluens Q = $\sqrt{a a - x x}$ (165. 166), evanescit autem area V D L R ubi x = 0. Quare Q = a, et area V D L R, ut a - $\sqrt{a a - x x}$. Hinc positâ x = a, erit area V A B Z R, ut a, et area D A B Z L, ut $\sqrt{a a - x x}$. Porro si punctum T est in trajectoriâ A T Q erit D T seu y proportionalis tempori quo uniformiter describitur D T, et quo motu accelerato percurritur A D seu (per Prop. 39.) erit y, ut $\sqrt{a a - x x}$, adeoque y ut a - x x. Undè patet trajectoriâ A T Q esse ellipsim cujus centrum V, semiaxis unus V A, alter conjugatus V Q. Iisdem positis et vi ad planum V Q trahente in vim repellentem mutatâ corpus describet hyperbolam cujus centrum V semiaxis V A vertex A.

^(b) 547. *Solvetur problema, &c.* Moveatur corpus P in curvâ P Q F vi perpendiculariter tendente ad planum F K, sint P et Q puncta infinitè propinqua, P Z tangens in P, P C radius circuli curvam P Q F osculantis in P;

$\frac{m-2}{n}$, &c. atque hujus termino in quo O duarum est dimensionum, id est, termino $\frac{m m - m n}{2 n n} O O A^{\frac{m-2}{n}}$ vim proportionalem esse sup-

$P^n Q^3 +$, &c. et si rursus ponatur $P^n = A$;
 $\frac{n}{1} P^n Q = B$; $\frac{n \times n - 1}{1 \times 2} P^n Q^2 = C$;
 $\frac{n \times n - 1 \times n - 2}{1 \times 2 \times 3} P^n Q^3 = D$, et ita
 porro, erit $a + b |^n = P + P Q |^n = P^n +$
 $\frac{n}{1} A Q + \frac{n-1}{2} B Q + \frac{n-2}{3} C Q + \frac{n-3}{4} D Q +$, &c.

550. Cor. 2. Iisdem formulis uti possumus pro polynomio quovis ad datam dignitatem evehendo, si pars una polynomii literæ a binomii ponatur æqualis, cæteræ verò partes omnes supponatur æquales literæ b . Exempli causâ. Sit trinomium $d + e + f$ ad tertiam dignitatem elevandum, pone $n = 3$, $d = a$, $e + f = b$, et

$$A^p + p A^{p-1} B Z + p A^{p-2} C Z^2$$

$$+ p \times \frac{p-1}{2} A^{p-2} B^2 Z^2 + p \times \frac{p-1}{2} A^{p-2} \times 2 B C Z^3$$

$$+ p \times \frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{3} A^{p-3} B^3 Z^3$$

551. Cor. 3. Si ex binomio $a + b$, extrahenda sit radix cujus index $\frac{m}{p}$, loco n , in formulâ

$$\text{generali scribatur } \frac{m}{p}, \text{ et erit } \frac{a + b}{p} = a^{\frac{m}{p}} +$$

$$+ \frac{m}{p} a^{\frac{m-p}{p}} b^{\frac{1}{p}} + \frac{m \times m - p}{1 \times 2 \times p^2} a^{\frac{m-2p}{p}} b^{\frac{2}{p}} +$$

$$+ \frac{m \times m - p \times m - 2p}{1 \times 2 \times 3 \times p^3} a^{\frac{m-3p}{p}} b^{\frac{3}{p}} +$$

$$+ \frac{m \times m - p \times m - 2p \times m - 3p}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times p^4} a^{\frac{m-4p}{p}}$$

$$\times b^{\frac{4}{p}} +, \text{ &c. vel etiam erit } \frac{a + b}{p} =$$

$$P + P Q |^p = P^{\frac{m}{p}} + \frac{m}{p} A Q + \frac{m-p}{2p} B Q + \frac{m-2p}{3p} C Q + \frac{m-3p}{4p} D Q +,$$

&c.

Nam sit radix quæsitâ $a + b |^{\frac{m}{p}}$ æqualis seriei infinitæ $A + B Z + C Z^2 + D Z^3$, &c. erit $a + b |^{\frac{m}{p}}$ æqualis huic seriei ad dignitatem p evectæ, sumatur ergo series potentie $a + b |^{\frac{m-1}{p}}$ quæ erit $a^{\frac{m}{p}} + m a^{\frac{m-1}{p}} b + m \times \frac{m-1}{2} a^{\frac{m-2}{p}} b^2 + m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} a^{\frac{m-3}{p}} b^3$ et conferantur cum terminis dignitatis infinitinomii $A + B Z + C Z^2 + D Z^3$,

formula $a^{\frac{m}{p}} + \frac{m}{1} a^{\frac{m-1}{p}} b^{\frac{1}{p}} + \frac{n \times n - 1}{1 \times 2} a^{\frac{m-2}{p}} b^{\frac{2}{p}} + \frac{n \times n - 1 \times n - 2}{1 \times 2 \times 3} a^{\frac{m-3}{p}} b^{\frac{3}{p}}$, mutabitur in seriem $d^3 + 3 d^2 (e + f) + 3 d (e + f)^2 + (e + f)^3$; cum enim perventum est ad coefficientem in quâ est $n - 3$, abruptur series ob $n - 3 = 0$. Porro per eandem formulam generalem $(e + f)^2 = e^2 + 2 e f + f^2$, et $(e + f)^3 = e^3 + 3 e^2 f + 3 e f^2 + f^3$. Quare tandem $(d + e + f)^3 = d^3 + 3 d^2 e + 3 d^2 f + 3 d e^2 + 6 d e f + 3 d f^2 + e^3 + 3 e^2 f + 3 e f^2 + f^3$.

Ita etiam formulam pro dignitate infinitinomii possumus obtinere, sit enim series $A + B Z + C Z^2 + D Z^3 + E Z^4$, &c. ad dignitatem p evehenda sub ducto calculo invenietur.

$$+ p A^{p-1} D Z^3$$

$$+ p \times \frac{p-1}{2} A^{p-2} B^2 Z^2 + p \times \frac{p-1}{2} A^{p-2} \times 2 B C Z^3$$

$$+ p \times \frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{3} A^{p-3} B^3 Z^3$$

&c. ad dignitatem p evecti, (n^o. 550) invenietur quæ $A^p = a^{\frac{m}{p}}$; $p A^{p-1} B Z = m a^{\frac{m-1}{p}} b$;
 $p A^{p-1} C Z^2 + p \times \frac{p-1}{2} A^{p-2} B^2 Z^2$
 $= m \times \frac{m-1}{2} a^{\frac{m-2}{p}} b^{\frac{2}{p}}$; $p A^{p-1} D Z^3$
 $+ p \times \frac{p-1}{2} A^{p-2} \times 2 B C Z^3 + p \times \frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{3} A^{p-3} B^3 Z^3 = m \times \frac{m-1}{2}$
 $\times \frac{m-2}{3} a^{\frac{m-3}{p}} b^{\frac{3}{p}}$, &c.

$$\text{Unde invenietur } A = a^{\frac{m}{p}}, B Z = \frac{m}{p} \times$$

$$\frac{a^{\frac{m-1}{p}}}{a^{\frac{m}{p}}} b = \frac{m}{p} a^{\frac{m-1}{p}} b; C Z^2 = \frac{m \times m - p}{1 \times 2 \times p^2} \times$$

$$a^{\frac{m-2}{p}} b^2, \text{ &c.}$$

552. Lemma. Si in rectâ $A E$ positione datâ, ad quam curva $Z F H$ refertur, capiatur abscissa quævis $A B$, sitque ordinata correspondens $F B$ æqualis dignitati abscissæ $A B^{\frac{1}{p}}$, in datam quantitatem 1 ductæ, et deinde capiantur intervalla æqualia $B C$, $C D$, et agantur ordinatæ $C G$, $D H$, ac per punctum F ducatur tangens $F I$ ordinatæ $C G$ occurrens in I , et recta $F M$ parallela lineæ $A E$, eidem ordinatæ occurrens

in M, ac tandem ordinata C G seu $\overline{AB+BC}^q$, elevetur ad dignitatem cujus est index q atque ita in seriem infinitam convergentem resolvatur, hujus seriei primus terminus erit semper æqualis ordinatæ F B, insistenti ad initium quantitatis constantis B C; secundus terminus æqualis erit differentiae inter F B et C I, id est, lineæ M I, et tertius terminus unâ cum sequentibus in infinitum æquabitur lineæ G I quæ jacet inter tangentem et curvam. . . .

Dem. sit $AB = x$. $FB = y$, data $BC = O$, ducta intelligatur ordinata f b, alteri F B infinitè propinqua quæ lineam F M secet in m, et punctis F, f, coëuntibus erit $Fm = dx$, $fm = dy$, ac trianguula Fmf , FMI similia, ideoque $dx : dy = O : MI$, sed quoniam $y = x^q$ (ex hyp.) et proinde $dy = qx^{q-1}dx$, est $dx : dy = 1 : qx^{q-1}$; ergo $MI = qx^{q-1} \times O$ et $CI = FB + MI = x^q + qx^{q-1} \times O$. Præterea (ex hyp.)

est $GC = x + O \mid^q = x^q + qx^{q-1} \times O + \frac{q \times q - 1}{1 \times 2} x^{q-2} O^2 + \frac{q \times q - 1 \times q - 2}{1 \times 2 \times 3} x^{q-3} O^3 +$, &c. in infinitum (548). Quare

erit $GI = GC - CI = \frac{q \times q - 1}{1 \times 2} x^{q-2} O^2 + \frac{q \times q - 1 \times q - 2}{1 \times 2 \times 3} x^{q-3} O^3$

+ &c. in infinitum. Ergo seriei in quam resolvitur $x + O \mid^q$, terminus primus x^q , æqualis est ordinatæ F B, secundus terminus $qx^{q-1} \times O$, æqualis differentiae inter F B et C I, et tertius terminus unâ cum sequentibus in infinitum æqualis lineæ G I. Eadem est demonstratio, si curva Z F H concavitatem lineæ A E obvertat. Q. e. d.

553. Cor. 1. Si quantitas O, seu B C, in infinitum minuatur ut fiat dx , termini omnes in serie subsequentes sunt infinitè minores quovis termino antecedente, quod quantitatis O index in singulis terminis nitate crescat, ideoque termini illi subsequentes neglegi possunt, et proinde in hac hypothesi $MI = dy = MG$, $GI = \frac{q \times q - 1}{1 \times 2} x^{q-2} O^2 = \frac{q \times q - 1}{1 \times 2} \times x^{q-2} dx^2 = \frac{1}{2} d^2 dy$. Nam cum sit $dy = qx^{q-1} dx$ et dx constans, erit sumptis fluxionibus, $d^2 dy = q \times q - 1 \times x^{q-2} dx^2$.

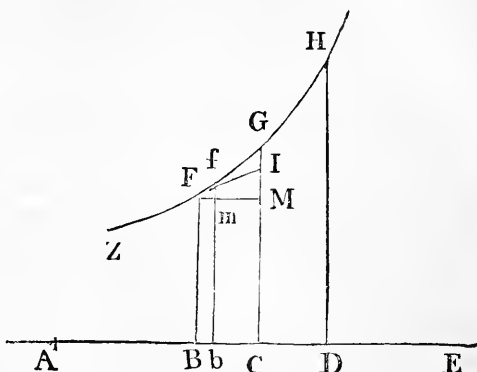
554. Cor. 2. In eadem hypothesi erit $d^2 dy$ ut quartus seriei terminus, $d^3 d^2 dy$, ut quintus, et ita porro in infinitum. Nam quia est $d^2 dy = q \times q - 1 \times x^{q-2} dx^2$, erit $d^3 d^2 dy = q \times q - 1 \times q - 2 \times x^{q-3} dx^3$, et $d^4 d^3 d^2 dy = q \times q - 1 \times q - 2 \times q - 3 \times x^{q-4} dx^4$, et ita deinceps. Quartus autem seriei terminus positâ $O = dx$, est

$\frac{q \times q - 1 \times q - 2}{1 \times 2 \times 3} x^{q-3} dx^3$. Quintus

$\frac{q \times q - 1 \times q - 2 \times q - 3}{1 \times 2 \times 3 \times 4} x^{q-4} dx^4$.

$x^q - 4 dx^4$; ergo ob datos numeros $1 \times 2 \times 3$ et $1 \times 2 \times 3 \times 4$, &c. patet Corollarium.

555. Cor. 3. Eadem omnia vera sunt, si fuerit



ordinata B F seu y æqualis seriei cuius potentiarum quarumlibet abscissæ A B in datas quantitates ductarum, hoc est $y = ex^n + fx^m + gx^p +$, &c. Eadem enim demonstratio. Observandum tamen est in hoc casu primum seriei terminum dici in quo quantitas O, seu B C, non extat, secundum terminum in quo quantitas illa est unius dimensionis, tertium in quo extat duarum dimensionum et sic in infinitum, licet in singulis terminis ita definitis plures contineantur quantitates signis + vel - conjunctæ. Exempli causâ: positâ $y = ex^n + fx^m = BF$, erit $GC = e(x + O)^n + f(x + O)^m = ex^n + fx^m + \frac{n}{1} ex^{n-1} O + \frac{m}{1} ex^{m-1} O +$, &c. in infinitum. Primus seriei terminus est $ex^n + fx^m$, secundus $\frac{n}{1} ex^{n-1} \times O + \frac{m}{1} ex^{m-1} \times O$ et ita de cæteris.

556. Cor. 4. Hinc sequitur eadem omnia valere, si fuerit ordinata B F seu y æqualis cuilibet functioni ipsius abscissæ A B, seu x, hoc est $y = Q$, et Q quantitas ex abscissâ x, ipsiusque potentis ac aliis quantitibus datis quomodolibet composita. Nam quantitas illa Q poterit semper vel (per Lemma 548.) ejusque Corollaria vel per divisionem in seriem aliquam resolveri, cujus singuli termini erunt vel ipsius abscissæ x potentie in quantitates datas ductæ, vel quantitates omnino datæ, omnis verò quantitas data $c = cx^0$. Quare æquatio $y = Q$, semper reduci poterit in formam æquationis Cor. 3. (555) $y = ex^n + fx^m + gx^p +$ &c. Exempli causâ: sit $y = g + \frac{ee}{b+x} + (ff + x x) \frac{1}{x}$.

Peractâ divisione in infinitum, erit $\frac{ee}{b+x} =$

pono. (c) Est igitur vis quæsita ut $\frac{m m - m n}{n n} A^{\frac{m-2n}{n}}$, vel quod perinde est, ut $\frac{m m - m n}{n n} B^{\frac{m-2n}{m}}$. Ut si ordinatim applicata parabolam attingat, existente $m = 2$, et $n = 1$: fiet vis ut data $2 B^0$, ideoque

$$\frac{e e}{b} - \frac{e e x}{b^2} + \frac{e e x^2}{b^3} - \frac{e e x^3}{b^4} + \frac{e e x^4}{b^5} \&c. \text{ in infinitum; et } \frac{f f}{x^2} + \frac{x^6}{8 f^3} = f + \frac{x^2}{2 f} - \frac{x^4}{8 f^3} + \frac{x^6}{16 f^5} \&c. \text{ in infinitum. Nam}$$

$$\text{in hoc casu erit in formulâ } P \frac{m}{p} + \frac{m}{p} A Q + \frac{m-p}{2 p} B Q \&c. (551) m = 1, p = 2, P = f f,$$

$$Q = \frac{x^2}{f f}, A = P \frac{m}{p} = f f \frac{1}{2} = f, B = \frac{m}{p} \times$$

$$A Q = \frac{x^2}{2 f}, \text{ et sic deinceps, ergò erit } y = g +$$

$$\frac{e e}{b} + f - \frac{e e x}{b} + \left(\frac{e e}{b^3} + \frac{1}{2} f \right) x^2 - \frac{e e x^3}{b^4} + \left(\frac{e e}{b^5} - \frac{1}{8 f^3} \right) x^4 \&c. \text{ in infinitum.}$$

(c) 557. * Est igitur vis quæsita, &c. Moveatur corpus in curvâ P Q F, vi tendente ad planum seu basin: A F, secundum lineas P B, Q C cum basi A F angulum datum constituentes. Producat ordinata C Q ut tangenti per P ductæ occurrat in R, et ex puncto curvæ Q ad ordinatam P B agantur Q L parallela A F, et Q T ad P B perpendicularis. Jam si vis centripeta fingatur ad punctum S infinite distans tendere, coeuntibus punctis P et Q vis illa in puncto P erit (per Cor. 1. Prop. 6.) directè ut

$$\frac{Q R}{S P^2 \times Q T}, \text{ hoc est, ob constantem } S P, \text{ ut } \frac{Q R}{Q T}.$$

Porro ob angulum Q L T datum, et angulum Q T L rectum, datur specie triangulum L Q T, et ideò datâ Q L, datur etiam Q T, ergò datâ B C seu Q L, vis erit ut Q R. Sed si abscissa A B dicatur = A, ordinata B P = B, et B C = O; cum sit (ex hyp.) B ut $\frac{m}{n}$, erit ordinata C Q, ut $A + O \frac{m}{n}$ et (553), Q R, ut tertius terminus seriei in quam resolvitur

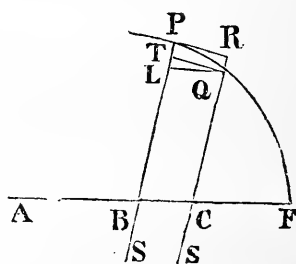
$$\frac{m}{A + O \frac{m}{n}}, \text{ hoc est, (550) ut } \frac{1 \times 2 \times n^2 \times m}{m m - m n} \times$$

$$\frac{m-2n}{A \frac{m}{n}} \times O O = \frac{m m - m n}{2 n^2} A^{\frac{m-2n}{n}}$$

$$\times O O, \text{ seu ut } \frac{m m - m n}{n^2} \times A^{\frac{m-2n}{n}}, \text{ ob}$$

datam quantitatem $\frac{O O}{2}$. Est igitur vis quæsita

$$\text{ut } \frac{m m - m n}{1 \times 2 \times n^2} \times A^{\frac{m-2n}{n}} \text{ vel ut } \frac{m m - m n}{n n} \times B^{\frac{m-2n}{m}}; \text{ quia cum sit B ut } A \frac{n}{m}, \text{ erit B } \frac{n}{m} \text{ ut A, et B } \frac{n}{m} \times \frac{m-2n}{n}, \text{ seu B } \frac{m-2n}{m}, \text{ ut } A^{\frac{m-2n}{n}}. \text{ Itaque si ponatur } m = 2, n = 1,$$



crit B, ut A^2 , et curva P F parabola, et $\frac{m m - m n}{n n} B^{\frac{m-2n}{m}} = 2 B^0$, adeoque vis ut data $2 B^0 = 2$. Quod si ponatur $m =$

-1 , et $n = 1$, crit B ut $\frac{1}{A}$ hoc est $B \times A$ rectangulum datum, et proinde curva P F hyperbola cujus asymptotus A F, et centrum A;

$$\text{et } \frac{m m - m n}{n n} A^{\frac{m-2n}{n}} = 2 A^{-3} = \frac{2}{A^3} =$$

$2 B^3$, et ideò vis ut cubus ordinatæ B. Sed quoniam hyperbola convexitatem obvertit asymptoto A F, vi illâ corpus a basi A F repelletur.

Si curva P Q F, est ellipsis cujus centrum A, semidiameter A F = C, erit $P B^2$ seu B^2 , ut rectangulum $A F + A B \times B F = C + A \times C - A = C C - A A$, et ponendo B C = O, erit $Q C^2$, ut $C C - A A - 2 A O - O O$, fiat $C C - A A = D D$, erit $Q C^2$, ut $D D - 2 A O - O O$, et radice per formulam generalem extractâ (550. 551) erit Q C, ut $D - \frac{A O}{D} - \frac{O O}{2 D} - \frac{A A O O}{2 D^3} - \frac{A O^3}{2 D^5}$

dabitur. Datâ igitur vi corpus movebitur in parabolâ, quemadmodum Galilæus demonstravit. Quod si ordinatim applicata hyperbolam attingat, existente $m = 0 - 1$, et $n = 1$; fiet vis ut $2 A^{-3}$ seu $2 B^3$: ideoque vi, quæ sit ut cubus ordinatim applicatæ, corpus movebitur in hyperbolâ. Sed missis hujusmodi propositionibus, pergo ad alias quasdam de motu, quas nondum attingi.

$$\begin{aligned}
 & - \frac{A^3 O^3}{2 D^5}, \text{ \&c. tertius seriei terminus est } \frac{O O}{2 D} \\
 & + \frac{A A O O}{2 D^3} = \frac{D D + A A \times O O}{2 D^3} = \\
 & \frac{C C O O}{2 D^3}, \text{ erit igitur } Q R \text{ (552. 556) seu vis ut } \\
 & \frac{C C}{2 D^3}, \text{ hoc est, ob datam quantitatem } \frac{C C}{2}, \text{ ut } \\
 & \frac{1}{D^3}, \text{ ac proindè quoniam } B B \text{ est ut } C C -
 \end{aligned}$$

$A A$ seu $D D$, vis erit ut $\frac{1}{B^3}$, hoc est, ut cubus ordinatim applicatæ reciprocè, quod convenit cum solutione Problematis 5. Eodem modo demonstratur vim a plano $A F$ repellentem decrescere in ratione triplicatâ ordinatim applicatæ $P B$ si corpus moveatur in hyperbolâ, cujus diameter una sit in plano $A F$, altera conjugata in lineâ parallelâ ordinatis $P I'$, $Q C$, et convexitas plano $A F$ obversa.

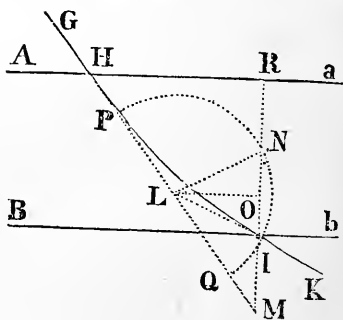
SECTIO XIV.

De motu corporum minimorum, quæ viribus centripetis ad singulas magni alicujus corporis partes tendentibus agitantur.

PROPOSITIO XCIV. THEOREMA XLVIII.

Si media duo similia, spatio planis parallelis utrinque terminato, distinguantur ab invicem, et corpus in transitu per hoc spatium attrahatur vel impellatur perpendiculariter versus medium alterutrum, neque ullâ aliâ vi agitetur vel impediatur; sit autem attractio, in æqualibus ab utroque plano distantis ad eandem ipsius partem captis, ubique eadem: dico quod sinus incidentiæ in planum alterutrum erit ad sinum emergentiæ ex plano altero in ratione datâ.

Cas. 1. Sunto A a, B b plana duo parallela. Incidat corpus in planum prius A a ^(d) secundum lineam G H, ac toto suo per spatium intermedium transitu attrahatur vel impellatur versus medium incidentiæ, eâque actione describat lineam curvam H I, ^(e) et emergat secundum lineam I K. Ad planum emergentiæ B b erigatur perpendicularum I M, occurrens tum lineæ incidentiæ G H productæ in M, tum plano incidentiæ A a in R; et linea emergentiæ K I producta occurrat H M in L. Centro L intervallo L I describatur circulus, secans tam H M in P et Q, quam M I productam in N; et primò si attractio vel impulsus ponatur uniformis, erit (ex demonstratis Galilæi) ^(f) curva



^(d) 558. * Secundum lineam G H. Angulus incidentiæ hic dicitur complementum anguli G H A ad rectum, seu angulus quem linea G H constituit cum rectâ ad planum incidentiæ A a perpendiculariter erectâ in H. Angulus emergentiæ est etiam angulus K I M, quem linea directionis corporis emergentis, efficit cum

rectâ I M ad planum emergentiæ B b, perpendiculari in I.

^(e) * Et emergat secundum lineam. Patet rectas G H, I K seu corporis in H et I directiones, curvam H I in punctis H, I contingere.

^(f) * Curva H I parabola, cujus diameter I R, patet (per not. 40.)

H I parabola (^g) cujus hæc est proprietas, ut rectangulum sub dato latere recto et lineâ I M æquale sit H M quadrato; sed et lineâ H M bisecabitur in L. Unde si ad M I demittatur perpendicularum L O, (^h) æquales erunt M O, O R; et additis (ⁱ) æqualibus O N, O I, fient totæ æquales M N, I R. Proinde cum I R detur, datur etiam M N; estque rectangulum N M I ad rectangulum sub latere recto et I M, hoc est, ad H M q, in datâ ratione. (^k) Sed rectangulum N M I æquale est rectangulo P M Q, id est, differentiæ quadratorum M L q, et P L q seu L I q; et H M q datam rationem habet ad sui ipsius quartam partem M L q: ergo datur ratio M L q — L I q ad M L q, (^l) et convertendo ratio L I q ad M L q, et ratio dimidiata L I ad M L. Sed in omni triangulo L M I, sinus angulorum sunt proportionales lateribus oppositis. Ergo datur ratio sinus anguli incidentiæ L M R ad sinum anguli emergentiæ L I R. Q. e. d.

Cas. 2. Transeat jam corpus successivè per spatia plura parallelis pla-

(^g) * *Cujus hæc est proprietas, &c.* Ductis per punctum H diametrum H I, et rectâ H V ad alteram diametrum I R ordinatim applicata, atque ex puncto I ad diametrum H T ordinatâ I T, erit ob parallelas M I, H T (per Theor. 1. de Parabolâ) et parallelas M H, I T (per Lem. 4. de Conic.) $M I = H T$ et $I T = M H$ (per 34. 1. Elem.). sed (per Theor. 1. de Parabolâ)

et $H V$ parallela $L I$, erit quoque $H L = L M$.
Q. e. d.

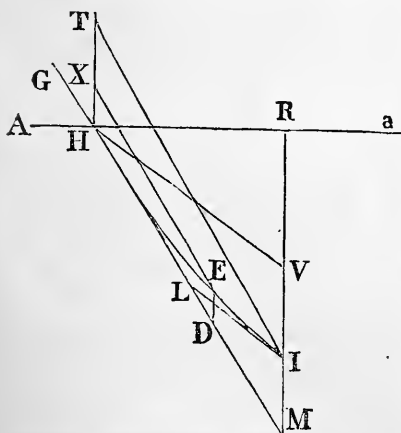
559. Ut latus rectum diametri HT in variis angulis incidentiæ datum sit, oportet corporis parabolam describentis velocitatem in puncto H , et plani incidentiæ A a vim attractricem esse datas. His autem datis, datum esse hoc latus rectum ita demonstratur. Per punctum X in diametro HT datum, agatur ordinatim applicata XE parabolæ occurrens in E , et per E ducatur ED parallela XH et tangenti HM occurrens in D , ac proinde æqualis datæ XH . Jam verò HX seu DE , est spatium quod corpus vi attractrice describit eodem tempore dato quo motu uniformi projectionis percurrit HD , ideoque datis vi attractrice et velocitate projectionis, data quoque erit linea HD in quovis incidentiæ angulo GHT . Est autem latus rectum diametri HT tertia proportionalis ad abscissam HX , et ordinatam XE seu HD . Ergò datis vi attractrice et velocitate projectionis, datum se constans est latus rectum diametri HT . Q. e. d.

(h) * *Aequales erunt* $M O$, $O R$. (Per Prop. 2. lib. 6. Elem.)

(i) * *Aequalibus* 0 *N*, 0 *I*. Per Prop. 3.
lib. 5 Elem.

(k) * *Sed rectangulum NM I æquale est rectangulo PM Q, (per Cor. 1. Prop. 56. lib. 3. Elem.) id est, differentie quadratorum M L² et P L², est enim PM = ML + PL, et MQM = ML - LQ = ML - PL; Quare PM × QM = ML² - PL². (Per Corol. 6. 2^a. Elem.)*

(1)* *Et convertendo.* Sint enim A et B, quantitates datæ, et $ML^2 : LI^2 :: ML^2 : A^2$, erit $ML^2 : LI^2 :: B^2 : E^2 = A^2$, quæ est ratio data

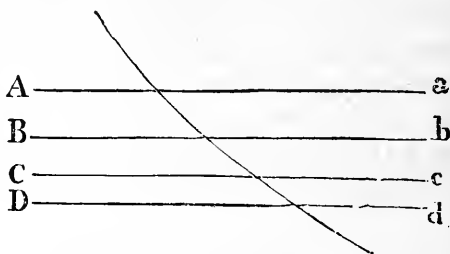


quadratum ordinatæ T I æquale est rectangulo
sub dato latere recto diametri H T et abscissâ
H T, ergo rectangulum sub dato latere recto et
lineâ M I æquale est H M quadrato; Et quoni-
am H M parabolam tangit in H estque proinde
(per Cor. 1. Lem. 5. de Conic.) $HM = VI$,

nis terminata, A a b B, B b c C, &c. et agitetur vi quæ sit in singulis separatim uniformis, at in diversis diversa; et per jam demonstrata, sinus incidentiæ in planum primum

A a erit ad sinum emergentiæ ex plano secundo B b, in datâ ratione; et hic sinus, qui est sinus incidentiæ in planum secundum B b, erit ad sinum emergentiæ ex plano tertio Cc, in datâ ratione; et hic sinus ad sinum emergentiæ ex plano

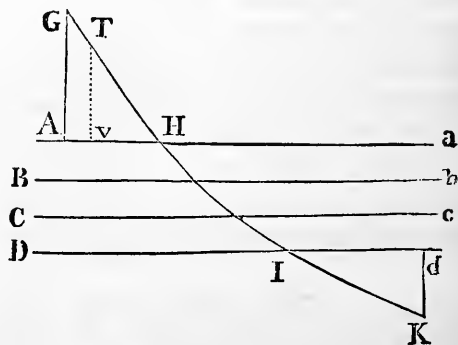
quarto D d, in datâ ratione; et sic in infinitum: ^(m) et ex æquo, sinus incidentiæ in planum primum ad sinum emergentiæ ex plano ultimo in datâ ratione. Minuantur jam planorum intervalla et augeatur numerus in infinitum, eò ut attractionis vel impulsus actio, secundum legem quamcunque assignatam, continua reddatur; et ratio sinus incidentiæ in planum primum ad sinum emergentiæ ex plano ultimo, semper data existens, etiamnum dabitur. Q. e. d.



PROPOSITIO XCV. THEOREMA XLIX.

Isdem positis; dico quod velocitas corporis ante incidentiam est ad ejus velocitatem post emergentiam, ut sinus emergentiæ ad sinum incidentiæ.

Capiantur A H, I d æquales, et erigantur perpendiculara A G, d K occurrentia lineis incidentiæ et emergentiæ G H, I K, in G et K. In G H capiatur T H æqualis I K, et ad planum A a demittatur normaliter T v. Et (per legem Corol. 2.) distinguatur motus corporis in duos, unum planis A a, B b, C c, &c. perpendi-



^(m) * Et ex æquo. Sint quantitates datæ A, B, C, D, &c. Sinus incidentiæ in planum primum S, sinus emergentiæ ex secundo plano, idem qui sinus incidentiæ in secundum planum

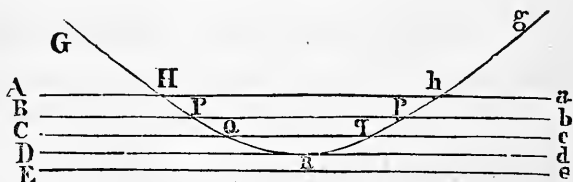
T, et ita porro sinus sint S, T, V, X, &c. ponaturque $S : T = A : B$, $T : V = B : C$, $V : X = C : D$, et erit, ex æquo, $S : X = A : D$.

cularem, alterum iisdem parallelum. Vis attractionis vel impulsus, agendo secundum lineas perpendiculares, nil mutat motum secundum parallelas, et propterea corpus hoc motu conficiet æqualibus temporibus æqualia illa secundum parallelas intervalla, quæ sunt inter lineam A G et punctum H, interque punctum I et lineam d K; ⁽ⁿ⁾ hoc est, æqualibus temporibus describet lineas G H, I K. Proinde velocitas ante incidentiam est ad velocitatem post emergentiam, ut G H ad I K vel T H, ^(o) id est, ut A H vel I d ad v H, hoc est (respectu radii T H vel I K) ^(p) sinus emergentiæ ad sinum incidentiæ. Q. e. d.

PROPOSITIO XCVI. THEOREMA L.

Iisdem positis, ^(q) et quod motus ante incidentiam velocior sit quam postea, dico quod corpus, inclinando lineam incidentiæ, reflectetur tandem, et angulus reflexionis fiet æqualis angulo incidentiæ.

Nam concipe corpus inter parallela plana A a, B b, C c, &c. describere arcus parabolicos, ut supra; sintque arcus illi H P, P Q, Q R, &c. Et sit ea lineæ incidentiæ G H obliquitas ad planum primum A a, ut sinus incidentiæ sit ad radium circuli, cujus est sinus, in eâ ratione quam habet idem sinus incidentiæ ad sinum emergentiæ ex plano D d, in spatium D d e E: et ob sinum emergentiæ jam factum æqualem radio, angulus emergentiæ erit rectus, ideoque linea emergentiæ coincidet cum plano D d. Perveniat corpus ad hoc planum in puncto R; et quoniam linea emergentiæ coincidit cum eodem plano, perspicuum est quod corpus non potest ultra pergere versus planum E e. Sed nec potest idem per-



⁽ⁿ⁾ * Hoc est, æqualibus temporibus. Quoniam motu composito corpus fertur per lineas G H et I K, eodem tempore describit G H quo A H, et I K quo I d, sed (ex Dem.) tempora quibus conficiuntur intervalla parallela et æqualia A H, I D æquantur, ergo corpus æqualibus temporibus describit lineas G H et I K.

^(o) * Id est ut A H vel I d ad v H. Per Prop. 2. lib. 6. Elem.

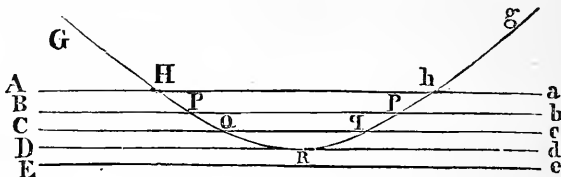
^(p) * Ut sinus emergentiæ. Est enim an-

gulus v T H anguli T H v, et angulus I K d anguli K I d, complementum ad rectum; et proinde (558) prior est æqualis angulo incidentiæ, posterior est æqualis angulo emergentiæ.

^(q) * Et quod motus ante incidentiam, &c. Ut angulus emergentiæ semper crescat (Prop. 95.) et ipsius proinde complementum ad rectum semper decrescat in transitu corporis per diversa media.

gere in lineâ emergentiæ R d, propterea quod perpetuò attrahitur vel impellitur ^(r) versus medium incidentiæ. Revertetur itaque inter plana C c, D d, describendo arcum parabolæ Q R q, ^(s) cujus vertex principalis (juxta demonstra-
ta Galilæi) est in R; secabit planum C c in eodem angulo in q, ac prius in Q; dein pergendo in arcubus parabolicis q p, p h,

&c. arcubus prioribus Q P, P H similibus et æqualibus, secabit reliqua plana in iisdem angulis in p, h, &c. ac prius in P, H, &c. emergetque tandem eâdem obliquitate in h, quâ incidit in H. Concipe jam planorum A a, B b, C c, D d, E e, &c. intervalla in infinitum minui et numerum augeri, eo ut actio attractionis vel impulsus secundum legem quamcunque assignatam continua reddatur; et angulus emergentiæ semper angulo incidentiæ æqualis existens, eidem etiamnum manebit æqualis. Q. e. d.



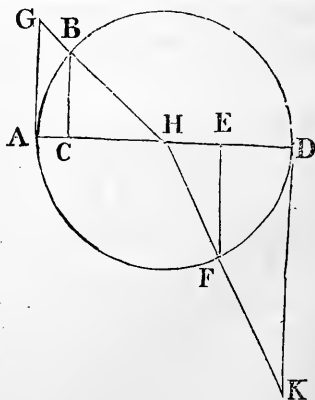
Scholium.

Harum attractionum haud multum dissimiles sunt lucis reflexiones et refractiones, factæ secundum datam secantium rationem, ut invenit Snellius, ^(t) et per consequens secundum datam sinuum rationem, ut exposuit

^(r) * Versus medium incidentiæ, v. gr. C c.

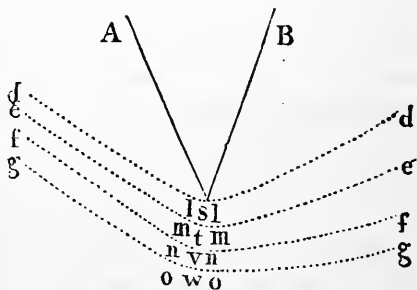
^(s) * Cujus vertex principalis. Quoniam enim (ut patet ex not. 40.) omnes diametri parabolæ Q R q sunt ad basim Q q perpendiculariter, erit Q q ad axem ordinatim applicata, cumque recta D R d ipsi Q q parallela parabolam tangat in R, (40) erit R vertex principalis (per. Lem. 4. de Conic.) et propterea velocitates corporis in locis Q et q a vertice R æquæ remotis æquales erunt, et directiones illius ad lineam Q q æque inclinatæ: Insuper velocitas perpendicularis quâ corpus ex solâ vi attractrice ad planum P p urgetur, iisdem gradibus crescit per totum spatium q p, quibus antè decreverat per spatium æquale P Q. Quare corpus pergendo in arcubus parabolicis, &c.

^(t) * Et per consequens. Lucis radius G H incidat in planum refringens A D, sitque radius refractus H K. Centro H et radio quovis H A, circulus describatur planum secans in A et D radiosque lucis in B et F. Erigantur ad planum perpendicularia A G, C B, E F, D K. Villebrordus Snellius, referente Isaaco Vossio in suâ dissertatione de lucis naturâ et proprietate,



invenerat secantes G H, H K angulorum G H A, K H D, esse in datâ ratione. Verum indè sequitur quod Cartesius postea vulgavit,

Cartesius. Namque lucem successivè propagari et spatio quasi septem vel octo minutorum primorum a sole ad terram venire, ^(u) jam constat per phænomena satellitum Jovis, observationibus diversorum astronomorum confirmata. Radii autem in aëre existentes (uti dudum Grimaldus, luce per foramen in tenebrosus cubiculum admissâ, invenit, et ipse quoque expertus sum) in transitu suo prope corporum vel opacorum vel perspicuorum angulos (quales sunt nummorum ex auro, argento et aëre cusorum termini rectanguli circulares, et cultrorum, lapidum aut fractorum vitrorum acies) incurvantur circum corpora, quasi attracti in eadem; et ex his radiis, qui in transitu illo propius accedunt ad corpora incurvantur magis, ^(x) quasi magis attracti, ut ipse etiam diligenter observavi. Et qui transeunt ad majores distantias minus incurvantur; et ad distantias adhuc majores incurvantur aliquantulum ad partes contrarias, et tres colorum fascias efformant. In figura designat s aciem cultri vel cunei cujusvis A s B; et g o w o g, f n u n f, e m t m e, d l s l d sunt radii, arcubus o w o, m t m, l s l versus cultrum incurvati; idque magis vel minus pro distantia eorum a cultro. Cum autem talis incurvatio radiorum fiat in aëre extra cultrum, debebunt etiam



radii, qui incidunt in cultrum, prius incurvari in aëre quam cultrum attingunt. Et par est ratio incidentium in vitrum. ^(z) Fit igitur refraction, non in puncto incidentiæ, sed paulatim per continuam incurvationem ra-

datam quoque esse rationem linearum C H, H E quæ sunt sinus angulorum incidentiæ C B H, et emergentiæ H F E (558). Nam B H : G H = C H : A H (seu B H) et K H : F H (seu B H) = H D (seu B H) : H E, et ex æquo, K H : G H = C H : H E. Quare datâ ratione G H ad K H, datur quoque ratio H E ad C H.

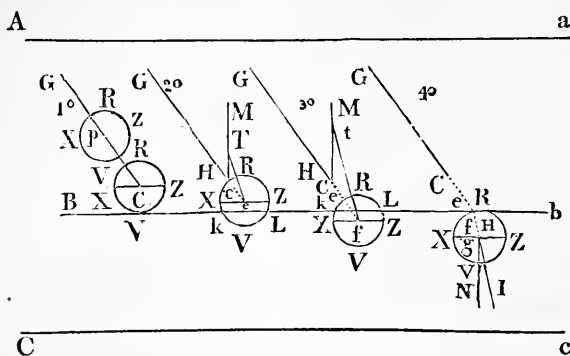
^(u) * *Jam constat per phænomena.* Jupiter cum suis quatuor satellitibus circâ solem ceû centrum revolvitur in trajectoriâ quæ tellurum ambitu suo complectitur, undè fit ut perpetuò mutetur Jovis a tellure distantia, quæ, cæteris paribus, minima est, tellure solem inter et Jovem positâ, maxima verò, sole inter Jovem et tellurem locato, atque harum distantiarum differentia orbis magni diametro, seu duplæ distantia solis a terrâ æqualis est. Si igitur lucis propagatio

instantanea non est, sed successiva, et per orbis magni diametrum sensibili aliquo tempore diffundatur, necesse est ut satellitis eclipsis, quæ contingit dum Jovis umbram subit, tardius a nobis videatur in majori illâ Jovis distantia, citius in minori, atque itâ rem se habere Roemerus alique deinde plures astronomi observarunt. Cæterum alii causæ præter successivam lucis propagationem inæqualitatem illam satellitum tribuendam esse contendit Clariss. Maraldus in comm. Paris. 1707. quod etiam jam antea Magno Casino visum fuerat. Sed Clarissimus Granjean ejus argumentis respondet in comm. Paris. 1732. horum dissertationes vide sis.

^(x) * *Quasi magis attracti.* Alia egregia experimenta vide in Newtoni optica initio lib. 3. et quæst. 29.

^(z) * *Fit igitur refraction et reflexio.* Vide

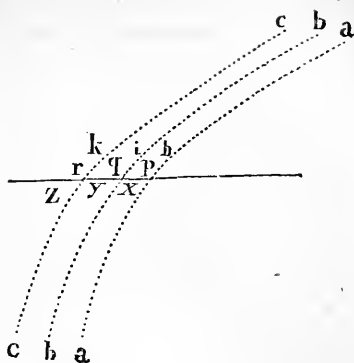
diorum, factam partim in aëre antequam attingunt vitrum, partim (ni fallor) in vitro, postquam illud ingressi sunt: uti in radiis $c k z c$, $b i y b$,



Prop. 8. et 9. Partis 3æ. Lib. Optices Newtoni. Sed ut res clariùs intelligatur, sint media duo contigua, $A a b B$, $B b c C$, planis parallelis terminata, et quorum talis sit attractionis lex ut ultrà distantiam $p R$ a medio alterutro evanescat ejus medi attrahit. Itaque centro p et radio $p R$ (fig. 1.) describatur circulus vel potius sphaera $R Z V X$ quæ planum $B b$ non attingat, corpus p versus omnia hujus sphaeræ puncta æqualiter attractum, nullam in partem inflectetur, sed manebit in lineâ rectâ $G C$, secundum quam moveri supponitur. Si in eadem rectâ $G C$, capiatur punctum C , a plano $B b$ remotum distantia $C V = p R$, sitque vis attractiva versus medium $B b c C$, major vi attractivâ medi $A a h B$, in eo ipso loco C corpus a rectâ viâ $G C$ deflectere curvamque lineam describere incipiet. Perveniat (2°) corpus ex C in e , per curvam $C e$, et ductâ $H M$ ad plana $A a$, $B b$ perpendiculari, ac per punctum e , rectâ $e T$, quæ curvam $C e$, tangat in e , et perpendiculo $H M$ occurrat in T , erit angulus $e T C$ minor angulo incidentiæ $G H M$; nam cum segmentum $k V L$, in hemisphaerio $X V Z$ magis trahatur versus planum $B b$, quam segmentum ipsi æquale in hemisphaerio $X R Z$, (ex hyp.) versus planum $A a$, manifestum est curvam deorsum inflecti, ideòque tangentem $e T$ a radio incidente $G C$, versus superiora M recedere. Similiter ubi corpusculum C est in f (3°) intrâ medium $B b c C$, magis trahitur versus planum $C c$, ab hemisphaerio $X V Z$, quam retrahitur versus planum $B b$, ab altero hemisphaerio $X R Z$, cujus segmentum $k R L$, minus trahit, quam æquale segmentum in hemisphaerio $X V Z$; quare angulus $H t f$, quem tangens $f t$ cum perpendiculo $H M$ efficit, adhuc minor est quam angulus $H T e$ (2°). Sed cum tandem corpusculum C pervenit in g (4°), locum a plano $B b$ remotum distantia maximâ $g R = p R$, tum

corpus p , æqualiter undique attractum (ex hypothesi) semitam non ampliùs mutat, sed rectâ movetur per $g I$, quæ curvam $C e f g$ tangit in g , estque angulus $N g I$, quem $g I$ cum $g N$ ad $B b$ perpendiculari constituit, seu angulus emergentiæ minor adhuc angulo $H t f$ (3°). Oppositum eveniet, si medium $B b c C$, minùs trahat quam medium $A a b B$, et refractione in reflexionem mutari poterit. Fit igitur refractione et reflexio non in puncto incidentiæ R (4°). Sed paulatim per continuum incurvationem radiorum, ut Newtonus docet. Quod si itaque certissimis experimentis constet radios lucis a corporibus quasi attrahi in minimis distantis, Newtonus veram hic demonstravit causam illarum lucis affectionum, quibus contingit ut radii incidentes in superficiem corporis resiliant in plano ad eam verticali, sub angulis reflexionis æqualibus angulis incidentiæ, atque ut ex uno medio in aliud diversæ densitatis aut diversæ vis trahentis, obliquè penetrantes refrangantur in plano ad superficiem, quæ duo media dirimit itidem recto, itâ ut sinus incidentiæ et emergentiæ datam servant rationem. Satis enim liquet plana linearum $G H I$ et $G H R h$, in superioribus propositi-
onibus, perpendicularia esse ad plana $A a$, $B b$, ut planum parabolæ quæ gravia in hypothesi Galilæi describunt perpendicularare esse ad horizontem. Quænam verò causa sit attractionis aut tendentiæ vel impulsûs radiorum lucis in corpora: alia questio est quam hic agitare minimè necesse est, quæque sepositâ, interim ex certis experimentis mathematicâ demonstratione, ostensa est reflexionis et refractionis lex et causa; quemadmodum semel cognitis (per experientiam) gravitate atque elaterio aëris, rectè quis ascensus et descensus liquorum in tubis vacuis causam atque legem demonstrasse censetur, dum ex iis aëris proprietatibus quarum causas ignorat, hæc phænomena accuratè deduxit. Nam juxta rec-

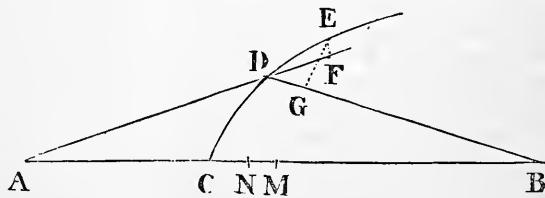
a h x a incidentibus ad r, q, p, et inter k et z, i et y, h et x, incurvatis, delineatum est. Igitur ob analogiam quæ est inter propagationem radiorum lucis et progressum corporum, visum est propositiones sequentes in usus opticos subjungere; interea de naturâ radiorum (utrum sint corpora necne) nihil omnino disputans, sed trajectoryas corporum trajectoryis radiorum persimiles solummodo determinans.



PROPOSITIO XCVII. PROBLEMA XLVII.

Posito quod sinus incidentiæ in superficiem aliquam sit ad sinum emergentiæ in datâ ratione; quodque incurvatio viæ corporum juxta superficiem illam fiat in spatio brevissimo, quod ut punctum considerari possit: determinare superficiem, quæ corpuscula omnia de loco dato successivè manantia convergere faciat ad alium locum datum.

Sit A locus a quo corpuscula divergunt; B locus in quem convergere debent; CDE curva linea quæ circa axem A B revoluta describat superficiem

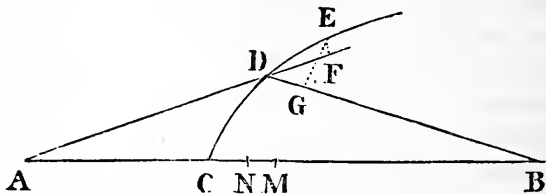


quæsitam; D, E curvæ illius puncta duo quævis; et E F, E G perpendiculara in corporis vias A D, D B demissa. Accedat punctum D ad punctum E; et lineæ D F, quâ A D augetur, ad lineam D G, quâ D B

tam philosophandi rationem, in naturæ phænomena primum debemus diligenter inquirere, ut postea motus corporum eorumque leges et causas accuratius investigare et cognoscere possimus. Cæterum in phænomena reflexionis ac refractionis lucis eorumque causas inquisierunt philosophi ac mathematici celeberrimi, Cartesius cap. 2^o. dioptrices per leges generales resolutionemque motuum, et supponendo lumini minorem resistentiam in densioribus quam in rarioribus me-

diis objici; Leibnitzius in Actis Eruditorum Lipsiensibus an. 1682. pag. 185. hanc factâ hypothesis, quod lumen a puncto radiante ad punctum illustrandum viâ omnium facillimâ perveniat, quâ etiam usus erat antea Fermatius; Hugenius in tractatu de lumine per naturam undulationis luminis rem totam explicat, et Joannes Bernoullius in Actis Lips. an. 1701. ex æquilibrium fundamentum eam ingeniosissimè deduxit.

diminuitur, (^γ) ratio ultima erit eadem, quæ sinus incidentiæ ad sinum emergentiæ. Datur ergo ratio incrementi lineæ A D ad decrementum lineæ D B; et prop-
 terea si in axe A B sumatur ubivis punctum C, per quod curva C D E transire debet, et capiatur ipsius A C incrementum C M ad ipsius B C decrementum C N in datâ illâ ratione, centrisque A, B, et intervallis A M, B N describantur circuli duo se mutuo secantes in D; (^α) punctum illud D tanget curvam quæsitam C D E, eandemque ubivis tangendo determinabit. Q. e. i.



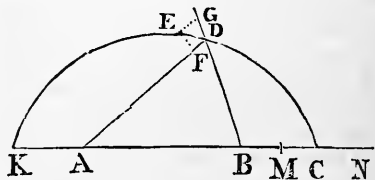
Corol. 1. Faciendo autem ut punctum A vel B, nunc abeat in infinitum, nunc migret ad alteras partes puncti C, (^b) habebuntur figuræ illæ omnes,

(^γ) * *Ratio ultima erit eadem.* Nam lineolâ D E pro radio seu sinu toto usurpatâ, lineolæ D F, D G sunt sinus angulorum D E F, D E G; sed angulus D E F est complementum ad rectum anguli E D F, seu A D C, ideoque æqualis est angulo incidentiæ, et angulus D E G est complementum ad rectum anguli E D G, ideoque æqualis est angulo emergentiæ (558). Ergo lineæ D F ad lineam D G ratio ultima erit eadem quæ sinus incidentiæ ad sinum emergentiæ, ideoque data. Et hinc (per Cor. Lem. 4.) datur ratio incrementi totius finiti lineæ A D, ad decrementum totum finitum lineæ D B.

(^α) * *Punctum illud D.* Atque eodem modo, assumendo varia incrementa C M, et decre-
 menta C N, puncta diversa lineæ C D E determinabuntur. Si verò centro B et radio quovis describatur circulus, curvam C E secans in E, et lineam A B in N, et inde convolutione superficie C E N, circâ axem C N solidum corpus conficiatur, corpusculum ex D, per lineam D B ad centrum B circuli descripti tendens, non refrangetur, dum ex superficie circulari concavâ E N egreditur, quod corpusculi directio D B, sit ad illam superficiem perpendicularis, atque ita corpusculum semper perveniet ad punctum B.

(^b) * *Habebuntur figuræ illæ omnes.* Quas enim lineas Cartesius Geometriæ lib. 2^o. pag. 50. et seq. dicit A 5, A 6, vel A 7, A 8, eas Newtonus hic vocat C M, C N, et de cætero eadem est utriusque authoris constructio. Unde manifestum est, si punctum C, inter puncta A et B, et punctum N inter C et M, sita sint,

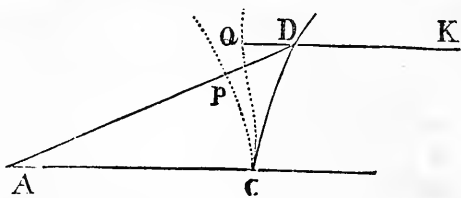
primam Cartesii ovalem Newtonianâ constructione describi; si manentibus punctis A, C, B, M, punctum N, inter C et A locetur, 2^{am}. ovalem Cartesianam obtineri; si vero punctum B ad alteras partes puncti C migret ultrâ A, et punctum C sit inter A et N, atque M, 3^{am}. Cartesii ovalem haberi, iisdemque positis, si punctum N sit inter C, et A, 4^{am}. ovalem Cartesii delineari. Porro, si punctum A vel B in infinitum abeat ut radii incident vel refringantur paralleli, tum per punctum M vel N erigendum erit perpendicularum, quod circulus centro B vel A, et radio B N, vel A M, descriptus secabit in puncto quæsito D, curvæ C D E, quæ erit ellipsis vel hyperbola, ut calculo inito facile patet, atque hæc sunt figuræ quibus Cartesius cap. 8^o. dioptrices usus est.



Eadem est demonstratio, si superficies C D E incidentes radios reflectit, quo casu fit C N = C M, ob angulum incidentiæ æqualem angulo emergentiæ (per Prop. 96.) et curva C D E erit sectio conica, videlicet hyperbola, si punctum C inter A et B situm; ellipsis, si extra positum sit; Parabola, si ellipsos focus B in infinitum

quas Cartesius in optica et geometria ad refractiones exposuit. Quarum inventionem cum Cartesius celaverit, visum fuit hâc propositione exponere.

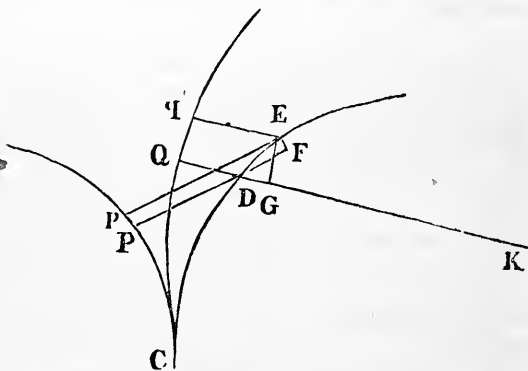
Corol. 2. Si corpus in superficie quamvis CD , secundum lineam rectam AD , lege quavis ductam incidens, emergat secundum aliam quamvis rectam DK , et a puncto C duci intelligantur lineæ curvæ CP , CQ ipsis AD , DK semper perpendiculares: (°) erunt incrementa linearum PD , QD , atque ideo lineæ ipsæ PD , QD , incrementis istis genitæ, ut sinus incidentiæ et emergentiæ ad invicem: et contra.



abeat, et circulus, si puncta A et B coëant.
 Nam si punctum C inter A et B situm sit, et N
 inter A et C, cum sit $A D = A M$, et $B D$
 $= B N$ (per constr.) rectarum
 $A D$, $B D$ differentia data erit,
 ut potè æqualis $A M - B N$
 $= A C + C M - B C -$
 $C N = A C - B C$, ob $C M$
 $= C N$, ideoque curva C D E
 erit hyperbola cujus foci A et B,
 (per Theor. 3. de Hyperbolâ.)
 Si punctum C inter puncta A et
 B positum non est, ut in hac
 figurâ, rectarum $A D$, $B D$
 summa data erit, in hoc enim
 casu punctum C, est inter N, et
 M, atque $A D + B D = A C$
 $- C M + B C + C N =$
 $A C + B C$. Est igitur C D E
 ellipsis cujus foci A et B, (Theor.
 3. de Ellipsi) quæque foco alte-
 rutro in infinitum abeunte mu-
 tatur in parabolam et focus coëuntibus mutatur
 in circulum.

(^c) 561. * *Erunt incrementa*, &c. Nam si
 capiat arctus quam minimus D E, atque ex
 puncto E in curvas C P, C Q, et in rectas P D,
 Q K, demittantur perpendicularia E p, E q et E F,
 E G, coëuntibus punctis E et D. erunt E F,
 P p et E G, Q q sibi mutuo parallela, et proinde
 P F, p E et Q G, q E, aequales, ideoque
 D F et D G erunt rectarum P D. Q D incre-

menta nascentia. Sed, (ex demonstratis suprâ) D F est ad D G, ut sinus incidentiæ ad sinum emergentiæ, quare incrementa linearum P D,

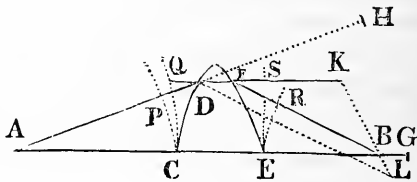


Q D, atque adeo (Cor. Lem. 4.) lineæ ipsæ P D, Q D, (quæ simul nascuntur in puncto C) incrementis istis genitæ, erunt ut sinus incidentiæ et emergentiæ ad invicem, et contrâ, si lineæ P D, Q D curvis C P, C Q perpendiculares sint ut sinus incidentiæ et emergentiæ, erunt earum incrementa nascentia in eadem semper ratione, ac proinde si corpus in superficiem C D secundum lineam P D incidat, emerget secundum lineam Q D seu D K.

PROPOSITIO XCVIII. PROBLEMA XLVIII.

Iisdem positis, et circa axem A B descriptâ superficie quâcunque attractivâ C D, regulari vel irregulari, per quam corpora de loco dato A exeuntia transire debent : invenire superficiem secundam attractivam E F, quæ corpora illa ad locum datum B convergere faciat.

Juncta A B secet superficiem primam in C et secundam in E, puncto D utcunque assumpto. Et posito sinu incidentiæ in superficiem primam ad sinum emergentiæ ex eâdem, ^(d) et sinu emergentiæ e superficie secundâ ad sinum incidentiæ in eandem, ut quantitas aliqua data M ad aliam datam N : produc tum A B ad G, ut sit B G ad C E ut M — N ad N; tum A D ad H, ut sit A H æqualis A G; tum etiam D F ad K, ut sit D K ad D H ut N ad M. Junge K B, et centro D intervallo D H describe circum- lum occurrentem K B productæ in L, ipsique D L parallelam age B F : et punctum F tanget lineam E F, quæ circa axem A B revoluta describet superficiem quæsitam. Q. e. f.



Nam concipe lineas C P, C Q ipsis A D, D F respectivè, et lineas E R, E S ipsis F B, F D ubique perpendiculares esse, ^(e) ideoque Q S ipsi C E semper æqualem; et erit (per Corol. 2. Prop. XCVII.) P D ad Q D ut M ad N, ^(f) ideoque ut D L ad D K ^(g) vel F B ad F K; ^(h) et divisim ut D L — F B seu P H — P D — F B ad F D seu F Q — Q D; et compositè ut P H — F B ad F Q, id est ⁽ⁱ⁾ (ob æquales P H

^(d) * Et sinu emergentiæ e superficie secunda, &c. Est enim sinus emergentiæ e superficie secundâ E F, ad sinum incidentiæ in eandem, ut sinus incidentiæ in superficiem primam C D, ad sinum emergentiæ ex eâdem. Nam si radius incidens A D refrangitur per D F, ob eandem rationem radius F D, incidens in D refrangetur per D A, et qui sinus erat incidentiæ in primo casu, fit sinus emergentiæ in secundo.

^(e) * Ideoque Q S ipsi C E semper æqualem. Cum enim linea Q S, sit semper perpendicularis utrique lineæ C Q, E S (ex hyp.) ea nec crescit, nec decrescit, ob partes curvarum in Q et S semper parallelas, ut patet.

^(f) * Ideoque ut D L ad D K. Est enim (per constr.) D K ad D H, ut N ad M, et D L = D H, per const.

^(g) * Vel F B ad F K. Ob parallelas D L, F B (per constr.)

^(h) * Et divisim. Cum sit P D : Q D = D H : D K = F B : F K, erit divisim D H : D K, seu P D : Q D = D H — F B : D K — F K = P H — P D — F B : D F, seu Q F — Q D, et compositè P D : Q D = P H — P D + P D — F B, seu P H — F B : Q F — Q D + Q D, seu Q F = M : N.

⁽ⁱ⁾ * Ob æquales P H et C G. Nam (per constr.) A H = A G, et quoniam punctum A datum est, estque A P semper perpendicularis ad curvam C P, liquet eam curvam esse circum- lum cujus centrum A, undè A P = A C, et hinc P H = C G; et simili modo patet esse B R = B E, ob datum punctum B.

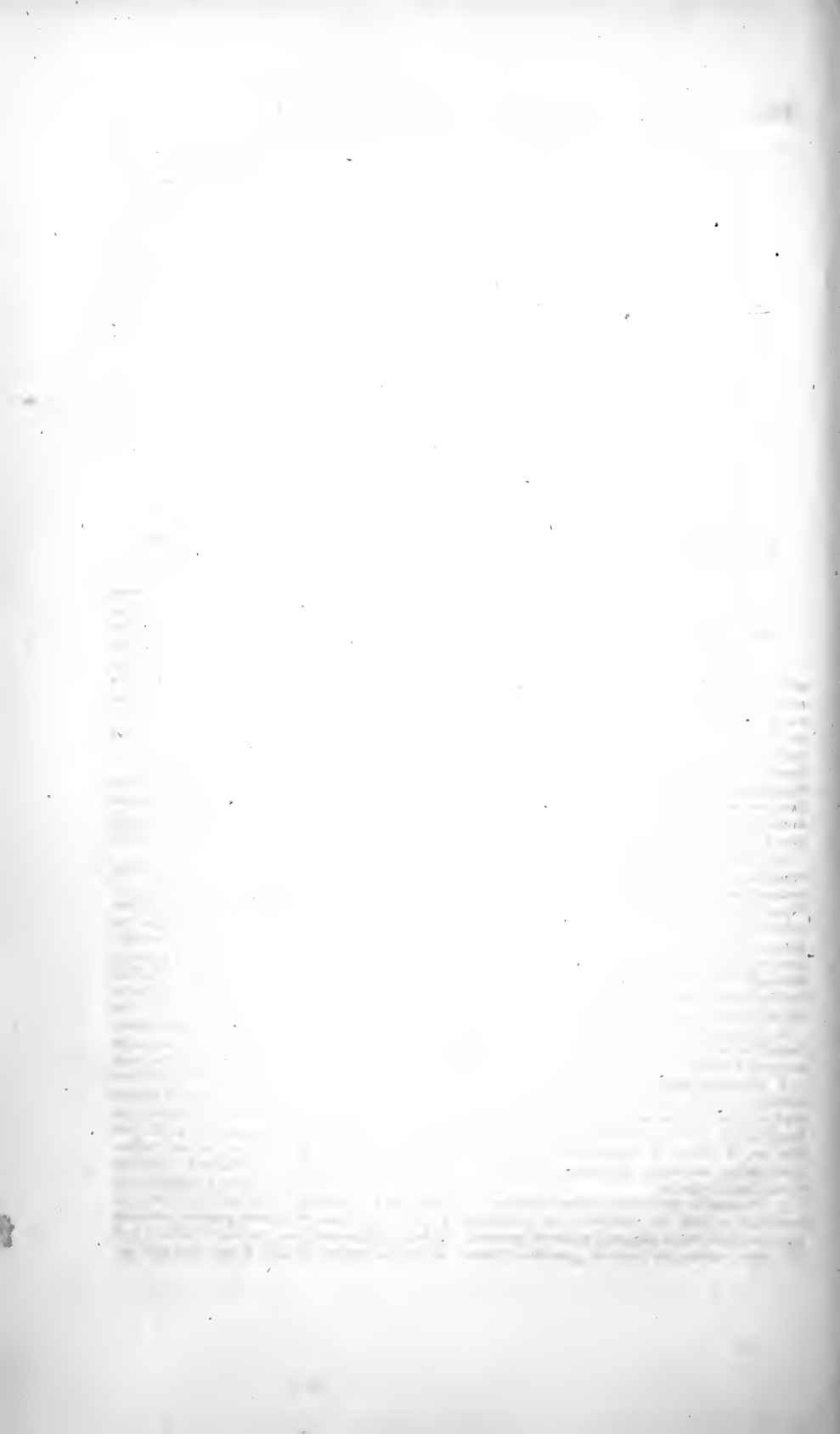
et C G, Q S et C E) $C E + B G - F R$ ad $C E - F S$. Verùm (ob proportionales $B G$ ad $C E$ et $M - N$ ad N) est etiam $C E + B G$ ad $C E$ ut M ad N : ^(k) ideoque divisim $F R$ ad $F S$ ut M ad N , et properterea per Corol. 2. Prop. XCVII., superficies $E F$ cogit corpus, in ipsam secundum lineam $D F$ incidens, pergere in linea $F R$ ad locum B . Q. e. d.

Scholium. Eâdem methodo pergere liceret ad superficies tres vel plures. Ad usus autem opticos maxime accommodatæ sunt figuræ sphæricæ. Si perspicillorum vitra objectiva ex vitris duobus sphæricè figuratis et aquam inter se cludentibus conflentur; fieri potest ut a refractionibus aquæ errores refractionum, quæ fiunt in vitrorum superficiebus extremis, satis accuratè corrigantur. Talia autem vitra objectiva vitris ellipticis et hyperbolicis præferenda sunt, non solum quod facilius et accuratius formari possint, sed etiam quod penicillos radiorum extra axem vitri sitos accuratius refringant. Verùm tamen diversa diversorum radiorum refrangibilitas impedimento est, quò minus optica per figuras vel sphæricas vel alias quascunque perfici possit. Nisi corrigi possint errores illinc oriundi, labor omnis in cæteris corrigendis ^(l) imperitè collocabitur.

^(k) * *Ideoque divisim*, &c. Nam cum sit (ex demonstratis) $M : N = C E + B G - F R : C E - F S = C E + B G : C E$, erit divisim $M : N = F R : F S$.

^(l) * *Imperitè collocabitur.* Vide primam partem Lib. I. Optices Newtonianæ, ubi egregiis experimentis auctor demonstravit radios diversi coloris esse etiam diversè refrangibiles; unde fit ut focus lentis objectivæ telescopiorum (in quo fit objectorum imago quæ trans vitrum oculare spectatur) non sit unicus, sed focus radiorum violaceorum remotissimus sit ab oculari, focus radiorum rubrorum sit proximus, radii ergo ex illis variis imaginibus procedentes inæ-

qualiter colliguntur a vitro oculari, nisi ejus focus adeo remotus sit ut intervallum inter diversas illas imagines ejus respectu evanescat, sed manente lente objectivâ, aucto foco lentis ocularis diminuitur in eâdem ratione amplificatio objecti; sic ergo quantumvis accuratè colligerentur radii per objectivæ lentis figuram; hæc focorum multiplicitas neutiquam corrigitur nisi dispendio amplificationis objecti: Hæc Theoria Newtonum ad inventionem Telescopiorum Catoptricum deduxit, quæ Prop. 7. et 8. Lib. 1. Optices ab ipso explicantur, et quæ cum levi mutatione in usum communissimum venêre.



DE
MOTU CORPORUM
LIBER SECUNDUS.

SECTIO I.

(*) *De motu corporum quibus resistitur in ratione velocitatis.*

(*) LEMMA

Generales resistentiæ notiones exponens.

1. Non potest corpus in medio fluido moveri atque in illud agere, quin ex fluidi reactione vim seu resistentiam aliquam patiat. Vis illa resistentiæ, proportionalis est decremento motûs quod dato tempore generat, et illius directio directioni mobilis semper opposita est (per Mot. Leg. 2. et 3.) Quapropter datâ corporis massâ, resistentia est ut velocitatis decrementum quod dato tempore producit; datâ enim mobilis massâ, motûs decrementum est ut decrementum velocitatis (6. Lib. 1.)

2. Vis resistentiæ quam momento quolibet temporis experitur corpus est ut motûs decrementum directè et temporis momentum inversè. Nam resistentia dato temporis momento est ut motûs decrementum directè (1) et dato motûs decremento est inversè ut momentum temporis quo motûs decrementum generatur. Si enim subduplo vel subtriplo temporis momento, idem motûs incrementum vel decrementum generetur, vis generans dupla aut tripla est.

3. Hinc datâ corporis massâ, resistentia est ut velocitatis decrementum directè et momentum temporis inversè.

4. Quoniam directio vis resistentiæ, directioni mobilis contraria est (1), corpus solâ vi insitâ in medio resistente motum, per rectam lineam continuò fertur, quod etiam evenire debere manifestum est, si corpus vi quâlibet acceleratrice vel retardatrice, secundum vel contrâ directionem motûs insiti urgeatur.

5. Resistentia considerari potest tanquam vis retardans et cum vi gravitatis quâ corporum ascendentium motus perpetuò minuitur conferri. Vis enim resistentiæ sicut vis gravitatis infinitè

parva est, si conferatur cum vi illâ quâ corpus motu finito cietur, seu quâ spatium finitum finito tempore describit. Nam si resistentiæ quam omni temporis momento patitur corpus, vis esset finita, sive ejusdem generis cum vi finitâ corporis motu finito acti, infinita multitudo resistentiarum momentanearum finito quovis tempore producta, totum corporis motum finito quolibet exiguo tempore extingueret, quod est contrâ hyp., quâ supponimus corporis motum tempore aliquo finito in medio resistente perseverare.

6. Hinc corporis in medio resistente moti velocitas finita per spatium infinitè parvum, atque etiam tempore infinitè parvo æquabilis censeri potest, neglecto nimirum infinitè parvo velocitatis decremento.

7. Jam verò resistentia corporum in fluidis, cæteris paribus, oritur partim ex tenacitate, partim ex frictione, et partim ex reactione partium mediæ, tresque sunt celebriores circâ hujus resistentiæ legem hypotheses, quarum mathematicas consequentias Newtonus hoc libro exponit. 1^a. Hypothesis resistentiam ponit velocitati corporis dati proportionalem, secunda velocitatis quadrato, et tertia partim velocitati, et partim velocitatis quadrato. Præterea cum experimentis sit cognitum partem quamdam resistentiæ fluidorum uniformem esse, considerandæ sunt quatuor aliæ hypotheses, in quarum primâ resistentia fingatur uniformis; in secundâ partim uniformis et partim velocitati proportionalis; in tertiâ partim uniformis et partim ut quadratum velocitatis, et in quartâ denique partim uniformis, partim ut velocitas, et partim ut velocitatis quadratum. Prima ex his quatuor hypothesis nihil habet difficultatis, cum uniformis resistentia considerari possit tanquam gravitas constans cum motum ascendentis corporis retardat; quâ de re satis actum est Lib. 1. tres verò quæ se-

quantur hypotheses non ægrè referri plerumque possunt ad determinationes motuum quas aliæ priores hypotheses (de quibus ab initio actum est) suppeditant, quod deinceps ostendemus.

8. Si medium in quo corpus movetur perfectè fluidum sit, hoc est, partibus constet optime lævigatis nullaque tenacitate coherentibus, quæ proinde vi cuicumque illatæ cedant, et cedendo facillimè moveantur inter se, sola ea consideranda est resistentia quæ ex medii reactione ortum ducit, estque illa ut densitas medii et quadratum velocitatis mobilis dati conjunctim. Hæc enim resistentia (per Motûs Leg. 2. et 3. Lib. 1.) est ut quantitas motûs dato tempusculo communicati; sed datâ mobilis velocitate, quantitas motûs communicati est ut quantitas fluidi tempusculo dato movenda, hoc est, ut densitas medii; datâ autem medii densitate, quantitas motûs communicati est ut quantitas fluidi dato tempusculo dimovenda, et ut velocitas quâ quantitas illa fluidi movetur conjunctim, et quantitas fluidi dato tempusculo dimovenda velocitati mobilis proportionalis est, corpus enim duplo velocius altero, duplo majus spatium in fluido percurrat, sique duplo pluribus particulis occurrat. Quare datâ densitate medii, resistentia est ut quadratum celeritatis mobilis, atque adeo si neque fluidi densitas, neque mobilis celeritas data sit, erit resistentia ut medii densitas et quadratum velocitatis conjunctim, atque hæc est resistentia quæ ortum ducit ab inertia particularum fluidi quas corpus motum e loco dimovet et quæ in velocioribus motibus sola ferè observatur.

9. Altera resistentia quæ ex tenacitate partium fluidi uniformis nascitur, constans est, aut quod idem est, temporis momento proportionalis, eamque in tardissimis motibus sensibilem faciunt experimenta. Si enim partium fluidi cohesio sit ubique eadem, vi quâdam determinatâ opus est ut partes illæ separentur, corporique transitum præbeant, quâcumque demum velocitate illud feratur, et ideò vis illa resistentiæ cum vi gravitatis uniformi, quæ corporis ascendentis motum retardat, conferri potest. Nam corpora duo similia et æqualia cum pari velocitate e locis C et e

tentiam ex tenacitate datâ, vi illi gravitatis æquali, in locis tantum a, b, d, &c. reagentem ortam; in spatiis verò intermediis A B et a b, B D et b d, &c. nullum sit motibus obstaculum; dum corpora perveniunt in A et a, æqualem habent velocitatem, et deinde victis æqualibus in A et a obstaculis, pari adhuc velocitate per spatia minimè resistentia A B et a b, feruntur; et simili modo, ob æquales resistentias in locis B et b per spatia B D et b d simul moventur, et itâ deinceps eandem semper velocitatem in locis æquè altis habent. Minuantur jam æqualia illa spatia A B et a b, B D et b d, &c. et eorum numerus augeatur in infinitum, ut vis gravitatis et resistentiæ actio vel reactio continua reddatur, et corpora duo eandem ubique resistentiam patientur, et in locis æquè altis eandem velocitatem habebunt. Quare resistentia quæ ex fluidi tenacitate ortum ducit, potest cum vi gravitatis uniformis comparari, licet medii tenacitas in corpus quiescens (quod quidem vi gravitatis semper urgere) agere nullo modo possit.

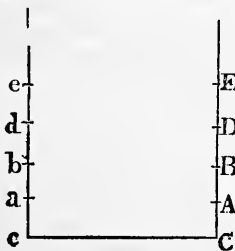
10. In fluidis igitur tenacitate aliquâ præditis, resistentia est partim uniformis, partim velocitatis quadrato proportionalis (8. 9.)

11. *Lemma.* In quâcumque resistentiæ hypothesi, corporis tam in medio resistente quam in vacuo moti velocitas finita in singulis locis est ut elementum spatii descripti directè et momentum temporis quo describitur inversè. Velocitas enim uniformis est ut spatium quodcumque descriptum directè et tempus quo id spatium describitur inversè. In medio autem sive resistente sive vacuo velocitas per spatium infinitè parvum æqualis est (6.)

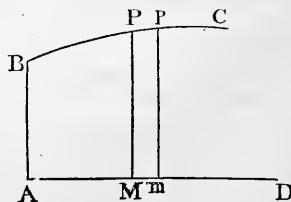
12. *Corol. 1.* Hinc temporis momentum est ut momentum seu elementum spatii directè et velocitas inversè; momentum verò spatii ut velocitas et momentum temporis conjunctim.

13. *Corol. 2.* Si igitur velocitas dicatur v , spatium descriptum s , tempus quo descriptum est t erit $v = \frac{ds}{dt}$, $v dt = ds$ et $dt = \frac{ds}{v}$, sumptisque fluentibus S . $v dt = s$, et $t = \frac{S}{v}$.

14. *Corol. 3.* Si itâ descripta fuerit curva B P C ut ejus applicatæ M P, m p, axi A D normales, exponant velocitatem v , et abscissæ a



per lineas C E, c e, ad rectam C c normales projiciantur, et in locis æquè altis A et a, B et b, D et d, &c. æqualem patiantur resistentiam; corpus quidem C resistentiam experitur a vi gravitatis constante (quæ in locis A, B, D, E, &c. tantum agat) oriundam, corpus verò c resis-



puncto fixo A sumptæ A M, A m tempus t , erectumque sit perpendicularum A B curvæ occurrens in B, area A B P M exponit spatium tem-

pore t descriptum. Sit enim applicata p m, priori P M infinitè propinqua, et erit M $m = d$ t , adeoque areæ A B P M elementum M P p $m = v$ d $t = d$ s (11) et proinde area A B P $M = S$. v d $t = s$. Recta A D dicatur linea temporum et curva B P C linea celeritatum. Eodem modo si abscissa A M exponeret spatium descriptum s et applicata M P velocitatem inversam, ita ut esset A $M = s$, et M $P = \frac{1}{v}$, area A B P M exponeret tempus quo spatium A M descriptum est; esset enim M P p $m = \frac{d}{v} s = d$ t , et hinc area A B P $M = S$. $\frac{d}{v} s = t$.

15. *Lemma*. Si corpus datæ massæ solâ vi insitâ in medio resistente moveatur, decrementum velocitatis, erit ut resistentiâ et momentum temporis conjunctim. Incrementum verò spatii erit ut velocitas et velocitatis decrementum directè et resistentiâ inversè. Datâ enim corporis massâ, resistentiâ est ut velocitatis decrementum directè et momentum temporis inversè (2) ideòque decrementum velocitatis est ut resistentiâ et momentum temporis conjunctim. Quod erat 1^{um}. Sed incrementum spatii est ut velocitas et momentum temporis conjunctim (12) momentum verò temporis est ut decrementum velocitatis directè et resistentiâ inversè (2); Quare incrementum spatii est ut velocitas et illius decrementum directè et resistentiâ inversè. Quod erat 2^{um}.

16. *Corol. 1*. Hinc resistentiâ est ut velocitas et illius decrementum directè ac spatii incrementum inversè, et velocitas in suum decrementum ducta, est ut resistentiâ et incrementum spatii conjunctim.

17. *Corol. 2*. Quare si spatium dicatur s , tempus t , velocitas v , resistentiâ r , erit r d $t = -d$ v , et r d $s = -v$ d v .

18. *Lemma*. Si corpus datæ massæ in medio resistente urgeatur vi centripetâ in directione motûs corporis agente; corpore ascendente, erit velocitatis decrementum ut momentum temporis et summa vis centripetæ et resistentiæ conjunctim. Et velocitas in suum decrementum ducta erit, ut incrementum spatii et summa vis centripetæ et resistentiæ conjunctim.

At corpore descendente, velocitatis incrementum erit ut momentum temporis, et differentia inter vim centripetam et vim resistentiæ conjunctim. Et velocitas in suum incrementum ducta, erit ut incrementum sive elementum spatii et differentia inter vim centripetam ac resistentiâ conjunctim.

Resistentia enim considerari potest tanquam vis continuè retardans (5) et vis centripeta corporis ascendentis motum etiam retardat, ideòque vis tota retardatrix est summa ipsa vis centripetæ et resistentiæ, dum corpus ascendit; sed vis retardatrix in temporis momentum ducta est ut decrementum velocitatis quod producit (2); ergo corpore ascendente, decrementum velocitatis est

ut temporis momentum et summa vis centripetæ ac resistentiæ conjunctim. Quod erat 1^{um}.

Sed momentum temporis est ut incrementum sive elementum spatii directè et velocitas inversè (12). Quare si corpus ascendat decrementum velocitatis est ut elementum spatii et summa vis centripetæ ac resistentiæ directè, et velocitas inversè, adeoque velocitas in suum decrementum ducta est ut elementum spatii et summa vis centripetæ ac resistentiæ conjunctim. Quod erat 2^{um}.

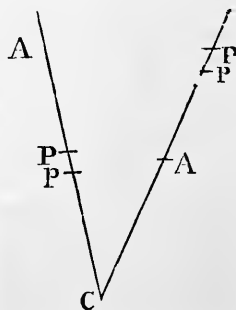
Descendente corpore vis centripeta motum corporis accelerat dum resistentiâ retardat, et ideò si vis centripeta major sit vi resistentiâ, excessus vis centripetæ suprâ resistentiâ est vis tota accelerans; Si vis centripeta minor est vi resistentiâ, vis tota retardans erit excessus resistentiæ suprâ vim centripetam. Quare differentia inter resistentiâ et vim centripetam in temporis momentum ducta erit in primo casu ut incrementum velocitatis, et in secundo casu, ut illius decrementum. Quod erat 3^{um}. Sed momentum temporis est ut elementum spatii directè et velocitas inversè (12), quare velocitas in suum elementum (sive incrementum sit sive decrementum) ducta, est ut elementum spatii, et differentia inter vim centripetam ac resistentiâ conjunctim. Quod erat 4^{um}.

19. *Corol. 1*. Undè si vis centripeta dicatur g , resistentiâ r , spatium s , tempus t , velocitas v erit pro corporis ascensu g d $t + r$ d $t = -d$ v , et g d $s + r$ d $s = -v$ d v ; et pro corporis descensu, si vis centripeta vi resistentiæ sit major g d $t - r$ d $t = d$ v , et g d $s - r$ d $s = v$ d v at si vis centripeta vi resistentiæ sit minor r d $t - g$ d $t = -d$ v , et r d $s - g$ d $s = -v$ d v .

20. *Corol. 2*. Si in his formulis ponatur $r = 0$, mutabuntur illæ in formulas, quibus motus corporis in medio non resistente determinantur. Quâ ratione motus corporis in medio resistente conferri possunt cum ejusdem motibus in medio non resistente.

21. *Corol. 3*. Si corpore descendente, resistentiâ vi centripetæ æqualis fuerit, corporis celeritas æqualis manet; nam in formulis g d $t - r$ d $t = d$ v , et r d $t - g$ d $t = -d$ v , positâ $g = r$, fit d $v = 0$, hoc est, velocitatis incrementum vel decrementum nullum.

22. *Corol. 4*. Si corpus in lineâ rectâ A C vi centripetâ urgeatur ad punctum datum C , et de loco dato A sursum vel deorsum projiciatur cum velocitate datâ in medio resistente, et spatium A P quod ascendendo vel descendendo describit tempore t dicatur s , data A C dica-



adeoque $\frac{Pg}{y} = N$, fiet $\frac{Rpg}{y} = v^2$; sed radius

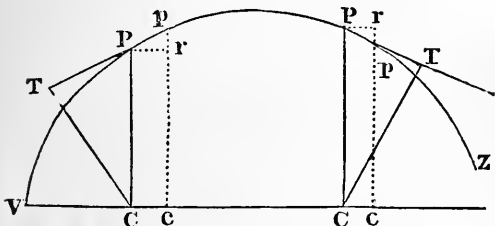
osculi $R = \frac{y dy}{dp}$ (214. Lib 1.) quare erit

$\frac{g p d y}{dp} = v^2$, et $g = \frac{v^2 dp}{p dy}$. Substituatur hic

valor in formulâ Corollarii 2ⁱ. et fiet $g dy$

$+ r ds = \frac{v^2 dp}{p} + r ds = -v dv$, et ideo

$v dv + \frac{v^2 dp}{p} = -r ds$.



28. Corol. 5. Vis centripetæ directio PC, sibi semper parallela maneat, ut hic assumitur vis gravitatis, et per punctum V, in curvâ V P Z datum, ducatur recta VC directioni gravitatis PC perpendicularis, dicanturque ut supra V P = s, P p = d s, C P = y, p r = d y, vis tota gravitatis in P = g, resistentia r, velocitas corporis ibidem = v, et erit ut in Corollario 2^o. $g dy + r ds = -v dv$.

29. Corol. 6. Si in Hypothesi Corollarii 5ⁱ. dicantur radius osculi in P = R, vis normalis = N, abscissa V C = x, et C c seu P r = d x, erit ob triangulorum P p r, C P T similitudinem, P p : P r = P C : T C = g : N, sive d s : d x = g : N = $\frac{g dx}{ds}$; sed (23) $N = \frac{v^2}{R}$, ergo

$\frac{g dx}{ds} = \frac{v^2}{R}$, et hinc $v^2 = \frac{R g dx}{ds}$.

30. Corol. 7. Est autem (216. Lib. 1.) $R = \frac{ds^2 dy}{ds^2 dx}$

$\frac{ds^2 dx - dx^2 ds}{ds^2 dy}$ =

$\frac{ds^2 dy}{ds^2 dx}$, si ponatur dx, constans,

et ideo d d x = 0; Et quia d s²

= d y² + d x², sumptisque

fluxionibus, factâ d x, constante

d s d s = d y d y, et d d s =

$\frac{dy d dy}{ds}$, fiet $R = -\frac{dx d dy}{ds^2}$;

quare (29) $v^2 = \frac{R g dx}{ds} =$

$\frac{g ds^2}{ds^2 dy}$, ideoque $g = -\frac{v^2 d dy}{ds^2}$,

et hinc (28) $g dy + r ds = -$

$\frac{v^2 dy d dy}{ds^2} + r ds = -v dv$,

hoc est, ob d y d d y = d s d d s, v d v =

$\frac{v^2 d ds}{ds} - r ds$.

31. Scholion. In superioribus quinque Lemmatibus ipsorumque Corollariis, fere complexi sumus principia omnia, quibus et ad inventionem et ad demonstrationem motuum in mediis resistentibus uti sunt Clariss. viri Newt. in hoc Libro; Varignonius in Monumentis Academiae Regiae an. 1707. 1708. 1709. 1710. 1711. Joannes Bernoulli ibid. an. 1711. et in Actis Eruditorum Lips. an. 1713. et 1719. Hermannus Lib. 2. Phoronomiae et in Commentariis Academiae Petropolitanae, ac Eulerus in opere exquisito quod de Mechanica scripsit analyticè. Nunc alia nonnulla de logarithmicæ proprietatibus, et de methodo maximorum et minimorum quæ ad doctrinam motuum in mediis resistentibus explicandam spectant, subjungenda sunt.

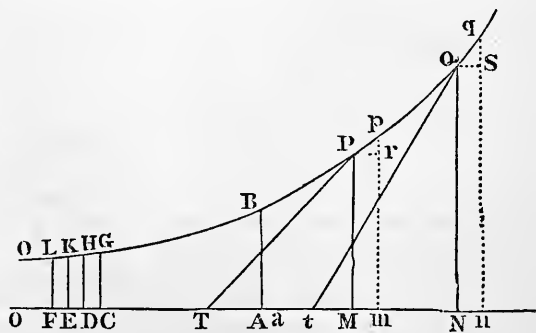
LEMMA

Precipuas logarithmicæ proprietates exponens.

III. Hugenius de hac ipsâ Newtoniani operis parte loquens, in quâ agit de corporibus in mediis resistentibus motis, (quam summâ cum voluptate se vidisse testatur) ait se notasse lineam curvam quam logarithmicam aut logisticam nuncupat, summæ utilitatis esse in hoc negotio, et quædam de eâ Theoremata indicat quorum demonstrationem Guido Grandus postea evulgavit; Hujus ergo curvæ proprietates ab initio explicare a scopo nostro alienum non duximus.

32. Defn. Sit linea recta N A O secundum quam feratur perpendicularis M P motu uniformi et sibi parallelo, dum in ea perpendiculari M P mobile P velocitate variabili movetur secundum hanc legem, ut ejus velocitas sit semper proportionalis distantie ejus a rectâ N A O, curva ab illo puncto P descripta dicetur logarithmica vel logistica.

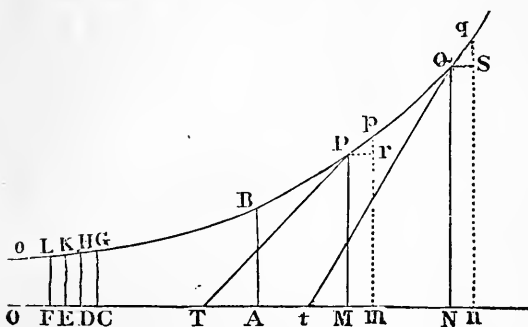
Linea N A O secundum quam perpendicularis P M motu uniformi et sibi parallelo fer-



tur, dicitur axis logarithmicæ, et lineæ P M, Q N perpendiculares in axem sunt ejus ordinatæ.

Si quædam ex ordinatis logarithmicæ, ut A B, sit æqualis unitati, punctum axeos A cui insistit censetur abscissarum origo, et abscissæ a parte A M sumptæ, sunt positivæ, a parte A O negativæ et abscissa pertinens ad ordinatam A B sive ad unitatem est ipsum o.

quamproximæ et æqualiter distantes, est per Corollarium præcedens $GC : HD = HD : KE$, eadem ratione est $HD : KE = KE : LF$, sicque deinceps, unde liquet ordinatas $GC : HD : KE : LF$, &c. esse in progressionem geometricam.



Corol. 1. Differentiæ quamminimæ ordinatarum logarithmicæ æqualibus tempusculis genitæ, sunt ut illæ ordinatæ.

In quovis enim puncto logarithmicæ velocitas axi perpendicularis quâ ordinatæ crescunt vel decrescunt, est ordinatæ proportionalis (ex def.), sed durante tempusculo infinitè parvo illa velocitas uniformis est censenda, et æqualibus tempusculis incrementa vel decrementa linearum sunt ut velocitates uniformes quibus generantur, ergo incrementa vel decrementa ordinatarum h. e. earum differentiæ æqualibus tempusculis genitæ, sunt ut illæ ordinatæ.

Corol. 2. Sint ordinatæ quævis P M, Q N, ducantur duæ aliæ ordinatæ p m, q n ipsis quamproximæ et ab iis æqualiter distantes, p m et q n erunt prioribus ordinatis proportionales: Velocitas enim quâ ordinata motu sibi parallelo fertur est uniformis, ideoque eodem tempore ordinata P M ad p m perveniet ac Q N ad q n ob æquales distantias, ergo, per Cor. 1. differentiæ ordinatarum P M et Q N dum perveniunt ad p m et q n erunt iis ipsis ordinatis proportionales, sed adiectis vel detractis iis differentiis a lineis P M et Q N fiunt ordinatæ p m, q n, et adiectis vel detractis ex terminis rationis cujusvis, correspondentibus terminis rationis ipsi æqualis non mutatur prior ratio, ergo ordinatæ p m et q n erunt inter se ut P M ad Q N, et etiam alternando $P M : p m = Q N : q n$.

Corol. 3. Si sumantur in axe puncta C, D, E, F ad distantias æquales et quamminimas, in iisque punctis erigantur ordinatæ, illæ ordine constituent progressionem geometricam. Nam quia ex Hyp. ordinatæ G C et H D, H D et K E sunt

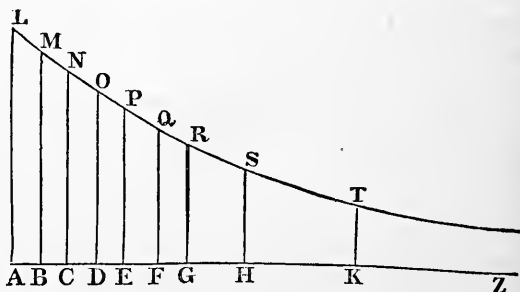
33. Theor. I. Sumantur in axe logarithmicæ quatuor puncta, ita ut duo priora æque a se mutuo distent ac duo posteriora, ordinatæ in iis punctis erectæ erunt in proportionem geometricam.

Et si sumantur in axe quotlibet puncta æque distantia ordine continuo, ordinatæ iis insistentes erunt in progressionem geometricam.

Sumantur in axe duo puncta quævis A et E, et alia duo H et K talia ut sit $A E = H K$, eriganturque in illa puncta ordinatæ A L, E P, H S, K T; dico illas ordinatas fore et proportionem geometricam.

Dividatur tam A E quam H K, in partes infinitè parvas æquales inter se, totidem erunt divisiones in utroque intervallo; erigantur in illa puncta ordinatæ, fient duæ progressioness geometricæ, in quibus totidem erunt termini, et rationes terminorum successivorum æquales erunt, quia ordinatæ in utraqque progressionem æqualiter distant; ergo ex æquo, primus terminus A L prioris progressionis erit ad E P ultimum terminum ejus progressionis, ut H S primus terminus alterius progressionis ad ejus ultimum terminum K T. Q. e. d.

Et si sumantur in axe plura puncta æquè distantia ordine continuo sibi succedentia, ordinatæ



in iis punctis erectæ erunt in progressionem geometricam: probatur ut in Cor. 3. defin.

Corol. E converso, si in lineâ quâvis sumantur plura puncta, æquè distantia ordine continuo, et in iis erigantur perpendiculares quæ sint in progressionem geometricam, logarithmica aliqua per earum perpendicularium extremitates transibit.

Sint enim A, D, G, &c. ea puncta æquè distantia dividanturque eorum intervalla in partes æquales quamminimas, totidem erunt in quovis intervallo, assumantur mediæ proportionales in-

ter perpendiculares A L et D O, D O et G R, &c. tot quot sunt divisionum puncta, et in singulis punctis erigantur perpendiculares iis mediis proportionalibus ordine sumptis æquales; Denique curva tangat tam perpendiculares datas A L, D O, G R quam hæc medias, dico eam curvam esse logarithmicam.

Facile enim liquet ex naturâ progressionum, quod cum sit $A L : D O = D O : G R$, &c. et totidem mediæ proportionales assumantur inter A L et D O, quot assumuntur inter D O et G R, siquæ deinceps, formari progressionem continuationem constantem ex omnibus illis perpendicularibus tam datis quam inventis, ideò quamlibet ex illis, ut A L, esse ad sibi proximam B M, ut alia quævis D O, est ad proximam P E, unde dividendo, est A L ad suam differentiam a proximâ, ut est etiam D O ad suam differentiam a proximâ, ideòque perpendicularem proximarum differentiarum erunt ubique eis perpendicularibus proportionales; Evanescentibus ergo punctorum in axe sumptorum intervallis, et perpendicularibus ad vicinas æquali ubique celeritate latis et æquali tempusculo (ob æqualitatem intervallorum), velocitates quibus crescunt vel decrescunt perpendiculares erunt iis ipsis perpendicularibus proportionales; Ergo (ex definitione logarithmicæ) ea curva quæ tanget eas perpendiculares erit logarithmica.

34. *Theor. II. Abscissæ axis logarithmicæ, sunt logarithmi ordinatarum in earum extremo insistentium.* Ferantur hinc inde ab origine axis partes æquales quamminimæ, in extremo singularum erigantur ordinatæ, illæ omnes ordinatæ constituent progressionem geometricam inter cujus terminos occurrit unitas, earum verò abscissæ erunt in progressionem arithmeticâ propter partium in axe sumptarum æqualitatem, et abscissa quæ unitati respondet est O; Jam autem cum termini progressionis arithmeticæ inter quos est O ita aptantur terminis progressionis geometricæ ut O respondeat unitati et reliqui termini sibi respondeant, tum termini progressionis arithmeticæ sunt logarithmi terminorum correspondentium progressionis geometricæ; Ergo abscissæ logarithmicæ, sunt logarithmi ordinatarum correspondentium.

Corol. 1. Portio axis quæ interceptitur inter duas ordinatas est logarithmus rationis quæ intercedit inter illas ordinatas. Quotiens enim duarum quantitatum exprimit rationem quæ inter illas intercedit, et differentia logarithmorum earum quantitatum, est logarithmus quotientis earum, sed abscissæ sunt logarithmi ordinatarum, et portio axis quæ interceptitur inter duas ordinatas est differentia abscissarum sive logarithmorum ad eas ordinatas pertinentium, ergo illa portio est logarithmus quantitatis quæ exprimit rationem quæ inter ordinatas intercedit.

Corol. 2. Si dentur duarum aut plurium quantitatum logarithmi, et a puncto dato rectæ alicujus sumantur longitudines eis logarithmis æquales, et in earum extremo erigantur perpendiculares quantitatum quarum sumuntur loga-

rithmi æquales, logarithmica aliqua per earum perpendicularem extremitates transibit.

In recta O A N (vid. fig. prim. pag. succed.) sumatur punctum A in quod erigatur perpendicularis A B unitati æqualis, sitque A M logarithmus quantitatis cui æqualis est perpendicularis M P, sit A a differentia progressionis arithmeticæ ex quâ desumuntur logarithmi, quæ ideò accuratè continebitur in intervallo A M toties quot sunt termini in progressionem geometricam ex qua desumuntur quantitates quarum habentur logarithmi, quærantur tot mediæ proportionales inter A B et M P quot sunt divisionum puncta inter A et M, et in illa puncta erigantur perpendiculares illis mediis proportionalibus ordine æquales, fiet progressio geometrica, quæ est ipsa progressio quantitatum quarum abscissæ lineæ O A N quantitate A a successivè auctæ sunt logarithmi, siquidem in utraque progressionem occurrunt termini A B et M P eodem intervallo in utraque dissiti, sed si in punctis æquidistantibus lineæ cujusvis erigantur perpendiculares in progressionem geometricâ, logarithmica aliqua earum vertices tanget (Cor. Theor. I.) Ergo si dentur numeri cum suis logarithmis concipi semper poterit logarithmica cujus abscissæ sint illi logarithmi et cujus ordinatæ sint quantitates quibus respondent.

35. *Theor. III. Axis logarithmicæ est ejus asymptotus ad quam ab unâ parte accedit proprius datâ quâvis quantitate numquam tamen eam attingit, et a quâ ab alterâ parte longius recedit datâ quâvis quantitate.*

Sint duæ ordinatæ A B, M P quarum una sit alterius dupla vel plusquam dupla, feratur portio axis A M hinc inde secundum axem sine fine, ordinatæ in ea puncta erecta crescant ab unâ parte, et ab alterâ decrescant in ratione duplâ vel plusquam duplâ (per Cor. Theor. I.) sed ex principiis Archimedeis quantitas crescens in progressionem duplâ vel plusquam duplâ omnem quantitatem datam tandem excedet, et ex principiis Euclideanis quantitas quævis decrescens in ratione duplâ vel plusquam dupla minor fit quâvis quantitate datâ; Ergo logarithmica longius ab axe recedit, aut propius ad eum accedit quâvis quantitate datâ, numquam tamen eum attinget, attingat enim eum si fieri potest in quodam puncto X, ferendo distantiam A M secundum axem, fiet tandem ut cadat proximè citra X, putâ in Y, tum proximè ultra, ut in Z; in puncto Y nondum attinget axem ex Hypothesi, et aliquo intervallo Y V ab eo distabit, sed quia $Y Z = A M$ debebit esse $A B : M P = Y V$ ad ordinatam in Z, quæ ideò dabitur, ac per consequens logarithmica nondum attinget axem in Z, nedum eum attingat in X. Q. e. d.

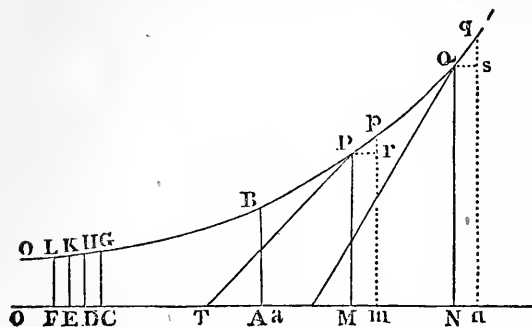
36. *Theor. IV. Subtangens logarithmicæ est constans.* Capiantur enim ubivis in axe particulæ æquales quamminimæ M m, N n, erectæque ordinatis M P, m p, et N Q, n q, per puncta P et Q concipiantur tangentes P T, Q t axi occurrentes in T, t; ducantur etiam rectæ P r, Q s, ordinatis m p, n q perpendiculares. Evan-

escentibus ordinatarum distantis $M m$, $N n$, triangulum $P p r$ fit simile triangulo $T P M$, et triangulum $Q q s$ simile triangulo $t Q N$, ideoque est $p r : P M = P r$ (sive $M m$) : $M T$, et $q s : Q N = N n$ (sive $M m$) : $N t$, sed cb dis-

$\frac{M B}{L A} d y$ sive (quia $M B = y - d y$ et $L A = y$) secundus ille terminus erit $\frac{y - d y}{y} d y$, un-

de juxta methodum summandi progressionis geometricas

$$\begin{aligned} \text{est } b &= d y \times \frac{\frac{y - d y}{y}^n - 1}{\frac{y - d y}{y} - 1} \\ &= -\frac{1}{y^{n-1}} \times \frac{(y - d y)^n - y^n}{y - d y - y} \\ &= (\text{valore } y - d y \text{ in seriem reducto}) -\frac{1}{y^{n-1}} \times (y^n - n y^{n-1} d y + n \times \frac{n-1}{2} y^{n-2} d y^2, \&c. - y^n, \text{ sive deletis terminis } y^n \text{ et } -y^n, \text{ totaque serie per } -y^{n-1} \text{ divisa} \\ &= + n d y - \frac{n(n-1)}{2} y^{-1} d y^2 + \end{aligned}$$

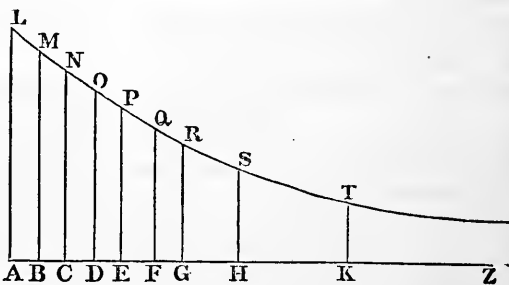


tantias $M m$, $N n$ æquales est $p m : P M = q n : Q N$ et dividendo est $p r : P M = q s : Q N$, quare $P r$ (sive $M m$) : $M T = N n$ (sive $M m$) : $N t$, adeoque $M T = N t$. $Q e. d.$

Corol. Hinc cum ordinata sit ut subtangentem constantem ut fluxio ordinatæ ad fluxionem abscissæ, obtinetur logarithmicæ æquatio fluxionalis. Abscissa $A M$ dicatur x , ordinata $M P$, y , subtangens $M T$, s , fluxio $M m$ erit $d x$, $p r = d y$, cumque sit $y : s = d y : d x$, est $y d x = s d y$ æquatio ad logarithmicam.

37. *Probl. I. Datâ subtangente et duabus ordinatis logarithmicæ, invenire portionem axis inter eas ordinatas interceptam.*

1^{us}. Casus, major ex illis ordinatis non sit plusquam dupla alterius; major illa ordinata sit $L A$ quæ dicatur y , minor sit $G R$, differentia earum $L A - R G$ sit b . Portio axis $A G$ inter eas intercepta sit x , divisaque concipiatur in partes æquales infinite parvas $A B = d x$, earum numerus (qui infinitus censendus est) dicatur n , erit ergo $n d x = x$; subtangens data sit s , eritque per Corollarium præcedens $y : s = (d y : d x = n d y : n d x =) n d y : x$; hoc autem modo determinatur valor $n d y$. Concipiatur erectæ omnes ordinatæ in puncta divisionum portionis axis $A G$, erunt in progressionem geometricâ (per Cor. 3. def. n. 32.) et cum earum differentiæ sint ut illæ ordinatæ (per Cor. 1. def. n. 32.) differentiæ successive earum ordinatarum erunt in progressionem geometricâ, cujus omnes termini simul sumpti differentiam $L A - R G$ sive b efficient; numerus autem terminorum ejus progressionis erit n , primus terminus $d y$, secundus invenitur per hanc proportionem $L A : M B = d y :$



$b = + n d y - \frac{n(n-1)}{2} y^{-1} d y^2 + \frac{n^3 - 3n^2 - 2}{2 \times 3} y^{-2} d y^3, \&c.$ sed quoniam n est numerus infinitus, in singulis coefficientibus altissima ejus dignitas sola assumi debet, reliquis terminis neglectis, unde series ad hanc reductur $b = + n d y - \frac{n^2 y^{-1} d y^2}{2} + \frac{n^3 y^{-2} d y^3}{2 \times 3} \&c.$ qui quidem termini finiti sunt, compensatâ dignitate numeri infiniti n per infiniti parvi $d y$ similem dignitatem.

Ex eâ autem serie, per serierum reversionem

obtinebitur valor ipsius $n d y$, sit enim $n d y = A b + B b^2 + C b^3 + D b^4 \&c.$ erit $+ n d y = + A b + B b^2 + C b^3 \&c.$ $\frac{n n d y^2}{-2 y} = -\frac{A^2 b^2}{2 y} + \frac{2 A B b^3}{2 y} + \frac{n^3 d y^3}{+2 \times 3 y^2} = +\frac{A^3 b^3}{2 \times 3 y^2}$

Cum ergo hi omnes termini debeant efficere b , fiat primus terminus $A b = b$ erit $A = 1$, et reliqui omnes termini debebunt esse æquales 0 ,

suppediabantque totidem æquationes ad determinandos coefficientes B, C, D, &c. v. gr. est

$$+ B b^2 - \frac{A^2 b^2}{2y} = 0, \text{ unde invenitur } B = \frac{1}{2y};$$

est C b^2 - \frac{2 A B b^3}{2y} + \frac{A^3 b^3}{2 \times 5 y^2} = 0, substitutoque valore A et B divisoque per b^3, est C = \frac{1}{5 y^2}, sicque de cæteris, unde reperietur

$$n d y = b + \frac{b^2}{2y} + \frac{b^3}{5 y^2} + \frac{b^4}{4 y^3}, \&c.$$

Cum itaque sit y : s = n d y : x, erit x = s \times \frac{b}{y} + \frac{b^2}{2 y^2} + \frac{b^3}{3 y^3} + \frac{b^4}{4 y^4}, \&c. Q. e. i.

2^{us}. Cas. Quod si ordinata L A fit plusquam dupla ordinatæ T K, quæratur media proportionalis inter L A et T K, cujus si L A non sit plusquam dupla, inveniatur intervallum abscissum inter eam et L A, ut prius, eritque dimidia pars intervalli quæsiti A K, erit enim L A ad eam mediam, ut ea media ad T K, unde portio axis inter L A et eam mediam, erit æqualis portioni axis inter eam mediam et T K: si L A ejus mediæ sit plusquam dupla, quæratur nova media inter L A et priorem mediam, intervallum inter hanc et L A erit quarta pars portionis quæsitæ A K. Quod si L A sit adhuc plusquam dupla istius mediæ repetatur operatio donec media inveniatur cujus L A non sit plusquam dupla, ex cujus intervallo, intervalli A K valorem assignare licebit, eo quo prius usi sumus ratiocinio.

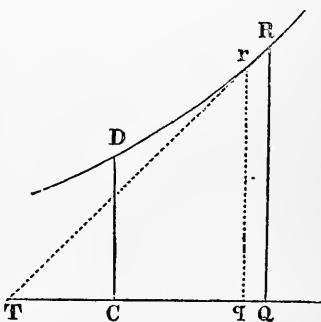
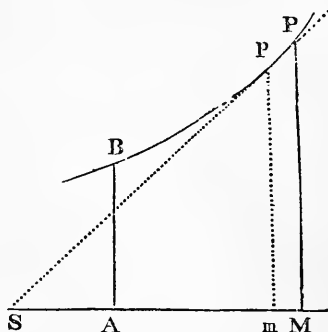
Corol. 1. Si una ex ordinatis sit unitas, portio axis quæsita x erit alterius ordinatæ abscissa, idèque ejus erit logarithmus, positivus quidem si ea ordinata sit unitate major, negativus verò si unitate sit minor.

Corol. 2. Si ordinata G R sit unitas, et ordinata L A ejus dupla, et si subtangens logarithmicæ sit æqualis unitati, series abscissam exhibens in hanc mutatur x = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 4} + \frac{1}{3 \times 8} + \frac{1}{4 \times 16}, &c. quorum terminorum calculus est facillimus, qui si instituitur, abscissa quæsita invenietur x = .6931472.

38. Theor. V. Sint duæ diversæ logarithmicæ in utrâque sumantur ordinatæ æquales, abscissæ illis ordinatis correspondentes in utrâque logarithmicâ erunt ut earum logarithmicarum subtangentes, adeoque in constanti ratione.

Sint duæ logarithmicæ P B, R D prioris subtangens sit M S = s, subtangens alterius sit Q T = t; Ordinatæ P M, R Q in utrâque sumptæ sint æquales dicanturque y; sint ordinatæ B A et D C æquales unitati; abscissa A M dicatur x, et C Q, z; dico fore s : t = x : z. Dividatur A M in partes infinitè parvas d x, quarum numerus (infinitus) dicatur n. In totidem partes d z dividatur C Q, et concipiantur ordinatæ in omnes divisiones erectæ, illæ ordinatæ erunt in progressionem geometricâ in utroque intervallo, sitque p m secundus terminus

primæ progressionis, et q r secundus terminus progressionis alterius, erit in primâ P M : B A = P M^{n-1} : p m^{n-1}, in secunda R Q : D C = R Q^{n-1} : r q^{n-1}, ex natura progressionis geometricæ, et quia tres priores termini



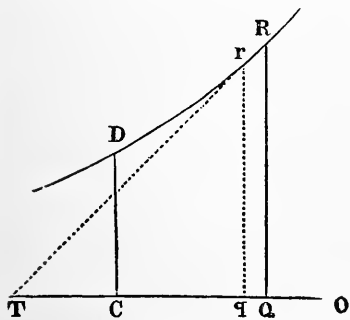
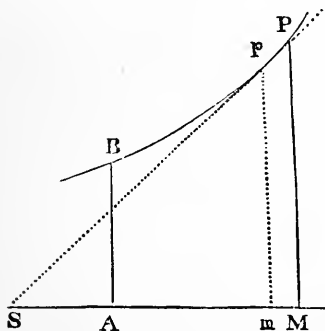
harum proportionum ex hypothesi sunt æquales; æquales etiam erunt p m^{n-1} et r q^{n-1}, idèque p m = r q, et P M - p m = R Q - r q, differentie ergo proximarum ordinatarum sunt æquales, dicanturque d y. Est autem in prima logarithmica (per Probl. 1. n. 37.) y : = n d y : n d x sive x, et alternando y : n d y = s : x; in secunda y : t = n d y : n d z sive z, et alt. y : n d y = t : z, est ergo s : x = t : z sive s : t = x : z. Q. e. d.

Corol. 1. Hinc liquet quod (manente unitate) logarithmicæ quarum eadem erunt subtangentes, in omnibus erunt æquales, quippe si sumantur in iis æquales ordinatæ abscissæ etiam æquales erunt.

Corol. 2. Logarithmicæ vero diversæ speciei dicentur, quarum subtangentes erunt diversæ; et logarithmi diversæ speciei dicentur, ubi eisdem quantitibus logarithmi diversi respondebunt, unde etiam logarithmicæ ad quas pertinet diversæ illæ logarithmorum species, habebunt diversas subtangentes (per hoc Theor.) idèque erunt diversæ speciei.

Corol. 3. Datis logarithmis cujusvis speciei, logarithmi alius speciei eisdem numeris respondentes inveniri possunt, si dentur subtangentes utriusque speciei; Hinc si dentur logarithmi quorum subtangens est unitas (qui hyperbolici dicuntur), sitque data subtangens alius speciei .4342944 multiplicentur logarithmi dati per hunc numerum, habebunturque eorundem numerorum logarithmi in hac altera specie, ut liquet ex hoc Theor. Ideoque in posterum per hanc expressionem $L. x$, intelligemus logarithmum hyperbolicum quantitatis x , qui si multiplicetur per quantitatem quamlibet ut a , a $L. x$ exprimet logarithmum x ex cā specie depromptum quæ habet a pro subtangente, est enim $1 : a = L. x$ ad eum logarithmum qui ergo erit $a L. x$.

39. *Probl. II. Datā ordinatā logarithmicā et ejus abscissā, invenire ejus subtangentem, dummodo alterius cujusbet logarithmicæ subtangens sit data.*



Data sit subtangens logarithmicæ FB , logarithmicæ verò RD data sit abscissa CQ et ordinata QR , quæritur hujus logarithmicæ subtangens: Quæritur primum abscissa quæ in logarithmica PB responderet ordinatæ æquali QR , per Probl. I. sitque ea AM , fiatque ut AM ad CQ ita subtangens data ad quæsitam.

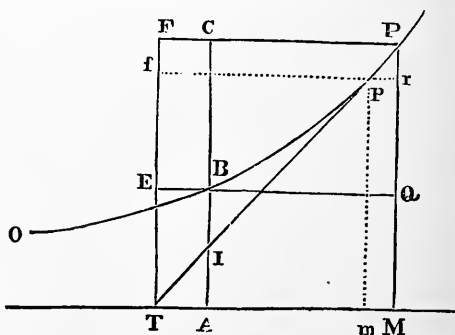
Exempl. In tabulis logarithmorum, logarithmus numeri 2. est .3010300. si ergo concipiatur logarithmica cujus abscissæ sint logarithmis ta-

bularum æquales, et cujus ordinatæ sint æquales numeris eis logarithmis correspondentibus, quæratque ejus logarithmicæ subtangens; inveniat in altera logarithmica cujus subtangens est unitas abscissa respondens ordinatæ quæ sit unitatis dupla (per Cor. 2. Prob. I.) quæ est .6931472. fiatque ut .6931472. ad .3010300. ita unitas ad subtangentem logarithmicæ tabularum quæ invenietur. 4342944.

Corol. Hinc dato logarithmo alicujus numeri desumpto ex logarithmica cujus subtangens data est, habebitur ejus numeri logarithmus in tabulis, dicendo ut subtangens data ad .4342944. ita logarithmus datus ad ejusdem numeri logarithmum in tabulis.

40. *Probl. III. Sit quantitas variabilis, cujus logarithmus etiam variabilis est, ex ejus quantitatis variabilis fluxione, fluxionem ejus logarithmi determinare.* Concipiamus logarithmicam ad quam pertinet species logarithmi quæ assumitur; sit a ejus subtangens, sitque y variabilis proposita, quæ consideretur ut ejus logarithmicæ ordinata, sitque x ejusdem logarithmicæ abscissa ei ordinatæ y respondens, erit per naturam logarithmicæ (n. 36.) $y dx = a dy$ et $dx = \frac{a dy}{y}$, sed x est logarithmus ordinatæ y , ergo dx est ejus differentia, ergo $dL. y = \frac{a dy}{y}$ hoc est, differentia logarithmi est differentia variabilis propositæ divisa per ipsam variabilem, et ducta in constantem quæ sit subtangens logarithmicæ ad quam pertinet species logarithmi assumpti.

Et e converso, si habeatur hæc fluxio $\frac{a dy}{y}$, ejus fluens est logarithmus ipsius quantitatis y ex eā logarithmicā desumptus cujus subtangens est a .



41. *Theor. V. Spatium logarithmicum $ABPM$ duabus ordinatis AB , PM arcu BP et abscissā AM comprehensum, æquale est rectangulo subtangentis et differentie ordinatarum.*

Ducta enim per punctum P tangente PT , compleatur rectangulum $TFFM$, agatur per B recta EQ , parallela TM , secans TF in E et MP in Q ; per m ordinata mp alteri MP infinitè propinqua, et per p recta fr parallela TM , occurrens TF in f et MP in r ; His po-

sitis (ob triangula $P r p$, $P M T$ similia) erit $P r : p = P M : M T$, seu $P F$, idéoque $rectangulum M m p$ æquale erit rectangulo $P F f r$. Quare si area logarithmica $A B P M$ divisa intelligatur in rectangula innumera ut $M p$, rectangulum $E F P Q$ divisum erit in totidem rectangula ut $F r$ correspondentibus $M p$, aequalia, et proinde area logarithmica $A B P M$ æqualis est rectangulo $E F P Q$. Q. e. d.

Hinc spatium logarithmicum $ABPM$ est ut ordinatarum AB , PM differentia PQ , ob datam subtangentem TM (36.)

Trilineum verò logarithmicum $B P Q = P Q \times M T - A M \times B A$; et producta $A B$ ut rectæ $F P$ occurrat in C , erit trilineum logarithmicum $B P C = A C \times C P - C B \times M T$.

42. *Corol. 1. Hinc spatium logarithmicum infinitè protensum* $OOPM$, *quâ parte logarithmica ad asymptotum* MO *continuo accedit, duplex est* *trianguli* $P T M$. Nam ob distantiam infinitam MO evanescit ordinata AB , fitque spatium $O o P M$, æquale rectangulo $T F P M$, sub ordinatâ PM et subtangente MT contento.

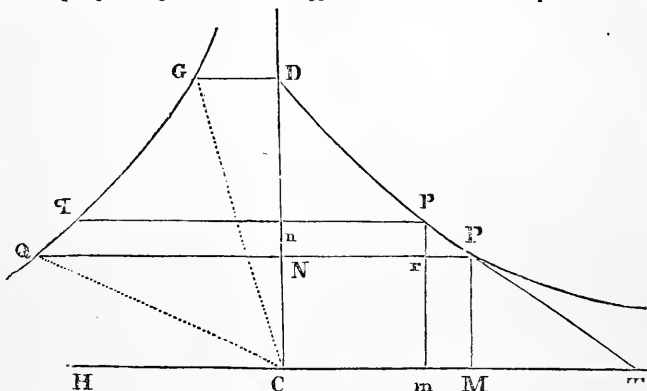
43. *Corol. 2. Tangens P T (producta si opus est) sect ordinatam A B in I, et spatium logarithmicum B P C erit ut B I inter logarithmicam et tangentem intercepta.* Nam ob triangulorum T F P, I C P, similitudinem, est T F ad F P, (seu A C ad M T) ut C I ad C P, et ideo $A C \times C P = M T \times C I$. Quare (41) rilineum B P C = $A C \times C P - M T \times C B = M T \times C I - M T \times C B = M T \times B I$. Est igitur, ob datam M T, trilineum B P C ut B I.

44. Theor. VI. *Asymptotis orthogonalibus*
 $C H$, $C D$ descripta sit hyperbola $Q q$, E per
punctum D in asymptoto $C D$ datum, logarithmi-
ca $D p P$ axem habens $C H$ productum; per
punctum D agatur ad hyperbolam ordinata $D G$,
et per punctum alterum quodvis N ordinata
 $N Q$ quæ producta logarithmica occurrit in P ,
erit area hyperbolica $N Q G D$, ad dignitate
hyperbolæ seu ad rectangulum $C D \times D G$, in
ratione rectæ $N P$ ad subtangentem logarithmi-

Agatur enim altera q p ipsi Q P infinitè pro-

pinqua, ex punctis p, P demittantur ad axem
 CT perpendicularum p m secans Q P in r et per-
 pendiculum P M; PT tangat logarithmicam in
 P; erit ob triangula p r P, P M T similia, p r
 (seu N n) : P r = P M (seu C N) : M T, et
 (ex natura hyperbolæ per Theor. 4. de Hyp.
 Lib. 1.) N Q : D G = C D : C N; ideòque
 per compositionem rationum et ex aequo N Q
 N n : P r x D G = C D : M T; Quare ob
 datas C D et M T, summa omnium rectangu-
 lorum N Q x N n, in quæ dividi potest area
 N Q G D, hoc est, hæc area ipsa est ad rectan-
 gulum sub data G D, et summâ omnium P r,
 seu totâ rectâ N P, ut C D ad M T, proindeque
 N Q G D x M T = N P x G D x C D,
 et hinc N Q G D : G D x C D = N P :
 M T. Q. e. d.

45. *Corol.* Hinc (ob datas M T, G D, C D) *area hyperbolica* $NQGD$ *et proinde sector*

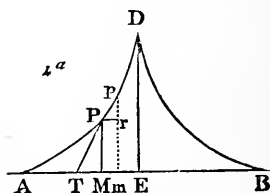
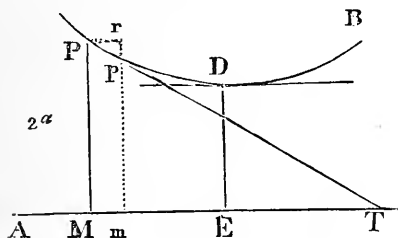
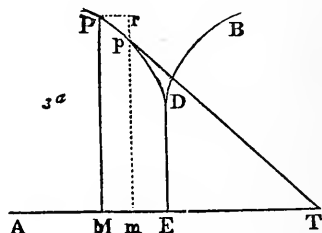
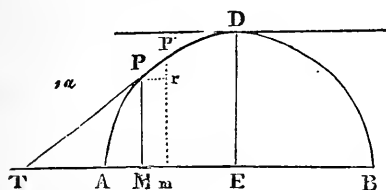


*C G Q ipsi æqualis (377. Lib. 1.) est ut recta
N P productio ordinatæ Q N, inter asymptotum
hyperbolæ C D et logarithmicam intercepta.*

46. *Scholium.* Cum Ill. Marchio Polenus in Epistolâ ad Hermannum Patavii a. 1729. editâ, itâ facili et expeditâ logarithmicâ descriptionem organicam, pro ingenii sui sagacitate inveniit, ut curva illa sectionibus conicis haud difficiliter construat, cumque logarithmica per lineas rectas id præstet quod hyperbola per sectores vel quadrilatera sua, in problema constructionibus quæ per areas hyperbolicas absoluntur, loco hyperbolæ non malè usurparetur logarithmica; quamvis si problema ad merum cæculum reducat, æquè benè possint usurpari spatia hyperbolica, quam abscissæ logarithmicæ. Quomodo autem constructiones quæ per spatia hyperbolica fiunt, ad logarithmicas transferantur, pluribus exemplis ostendimus deinceps.

De Maximis et Minimis.

47. Theor. Si quantitas variabilis, (quam exponat recta PM curvæ PDB ordinata) ad certum usque terminum D continuè crescat et postea decrescat, vel contrâ, decrescat primum et



deindè crescat. Actaque sit altera ordinata $p m$ priori $P M$ infinitè propinqua, et per punctum P recta $P r$ abscissæ $A P$ parallela secans $p m$ in r , ratio incrementi vel decrementi evanescentis $p r$ ordinatæ $P M$, ad incrementum evanescentis $M m$ abscissæ $A M$ in puncto D ubi ordinata $M P$ omnium maxima vel minima evadit, infinita est vel nulla.

Per punctum P ducatur $P T$ tangens curvam in P , et abscissæ occurrens in T , et propter similitudinem triangulorum $p r P$, $P M T$, erit $p r$ ad $P r$, seu $M m$ ut $P M$ ad $M T$. Sed si coincidente puncto P cum D , tangens $P T$ evadat abscissæ $A E$ parallela et proinde $M P$ fiat maxima vel minima ordinata $E D$ ut in figurâ 1^a. et 2^a. punctum T in infinitum abit, et ideo ratio $P M$ ad $M T$ seu ratio $p r$ ad $M m$ nulla est. Contrâ verò si coincidente P cum D , tangens $P T$ cum ordinatâ maximâ vel minimâ $D E$ conveniat, ut in figurâ 3. et 4. evanescit subtangens $M T$ et ratio $P M$ ad $M T$, sive $p r$ ad $M m$ infinita evadit.

48. Corol. 1. Ut ex datâ æquatione inter abscissam $A M$ et ordinatam $M P$, inveniatur valor abscissæ $A E$ cui maxima vel minima applicata $E D$ ordinatur, sumenda est æquationis fluxio, et ratio fluxionis ordinatæ ad fluxionem abscissæ, seu ratio $p r$ ad $M m$, eaque vel infinito

vel nihilo æquanda est, aut quod idem est, factâ $M m$ constante, fluxio ordinatæ vel infinito vel nihilo æqualis supponenda.

49. Corol. 2. Si quantitas variabilis cujus maximum vel minimum quæritur non sit ordinata curvæ, potest illa supponi æqualis ordinatæ curvæ alicujus in datam quantitatem ductæ, uti si proposita esset quantitas variabilis $a x^2 - x^3$ in quâ a data est, x indeterminata, poneretur $a x^2 - x^3 = b b y$, quæ est æquatio ad curvam cujus abscissa est x , et ordinata y , et hinc, sumptis fluxionibus, foret $2 a x d x - 3 x^2 d x = b b d y$, et $2 a x - 3 x^2 = \frac{b b d y}{d x} = 0$ adeoque $2 a x - 3 x^2 = 0$ et $x = \frac{2}{3} a$. Si itaque loco x substituatür $\frac{2}{3} a$ in quantitate propositâ, obtinebitur maximum ejus $\frac{4}{27} a^3 - \frac{8}{27} a^3 = \frac{4}{27} a^3$. Idem inventum fuisset brevius, si nullâ factâ suppositione, fluxio variabilis propositæ videlicet $2 a x d x = 3 x^2 d x$, nihilo fuisset æquata.

PROPOSITIO I. THEOREMA I.

Corporis, cui resistitur in ratione velocitatis, motus ex resistantiâ amissus est ut spatium movendo confectum.

Nam cum motus singulis temporis particulis æqualibus amissus sit ut velocitas, hoc ^(a) est, ut itineris confecti particula, erit, componendo, motus toto tempore amissus ut iter totum. Q. e. d.

Corol. Quare si corpus, gravitate omni destitutum, in ^(b) spatiis liberis sola vi insitâ moveatur; ac detur tum motus totus sub initio, tum etiam motus reliquus post spatium aliquod confectum: ^(c) dabitur spatium totum quod corpus infinito tempore describere potest. Erit enim spatium illud ad spatium jam descriptum, ut motus totus sub initio ad motûs illius partem amissam.

LEMMA I.

Quantitates differentiis suis proportionales sunt continuè proportionales.

Sit A ad A — B ut B ad B — C et C ad C — D, &c. et convertendo fiet A ad B ut B ad C et C ad D, &c. Q. e. d.

PROPOSITIO II. THEOREMA II.

Si corpori resistitur in ratione velocitatis, et idem solâ vi insitâ per medium simile moveatur, sumantur autem tempora æqualia: velocitates in principiis singulorum temporum sunt in progressionem geometricâ, et spatia singulis temporibus descripta sunt ut velocitates.

Cas. 1. Dividatur tempus in particulas æquales; et si ipsis particularum initiis agat vis resistantiæ impulsu unico, quæ sit ut veloci-

^(a) * Hoc est, ut itineris confecti particula (12) ob datum temporis momentum (ex hyp.)

^(b) * In spatiis liberis, id est, in quibus nulum aliud est obstaculum præter medii resistantiam velocitati proportionalem.

^(c) * Dabitur spatium totum quod corpus infinito tempore describere potest, hoc est, usque ad motus extinctionem. (Ostendetur autem infra, in nota f, infinitum tempus requiri ut motus omnis extingatur, quando resistitur motui in

ratione velocitatis.) Cùm ergo motus ad extinctionem usque amissus, sit ipse motus totus, et motus amissi sint ut spatia movendo confecta (per Theor.) erit motus totus ad motûs partem amissam post datum spatium descriptum, ut spatium ad extinctionem usque motûs descriptum ad illud datum spatium. Unde liquet spatium quod corpus ad motûs usque extinctionem describit finitum esse, cùm datam habeat rationem ad spatium finitum.

tas: ^(d) erit decrementum velocitatis singulis temporis particulis ut eadem velocitas. Sunt ergo velocitates differentiis suis proportionales, et propterea (per Lem. I. Lib. II.) continuè proportionales. ^(e) Proinde si ex æquali particularum numero componantur tempora quælibet æqualia, erunt velocitates ipsis temporum initiis, ut termini in progressionem continuâ, qui per saltum capiuntur omisso passim æquali terminorum intermediorum numero. Componuntur autem horum terminorum rationes ex rationibus inter se iisdem terminorum intermediorum æqualiter repetitis, et propterea eæ quoque rationes compositæ inter se eadem sunt. Igitur velocitates, his terminis proportionales, sunt in progressionem geometricâ. Minuantur jam æquales illæ temporum particulæ; et augeatur earum numerus in infinitum, eò ut resistentiæ impulsus reddatur continuus; et velocitates in principiis æqualium temporum, semper continuè proportionales, erunt in hoc etiam casu continuè proportionales. Q. e. d.

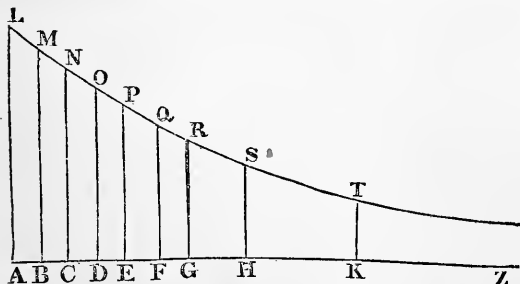
Cas. 2. Et divisim velocitatum differentiæ, hoc est, earum partes singulis temporibus amissæ, sunt ut totæ: spatia autem singulis temporibus descripta sunt ut velocitatum partes amissæ (per Prop. I. Lib. II.) et propterea etiam ut totæ. Q. e. d.

Corol. Hinc si asymptotis rectangulis A C, C H describatur hyperbola B G, sintque A B, D G ad asymptoton A C perpendiculares, et exponatur tum corporis velocitas tum resistentia medii, ipso motus initio,

^(d) * *Erit decrementum velocitatis.* (15) ut resistentia ob datum temporis momentum, ideòque (per hyp.) ut velocitas.

^(e) 50. *Proinde si ex æquali,* &c. Linea recta A Z in particulas æquales A B, B C, C D, &c.

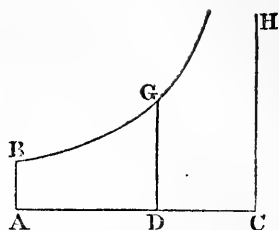
si ex æquali particularum numero componantur tempora quælibet æqualia, ut A E, E H, H K, &c. erunt velocitates A L, E P, H S, &c., ipsis temporum initiis ut termini qui e progressionem geometricâ per saltum capiuntur, omisso passim æquali terminorum intermediorum B M, C N, &c. et F Q, G R, &c. numero. Componuntur autem horum terminorum A L, E P, H S, &c. rationes ex æqualibus rationibus terminorum intermediorum æqualiter repetitis; nimirum ratio A L ad E P, componitur ex rationibus A L ad B M, B M ad C N, &c. quæ tum magnitudine, tum numero æquales sunt rationibus E P ad F Q, F Q ad G R, &c. ex quibus componitur ratio E P ad S H, et ita porro. Quare ratio A L



divisa, exponat tempus, et perpendiculara A L, B M, C N, &c. exponant velocitates ipsis singulorum temporum A B, B C, C D, &c. initiis; erunt (ex Dem.) velocitates illæ in continuâ progressionem geometricâ decrescente. Proinde

ad E P æqualis est rationi E P ad H S, et hæc æqualis rationi H S ad K T. Manifestum autem est (33) curvam L M N S T, ad quam terminantur perpendiculara omnia A L, B M, C N &c. esse logarithmicam.

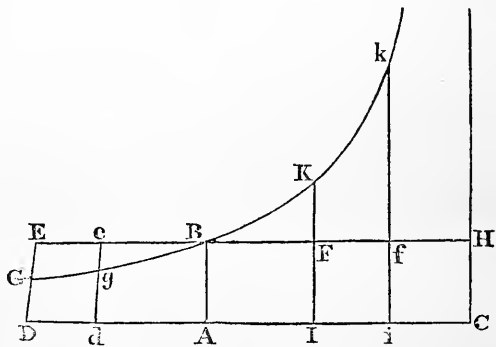
per lineam quamvis datam A C, elapso autem tempore aliquo per lineam indefinitam D C: exponi potest tempus per aream A B G D, et spatium eo tempore descriptum per lineam A D. (f) Nam si area illa per motum puncti D augeatur uniformiter ad modum temporis, decrescet recta D C in ratione geometricâ ad modum velocitatis, et (g) partes rectæ A C æqualibus temporibus descriptæ decrescent in eâdem ratione.



PROPOSITIO III. PROBLEMA I.

Corporis, cui, dum in medio similari rectâ ascendit vel descendit, resistitur in ratione velocitatis, quodque ab uniformi gravitate urgetur, definire motum.

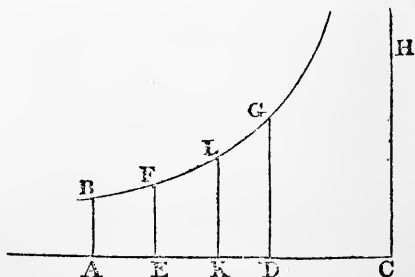
Corpore ascendente, exponatur gravitas per datum quodvis rectangulum B A C H, et resistentia medii initio ascensus per rectangulum B A D E sumptum ad contrarias partes rectæ A B. Asymptotis rectangulis A C, C H, per punctum B describæ.



(f) * Nam si area illa per motum puncti D five ordinatæ D G augeatur uniformiter ad modum temporis, exhibeatque proinde tempus, decrescet recta D C, in ratione geometricâ (380. Lib. I.) ad modum velocitatis, et ideo velocitatem poterit exponere (per Cas. 1. Dem.) et quia recta A C exponit velocitatem ipso motûs initio, et D C, velocitatem residuam elapso tempore A B G D erit A D ut velocitas amissa, atque ideo ut spatium descriptum (per Prop. I. hujus). Quia verò coincidentibus punctis D et C, area A B G D infinita evadit, manifestum est tempore infinito finitum spatium A C describi.

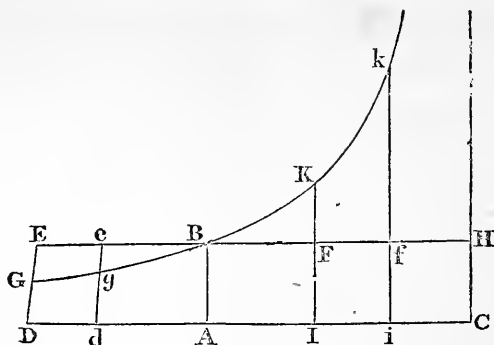
(g) * Et partes rectæ A C æqualibus temporibus descriptæ decrescent in eâdem ratione, &c. Nam si area A B G D ductis ordinatis F E, L K in partes æquales A B F E, E F L K, K L G D divisa sit, erunt lineæ C A, C E, C K, C D in progressionem geometricâ decrescente (380. Lib. I.) hoc est C A : C E = C E : C K = C K : C D, et dividendo

A E : E K = E K : K D = C A : C E. Decrescunt ergo partes rectæ A C in ratione velocitatis. Exponent igitur rectæ A E, E K,



K D, &c., spatia temporibus A B F E, E F L K, K L G D, descripta, et tota rectæ A D spatium toto tempore A B G D descriptum.

tur hyperbola secans perpendiculara D E, d e in G, g; et corpus ascendendo tempore D G g d describet spatium E G g e, tempore D G B A spatium ascensus totius E G B; tempore A B K I spatium descensus B F K, atque tempore I K k i spatium descensus K F f k; et ve-



locitates corporis (resistentiæ medii proportionales) in horum temporum periodis erunt A B E D, A B e d, nulla, A B F I, A B f i respectivè; atque maxima velocitas, quam corpus descendendo potest acquirere, erit B A C H.

(^h) Resolvatur enim rectangulum B A C H in rectangula innumera A k, K l, L m, M n, &c. quæ sint ut incrementa velocitatum æqualibus totidem temporibus facta; et erunt nihil, A k, A l, A m, A n, &c. ut velocitates totæ, atque ideo (per hypothesin) ut resistentiæ medii principio singulorum temporum æqualium. (ⁱ) Fiat A C ad A K vel A B H C ad A B k K ut vis gravitatis ad resistentiam in principio temporis secundi, deque vi gravitatis subducantur resistentiæ, et manebunt A B H C, K k H C, L l H C, M m H C, &c. ut vires absolutæ quibus corpus in principio singulorum temporum urgetur, atque ideo (per Motûs Legem II.) ut incrementa velocitatum, id est, ut rectangula A k, K l, L m, M n, &c. et (^k) propterea (per Lem. I. Lib. II.) in progressionem geometricâ. Quare si rectæ K k, L l, M m, N n, &c. productæ occurrant hyperbolæ in q, r, s, t, &c. erunt areæ A B q K, K q r L, L r s M, M s t N, &c. (^l) æquales, ideóque tum temporibus tum viribus gravitatis semper æqualibus analogæ. (^m) Est autem area A B q K (per Corol. 3. Lem. VII.

(^h) * Resolvatur enim, &c. Demonstratio quæ sequitur est pro corporis descensu.

(ⁱ) * Fiat A C ad A K, &c. Cum enim sit A K k B, proportionalis resistentiæ principio temporis secundi, si fiat A K k B ad A B H C seu A K ad A C, ut resistentia illa ad gravitatem, rectangulum A H exponet vim gravitatis datam; et simili modo, cum sit A l, ad A k, ut resistentia initio temporis tertii ad resistentiam initio temporis secundi, erit, ex æquo perturbatè A l ad A H, seu A L ad A C, ut resistentia in principio temporis tertii ad gravitatem, et ita

deinceps. Quoniam verò gravitas motum corporis cadentis accelerat quem resistentia retardat, de vi gravitatis auferenda est vis resistentiæ ut habeatur vis absoluta quâ corpus deorsum urgetur.

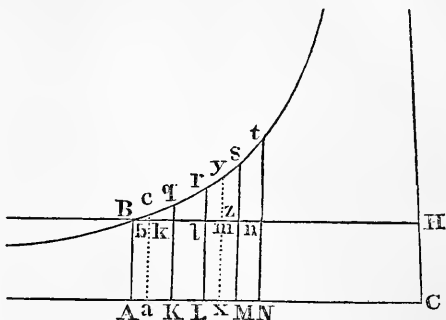
(^k) * Et propterea. Rectangula A B H C, K k H C, L l H C, &c. differentiis suis A k K l, &c., proportionalia, erunt in progressionem geometricâ (per Lem. I. Lib. II.)

(^l) * Æquales. (580) Lib. I.

(^m) Est autem area A B q K (per Corol. 3. Lem. VII. et Lem. VIII. Lib. I.) ad aream

et Lem. VIII. Lib. I.) ad aream $B k q$ ut $K q$ ad $\frac{1}{2} k q$ seu $A C$ ad $\frac{1}{2} A K$, hoc est, ut vis gravitatis ad resistantiam in medio temporis primi.

Et ⁽ⁿ⁾ simili argumento areæ $q K L r$, $r L M s$, $s M N t$, &c. sunt ad areas $q k l r$, $r l m s$, $s m n t$, &c. ut vires gravitatis ad resistantias in medio temporis secundi, tertii, quarti, &c. Proinde cum areæ æquales $B A K q$, $q K L r$, $r L M s$, $s M N t$, &c. sint viribus gravitatis analogæ, erunt areæ $B k q$, $q k l r$, $r l m s$, $s m n t$, &c. resistantiis in mediis singulorum temporum, hoc est (per hypothesin) velocitatibus, atque ^(o) ideo descriptis spatiis analogæ. Sumantur analogarum summæ, et erunt areæ $B k q$, $B l r$, $B m s$, $B n t$, &c. spatiis totis descriptis analogæ; necnon areæ $A B q K$, $A B r L$, $A B s M$, $A B t N$, &c. temporibus. Corpus igitur inter descendendum, tempore quovis $A B r L$, describit spatium $B l r$, et tempore $L r t N$



$B k q$ ut $K q$ ad $\frac{1}{2} k q$ seu ut $A C$ ad $\frac{1}{2} A K$. Etenim per ea Lemmata has areas pro rectilineis sumi posse constat, erigatur in medio partis $A K$ perpendicularis $a c$ ad hyperbolam usque, facile constabit ex elementis trapezium $A B q K$ fore ad triangulum $B k q$ ut tota ea perpendicularis $a c$ (pro quâ $K q$ sumi poterit) ad portionem ejus $b c$ intra triangulum comprehensam, quæ erit (ex const. et 2^a. 6^{ti}. Elem.) $= \frac{1}{2} k q$, est verò ex natura hyperbolæ ea perpendicularis $a c$ ad $A B$, ut $A C$ ad $a c$ sive $A C - \frac{1}{2} A K$ et dividendo, est ea perpendicularis $a c$ ad $a c = a b$ sive $b c$ quæ est $\frac{1}{2} k q$ ut $A C$ ad $A C - A C + \frac{1}{2} A K$ sive $\frac{1}{2} A K$; Ergo area $A B q K$ est ad aream $B q k$ ut $A C$ ad $\frac{1}{2} A K$, sive ut rectangulum $A B C H$ ad rect. $\frac{1}{2} A B k K$, seu ut vis gravitatis quam exponit rectang. $A H$ ad resistantiam in medio temporis primi quam exponit rectang. $A k$, cum enim sit $A K$ ut velocitas toto primo tempore acquisita, erit $\frac{1}{2} A K$ ut velocitas in medio temporis primi acquisita; resistantiæ autem sunt velocitatibus analogæ.

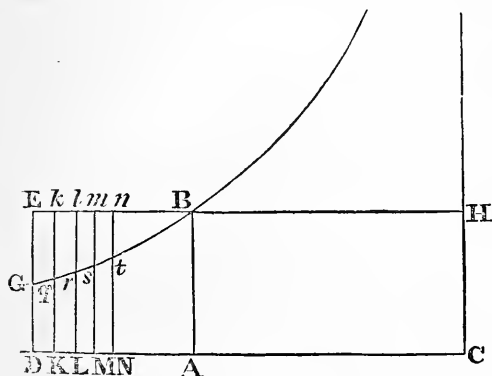
⁽ⁿ⁾ Et simili argumento creæ. Sumptis enim istis areis pro trapeziis rectilineis: ducantur perpendiculares $x z$ y in medio partium $A K$, $K L$, $L M$, $M N$ ad hyperbolam usque, et (ex Elementis) facile constabit quod area tota singuli trapezii (v. gr. $r L M s$) est ad ejus areæ portionem supra $B H$ positam (nempe $r l m s$) ut linea tota $x y$ per medium trapezii ducta ad ejus

partem $z y$ supra $B H$, sed ex naturâ hyperbolæ est ea perpendicularis $x y$ ad $A B$ sive $x z$, ut $A C$ ad abscissam $C x$ illi perpendiculari respondentem (quæ est $C L - \frac{1}{2} L M$), et dividendo, est ea perpendicularis $x y$ ad ejus partem $z y$ supra $B H$, ut $A C$ ad $A x$ portionem abscissæ inter A et eam perpendicularem (hoc est, in exemplo assumpto, ut $A C$ ad $A L + \frac{1}{2} \times L M$). Ergo area tota singuli trapezii ad ejus areæ portionem supra $B H$, ut $A C$ ad $A x$ portionem abscissæ inter A et medium partis cujusvis assumptæ, sive (assumpta communi altitudine $A B$) ut rectangulum $A H$, ad rectangulum sub $A B$ et lineâ inter A et medium partis assumptæ comprehensa; sed illud est ut vis gravitatis, hoc ut velocitas ac proinde ut resistantia in medio temporis cui respondet pars assumpta, ergo alternando, area singuli trapezii est ad vim gravitatis ut portio trapezii supra $B H$ ad resistantiam sive ad velocitatem in medio temporis cui respondet trapezium, sed areæ totæ trapeziorum sunt ubique æquales, et vis gravitatis semper eadem, constans ergo est eorum ratio; ergo, portiones trapeziorum super $B H$, ut $r l m s$ sunt sicut resistantiæ sive ut velocitates, adeoque ut spatia singulis tempusculis quibus respondent descripta.

^(o) * Atquæ ideo descriptis spatiis analogæ. Spatia enim singulis temporibus descripta sunt ut velocitates per Prop. II. bujusce libri.

spatium $r l n t$. Q. e. d. Et (P) similis est demonstratio motûs expositi in ascensu. Q. e. d.

(P) *Et similis est demonstratio.* Resolvatur enim rectangulum $D B$ in rectangula innumera $D k, K l, L m, M n$, &c. quæ sint ut decremента velocitatum æqualibus totidem temporibus facta, et erunt, nihil, $D k, D l, D m, D n$, &c.

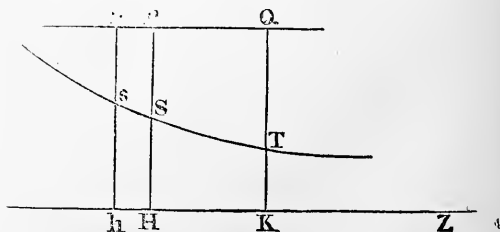


ut velocitates totæ amissæ in principio singulorum temporum æqualium. Quia igitur totum rectangulum $D B$, exponit (per hyp.) velocitatem corporis et resistantiam medii velocitati proportionalem initio ascensus, rectangula $A E, A k, A l, A m, A n$, &c. exponent velocitates residuas, resistantiasque medii initio singulorum temporum æqualium. Fiat $A C$, ad $A K$, sive rectang. $A H$ ad rectang. $A k$, ut vis gravitatis ad resistantiam principio temporis secundi, et vi gravitatis addatur resistantia (quod gravitas et resistantia corporis ascendens motum retardent) et erunt $D E H C, K k H C, L l H C, M m H C$, &c., ut vires absolutæ quibus corpus in principio singulorum temporum retardatur, atque ideo (per Mot. Leg. 2. vel per not. 18.) ut decremента velocitatum, id est, ut rectangula $D k, K l, L m, M n$, &c., et propterea (per Lem. I. Lib. II.) in progressionem geometricâ. Quare si rectæ $K k, L l, M m, N n$, &c., occurrant hyperbolæ in q, r, s, t , &c. erunt areæ $D G q k, k q r l, L r s M, M s t N$, &c. æquales, ideoque tum temporibus, tum viribus gravitatis semper æqualibus analogæ.

Erigatur in medio partis $D K$ perpendicularis usque ad $E B$, erit area $D G q K$ ad aream $G E k q$ ut pars ejus perpendicularis ad hyperbolam ordinata ad ejus partem reliquam usque ad $E B$. sed (per Theor. IV. de Hyperbola) ea ordinata ad hyperbolam est ad $A B$ sive ad totam perpendicularem, ut $A C$ ad ejus ordinatæ abscissam, ideoque dividendo, est ea ordinata ad perpendicularis par-

tem reliquam usque ad lineam $E B$, sive est area $D G q K$ ad aream $G E k q$ ut $A C$ ad portionem abscissæ inter A et perpendicularem, et assumptâ communi altitudine $A B$, ut rectangulum $A H$ ad rectangulum sub $A B$ et portione abscissæ inter A et perpendicularem, ideoque area $D G q K$ ad aream $G E k q$ ut vis gravitatis ad resistantiam sive velocitatem residuam in medio temporis primi, cùmque vis gravitatis sit ubique eadem et areæ $D G q K, q K L r$, ubique æquales, areæ $G E k q, k q r l$, &c. erunt semper ut resistantiæ in singulis temporibus sive ut velocitates, ideoque ut spatia singulis temporibus descripta, ac per consequens areæ totæ $G E n t$, erunt ut spatia toto tempore $G D N t$ descripta, dum areæ $A B N n$ erunt ut velocitates in fine eorum temporum residuæ.

51. Si asymptoto $A Z$ descripta sit logarithmica quævis $L S T$, ad asymptotum versus Z accedens, et ordinata $A L$ exponat velocitatem corporis initio motûs, abscissæque $A H, A K$, exponant tempora; erunt (50) ordinatæ $H S, K T$, ut velocitates residuæ elapsis temporibus $A H, A K$, et ideo ductâ per punctum L rectâ $L Q$, asymptoto $A Z$ parallelâ, et ordinatas productas $H S, K T$ secante in P, Q , erunt $P S, Q T$ ut velocitates amissæ, atque etiam ut spatia descripta, temporibus $A H, A K$, vel $L P, L Q$. Ductâ ordinatâ, $h s$, alteri $H S$, infiniitè propinquâ, spatium velocitate uniformi $A L$, tempusculo $h H$ descriptum in vacuo, erit ad spatium eodem tempore cum velocitate $H S$, confectum in medio resistente, ut rectangulum $H P \times H h$, ad rectangulum $S H \times H h$, seu aream $H S s h$ (12) et ideo si totum tempus $A H$ in particulas innumeras ut $h H$ divisum sit, erit spatium cum velocitate $A L$, in vacuo descriptum toto tempore $A H$, ad spatium eodem tempore percursum in medio resistente ut rec-



tangulum $A P$ ad aream logarithmicam $A L S H$; sed area $A L S H$, æqualis est rectangulo subtangentis logarithmicæ in $P S$, (59) et ideo si

Corol. 1. Igitur velocitas maxima, quam corpus cadendo potest acquirere, est ad velocitatem dato quovis tempore acquisitam, ut vis data gravitatis, quâ corpus illud perpetuò urgetur, ad vim resistantiæ, quâ ⁽¹⁾ in fine temporis illius impeditur.

Corol. 2. Tempore autem aucto in progressionem arithmeticâ, summa velocitatis illius maximæ ac velocitatis in ascensu, atque etiam earundem differentia in descensu ^(r) decrescit in progressionem geometricâ.

Corol. 3. ^(s) Sed et differentię spatiorum, quæ in æqualibus temporum differentiis describuntur, decrescunt in eâdem progressionem geometricâ.

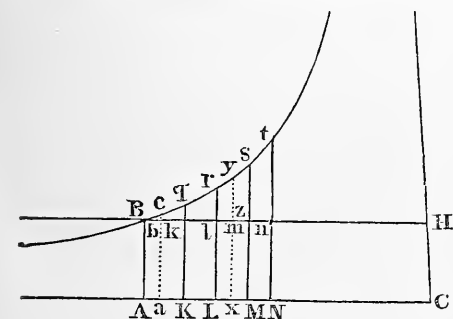
assumpta sit A L subtangenti æqualis, est area A L S H, æqualis rectangulo A L × P S; Quare in hac hypothesi, erit spatium prius ad posterius ut L P, ad P S.

^(q) * In fine temporis illius impeditur. Est enim velocitas dato tempore, A B r L acquisita, ad velocitatem alio quovis tempore A B t N acquisitam, ut rectangulum A l ad rectangulum A n, sive ut linea data A L, ad lineam A N, (ex

Quare tempore aucto in progressionem arithmeticâ, summa velocitatis maximæ ac velocitatis in ascensu residuæ decrescit in progressionem geometricâ. Simili modo in descensu corporis patet quod crescentibus temporibus (vid. fig. notæ super.) A B q K, A B r L, A B s M, &c., in progressionem arithmeticâ, abscissæ C A, C K, C L, C M, &c., decrescunt in progressionem geometricâ (380. Lib. I.), sed abscissæ illæ sunt ut differentię velocitatis maximæ quam exhibet linea A C et velocitatis acquisitæ quam exponit linea A K, vel A L, vel A M, &c., crescente igitur tempore in progressionem arithmeticâ, differentia velocitatis maximæ, et velocitatis dato quovis tempore in descensu acquisitæ, decrescit in progressionem geometricâ. Hinc si summa illa in ascensu et differentia in descensu numeris exprimantur, erunt tempora ut eorum numerorum logarithmi.

^(s) * Sed et differentię spatiorum. Nam si in ascensu corporis capiantur tempora D G q K, K q r L, L r s M, M s t N, &c. (vid. fig. prim. pag. præced.) æqualia, erit spatium primo tempore descriptum ut G E k q = D K × D E — D G q K; spatium tempore secundo descriptum ut q k l r = K L × D E — K q r L (sive quia K q r L = D G q K) = K L × D E — D G q K, et ita de cæteris.

Quare differentia spatiorum primo et secundo tempore descriptorum est ut D K × D E — K L × D E, id est, ob datam D E, ut D K — K L; et simili argumento differentia spatiorum secundi et tertii temporis est ut K L — L M; differentia spatiorum tertii et quarti temporis ut L M — M N. Erunt igitur differentię spatiorum quæ in æqualibus temporum differentiis describuntur ut differentię D K — K L, K L — L M, L M — M N, &c., sed (ex dem.) termini D K, K L, L M, M N, &c., decrescunt ut termini progressionis geometricæ D C, K C, L C, M C, &c. Ergo differentię D K — K L, K L — L M, L M — M N, &c., decrescunt ut D K, K L, L M, M N, &c., seu ut termini progressionis geometricæ D C, K C, L C, M C, &c. Eadem est demonstratio pro descensu.



dem.), et ideò velocitas corporis cadentis cum area A B t N, seu cum tempore continuò crescit. Sed coincidentibus puncto N cum puncto C et ordinatâ N t cum asymptotâ C H, area A B t N infinita evadit, hoc est, tempus fit infinitum et velocitas maxima; Quare velocitas maxima quæ etiam terminalis dicitur, est ad velocitatem dato quovis tempore A B r L, acquisitam ut A C ad A L, seu ut rectangulum A H, ad rectangulum A l, hoc est, (ex dem.) ut vis gravitatis ad vim resistantiæ in fine temporis A B r L.

^(r) * Decrescit in progressionem geometricâ. In ascensu corporis temporibus D G q K, D G r L, D G s M, &c. in arithmeticâ progressionem crescentibus, abscissæ C D, C K, C L, &c. in progressionem geometricâ decrescunt (380. Lib. I.) sed singulæ abscissæ illæ sunt (ex dem.) ut summa velocitatis maximæ quam exponit linea C A, et velocitatis residuæ quam exponit linea A K vel A L, vel A M, &c., in fine temporis D G q K, vel D G r L, vel D G s M, &c.

Corol. 4. Spatium verò a corpore descriptum differentia est duorum spatiorum quorum alterum est ut tempus sumptum ab initio descensus, et (^t) alterum ut velocitas, quæ etiam ipso (^u) descensus initio æquantur inter se.

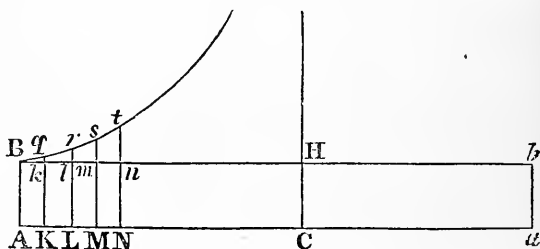
(^t) * *Alterum ut velocitas.* Nam spatium tempore quovis $A B t N$, in descensu descriptum, est ut area $B t n$, est autem area $B t n = A B t N - A B n N$, et est $A B n N$ ut velocitas tempore $A B t N$ acquisita.

(^u) * *Descensus initio æquantur.* Descensus initio est area nascens $A B q K$ æqualis rectangulo $A B k K$.

52. *Scholium.* Ex demonstratis non solum corporis ascendentis aut e quiete descendens motus determinatur, sed etiam motus ejusdem datâ cum velocitate deorsum projecti facillè inveniri potest. Nam velocitas projectionis vel æqualis est velocitati maximæ, quam in figuris superioribus exponit linea $A C$, sive rectangulum $A H$, aut velocitate maximâ minor est, aut eâ major. Si 1^{um}. motus corporis deorsum verticaliter projecti æquabilis est, ob resistantiam gravitati æqualem et contrariam. Si 2^{um}. in lineâ $A C$ (vid. fig. Prop. III.) capiatur $A L$, ad $A C$, ut velocitas projectionis data ad maximam, sive ut resistantia ad gravitatem, et tempore quovis $L r t N$, corpus describet, spatium $l r t n$, et in fine illius temporis habebit velocitatem $L l n N$, eodem modo ac si e quiete cadendo tempore $A B r L$, acquisivisset datam projectionis velocitatem $A B l L$, et deindè in motu perseverasset.

53. Verùm si velocitas projectionis major sit velocitate maximâ quam corpus cadendo acquirere potest, mutanda erit Newtoni constructio. Cæteris enim manentibus ut in constructione pro corporum descensu, producantur rectæ $A C$, et $B H$, ad a et b , ut sit rectangulum $A B b a$ ad rectangulum $C H b a$, ut resistantia tota initio motus ad vim gravitatis: velocitas projectionis exponi poterit per rectangulum $A B b a$, cum resistantia sit ipsi semper proportionalis, et corpus descendendo tempore quovis $A B t N$, describet spatium $A B b a \times A N + C a \times B t n$, et velocitatem habebit $N n b a$, et tempore infinito describet spatium infinitum, velocitatemque habebit æqualem terminali sive maximæ velocitati quam corpus e quiete cadendo

acquirere potest. Resolvatur enim rectangulum $A H$ in rectangula innumera $A k, K l, L m, M n$, &c. quæ sint ut decrementa velocitatum æqualibus totidem temporibus facta. (cùm enim resistantia gravitatem superet, velocitas decrescit) et erunt, nihil, $A k, A l, A m, A n$, &c. ut velocitates amissæ, et ideò rectangula $a B, a k, a l, a m, a n$, &c., ut velocitates residuæ resistantiis proportionales, principio singulorum temporum æqualium. Quoniam verò gravitas motum accelerat quem resistantia retardat, de vi resistantiæ



subducatur gravitas $C H b a$, et manebunt rectangula $A B H C, K k H C, L l H C, M m H C$, &c. ut vires absolutæ quibus corpus in principio singulorum temporum æqualium retardatur, atque ideò ut decrementa velocitatum, id est, ut rectangula $A k, K l, L m, M n$, et propterea per Lem. I. Lib. II. in progressionem geometricâ. Quare (580. Lib. I.) erunt areae $A B q K, K q r L, L r s M, M s t N$, &c. æquales, ideòque temporibus semper æqualibus analogæ. Elapso igitur tempore quovis $A B t N$, corporis velocitas residua erit ut rectangulum $N n b a$, sive ut recta $N a$, sed spatia sunt ut velocitas et tempus conjunctim, ergo spatia singulis tempusculis descripta, sunt ut ea velocitas $N a$ ducta in tempus $M s t N$, id est ut $N C \times t N \times M N + C a \times t N \times M N = A B H C \times M N + C a \times M s t N$, (ob $N C \times t N = A B \times C A$, per Theor. IV. de Hyp.) Quare (componendo) spatium totum tempore $A B t N$ descriptum, erit ut $A B H C \times A N + C a \times A B t N = A B b a \times A N + C a \times B t n$, ob $A B t N = A B \times A N + B t n$. Q. e. d.

Posito quod vis gravitatis in medio aliquo similari uniformis sit, ac tendat perpendiculariter ad planum horizontis; definire motum projectilis in eodem, resistantiam velocitati proportionalem patientis.

[illegible]

(^x) * *Demittatur perpendicularum* PC , et quoniam $D P$ exponit velocitatem projectionis $C P$ exponet velocitatem verticalem, et $D C$ velocitatem horizontalem, per *Leg. Motus Cor. 1. et 2.*

(Y) * *Ut sit D A ad A C ut resistit, &c., aut, quod idem est (per Cor. 1. Prop. III.) ut sit D A ad A C ut velocitas verticalis C P ad velocitatem maximam seu terminalem.*

(²) * *Vel (quod perinde est) ut sit rectangulum, &c.* Nam cum sit DP ad CP ut velocitas tota projectionis ad velocitatem verticalem, ac proinde ex lege resistentiæ ut resistantia tota sub initio ad resistentiam ex motu in altitudinem.

et cùm fit $D A$ ad $A C$ ut resistentia medii ex motu in altitudinem ad vim gravitatis (per hypothesim), erit per compositionem rationum et ex æquo $D A \times D P$ ad $A C \times C P$ ut resistentia tota ex motu projectionis ad vim gravitatis.

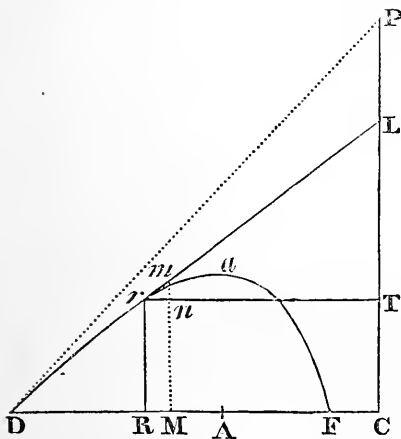
(^a) * *Vel quod perinde est, cape R r aequalem,*
&c. Cùm enim sit (per hyp.) $N : Q B =$
 $D C : C P$, et $D C : C P = D R : R V$, ob
triangula similia $D R V$, $D C P$; erit $N : Q B$
 $= D R : R V$, et ideo $R V = \frac{D R \times Q B}{N}$.

Sed rectangulum $G E I t = G t \times G E =$

Corol. 1. Est igitur Rr æqualis $\frac{DR \times AB}{N} - \frac{RDGT}{N}$: ideóque

si producat $R T$ ad X ^(h) ut sit $R X$ æqualis $\frac{DR \times AB}{N}$; id est, si compleatur parallelogrammum $ACPY$, jungatur DY secans CP in Z , et producat $R T$ donec occurrat DY in X ; erit Xr æqualis $\frac{RDGT}{N}$, et propterea tempori proportionalis.

verticalis, quam exponit recta CP seu f , ad *velocitatem terminalem*; et ideò si velocitas terminalis exponatur per lineam a , habebitur $a = \frac{fg}{e-g}$. Unde fit $y = \frac{ax}{g} - a$. S. $\frac{dx}{e-x}$ et sumptis fluxionibus $d y = \frac{a dx}{g} - \frac{a dx}{e-x}$. Si ponatur RC sive $e-x = z$, erit $-dx = dz$, et $-\frac{a dx}{e-x} = \frac{a dz}{z}$, ideóque $-\frac{a}{e-x} = \frac{a}{z}$.



a. S. $\frac{dz}{z} = a. L. z = a. L. e-x$ (40.) Quare erit $y = \frac{ax}{g} + a. L. e-x + Q$ const. Et quia evanescente y , evanescit quoque x , invenitur constans $Q = -a. L. e$, et hinc $y = \frac{ax}{g} + a. L. e-x - a. L. e = \frac{ax}{g} - a. L. \frac{e}{e-x}$. Est enim $L. e - L. \frac{e}{e-x} = L. \frac{e}{e-x}$, et signis mutatis $L. \frac{e}{e-x} - L. e = -L. \frac{e}{e-x}$.

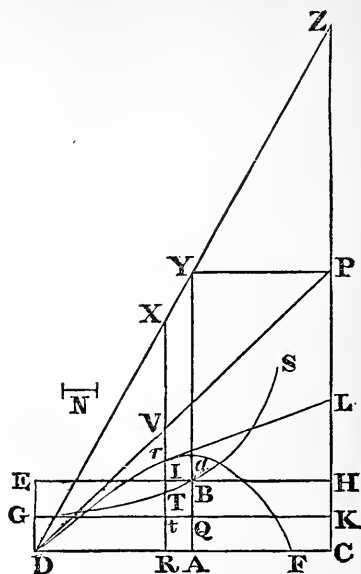
57. Ex hac æquatione alia deducitur inter DV et Vr . Si enim dicantur $DV = v$ et $Vr = z$, erit ob triangula DCP , DRV similia, $DP(b) : DV(v) = DC(e) : DR(x) = \frac{e}{b}$, et ideò $e-x = \frac{eb - ev}{b}$ et $\frac{e}{e-x} = \frac{b}{b-v}$; similiter erit $DC(e) : CP(f) = DR(b) : Vr(z) = \frac{f}{b}$, ideóque $y = Rr = Vr - Vr = \frac{fv}{b} - z$. Quare habebitur $\frac{fv}{b} - z = \frac{aev}{bg} - a. L. \frac{b}{b-v}$, et $z = \frac{fgv - aev}{bg} + a. L. \frac{b}{b-v}$. Sed (ex demonstr.) $a = \frac{fg}{e-g}$, atque ideò $ae - ag = fg$, et $fg - ae = -ag$; quare erit etiam $z = a. L. \frac{b}{b-v} - \frac{av}{b}$.

^(h) * Ut sit $R X$ æqualis $\frac{DR \times AB}{N}$, &c.

Hoc enim facto, erit $R X$ ad DR ut data AB ad datam N , ideóque locus punctorum X linea recta quæ transit per punctum D , ubi evanescente DR evanescit quoque $R X$. Coincidente puncto R cum A fit $R X$ seu $A Y : DA = AB : N$, et (per Theor. IV. de Hyperb.) $DC : AC = AB : GD$ seu AQ ; et divisim $DC : DA = AB : BQ$, per constructionem vero $CP : DC = BQ : N$, ideóque ex æquo $CP : DA = AB : N = AY : DA$, ac proinde $AY = CP$. Unde si compleatur parallelogrammum $ACPY$, jungaturque DY secans CP in Z , erit DZ linea recta quam punctum X perpetuò tangit. Quoniam igitur $R X = \frac{DR \times AB}{N}$, et $Xr = R X - Rr = \frac{DR \times AB}{N} - \frac{DR \times AB + RDGT}{N}$; erit $Xr = \frac{RDGT}{N}$, et propterea, ob datam N , Xr est ut area $RDGT$, ideóque ut tempus quo corpus ex loco D pervenit in locum r .

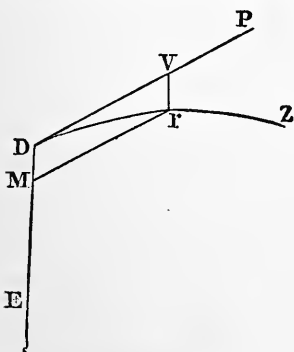
$DP \times DA$, datur tum resistentia medii sub initio motus, tum latus rectum parabolæ: ⁽¹⁾ et inde datur etiam velocitas sub initio motus. Deinde ex longitudine tangentis rL , datur et huic proportionalis velocitas, et velocitati proportionalis resistentia in loco quovis r .

Corol. 6. Cum autem longitudo $2 \times DP$ sit ad latus rectum parabolæ ut gravitas ad resistentiam in D ; et ex auctâ velocitate augeatur resistentia in eâdem ratione, ⁽²⁾ at latus rectum parabolæ augeatur in ratione illâ duplicatâ: ⁽³⁾ patet longitudinem $2 DP$ augeri in ratione illâ simplici, ideóque velocitati semper proportionalem esse, neque ex angulo CDP mutato augeri vel minui, nisi mutetur quoque velocitas.



sistentiam totam sub motus initio, dabitur resistentia, ob datam gravitatem (per Hyp.); et quia $CP \times AC$ est ad $DP \times DA$ ut $2 DP$ ad latus rectum parabolæ (per Cor. 5.), dabitur illud latus rectum.

⁽¹⁾ * 63. Et inde datur etiam velocitas sub initio motus. Nam dato latere recto parabolæ $D r Z$, quam grave in medio non resistente



describit, et datâ positione tangentis DP cum diametro DE , parabola describi potest; datur autem in singulis locis velocitas corporis gravis parabolam datam describentis: Sit enim abscissa

DM verticali $V r$ æqualis et parallela, et ordinata $M r$ etiam æqualis et parallela tangenti $D V$; datur tum velocitas quam corpus grave e puncto V cadendo per altitudinem datam $V r$ habet in r , tum tempus quo altitudinem illam describit, et hinc datur tempus idem quo motu uniformi describit spatium datum $D V$ (40. Lib. I.), ideóque datur velocitas uniformis per tangentem DP , quæ est ipsa velocitas projectionis in D .

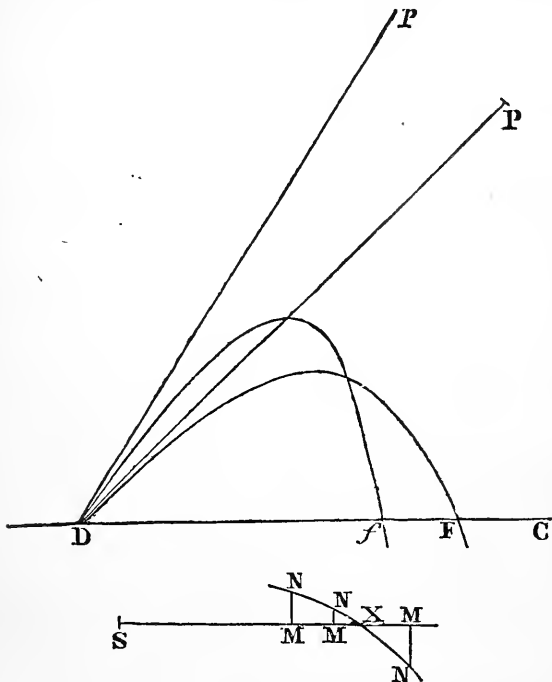
⁽²⁾ * At latus rectum parabolæ augeatur. Nam cum velocitas secundum tangentem $D V$ uniformis supponatur (40. Lib. I.); Si, dato tempore quo describitur $D V$, velocitas illa crescat, crescat $D V$ in eadem ratione, manente spatio verticali $V r$ hoc eodem tempore dato descripto; sed latus rectum parabolæ $D r Z$ est $\frac{D V^2}{V r}$ (per Cor. 5.) et quantitas $\frac{D V^2}{V r}$ manente $V r$, crescit ut $D V^2$. Quare latus rectum parabolæ $D r Z$ augeatur in ratione duplicatâ velocitatis.

⁽³⁾ * Patet longitudinem $2 DP$, &c. Gravitas dicatur G , resistentia initio motus R , latus rectum parabolæ, ut supra, $\frac{D V^2}{V r}$; et erit $2 DP$:

$$\frac{D V^2}{V r} = G : R, \text{ ideóque } 2 DP = \frac{G \times D V^2}{R \times V r},$$

hoc est, datis $V r$ et G , $2 DP$ est ut $\frac{D V^2}{R}$, et quia R est ut velocitas, seu ut $D V$, erit etiam

Corol. 7. Unde liquet methodus determinandi curvam $D r a F$ ex phænomenis quamproximè, et inde colligendi resistantiam et velocitatem quâcum corpus projicitur. Projiciantur corpora duo similia et æqualia



eâdem cum velocitate, de loco D , secundum angulos diversos CDP , CDp et cognoscantur loca F , f , ubi incidunt in horizontale planu $n DC$. Tum, assumptâ quâcumque longitudine pro DP vel Dp , fingatur quod resistantia in D sit ad gravitatem in ratione quâlibet, et exponatur ratio illa per longitudinem quamvis SM . (⁷) Deinde per computationem, ex longitudine illâ assumptâ DP , inveniantur longitudines DF , Df , ac de

$2 DP$ ut DV , sive ut velocitas (per notam superiorem).

(⁷) 64. *Deinde per computationem.* Datâ enim DP longitudine et positione, dantur CP et DC , et datâ ratione resistantiæ in D ad gravitatem dantur DA et AC per constructionem problematis istius: His autem datis, curva $D r a F$ (vide figuras superiores) describi potest, et hinc invenitur amplitudo horizontalis DF constructione per hyperbolam vel per logarithmicam (59.) Si autem rem voluerimus calculo

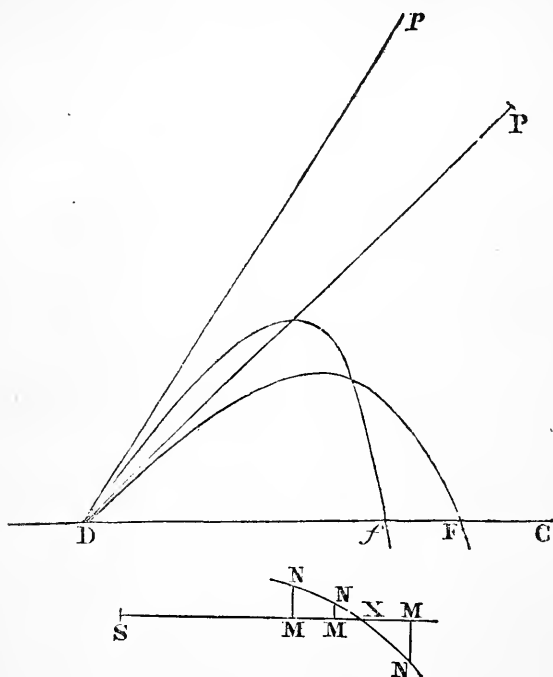
tractare, uti poterimus æquatione $y = \frac{ax}{g} -$

a. $L. \frac{e}{e-x}$ (63) in qua ut sit $x = DF$, po-

nenda est $y = 0$, et æquatio fiet $\frac{ax}{g} =$

$L. \frac{e}{e-x}$, ex quâ per regressum serierum, vel per alias approximationes inveniatur x per g et e , seu DF per AC et DC .

ratione $\frac{Ff}{Df}$ per calculum inventâ, ^(z) auferatur ratio eadem per experimentum inventa, et exponatur differentia per perpendicularum MN. Idem



fac iterum ac tertio, assumendo semper novam resistantiæ ad gravitatem rationem SM, et colligendo novam differentiam MN. Ducantur autem differentiæ affirmativæ ad unam partem rectæ SM, et negativæ ad alteram; et per puncta N, N, N agatur curva regularis NNNN secans rectam SM M M in X, ^(a) et erit SX vera ratio resistantiæ ad gravitatem,

^(z) 65. *Auferatur ratio eadem per experimentum inventa; et si nihil est residui, recte assumpta fuit ratio resistantiæ ad gravitatem; si quid residui fuerit, exponatur differentia per MN. Nam si recte assumpta fuit ratio resistantiæ ad gravitatem, curva DraF per constructionem vel per computationem descripta similis est trajectoriæ quam corpus in medio resistente reverâ describit, et hinc homologarum in illis curvis linearum debet esse ratio data. Determinatur enim trajectoria vera ex velocitate et angulo projectionis æquali PDC vel pDC, atque ex ratione resistantiæ ad gravitatem datam; et curva per constructionem delineata determinatur per longitu-*

dinem assumptam DP vel Dp, quæ velocitatem datam semper potest exhibere, per angulum PDC vel pDC, et per rationem linearum DA, AC, seu rationem resistantiæ ad gravitatem, si recte assumpta fuit: quare differentia tota inter veram trajectoriam et curvam hoc modo per constructionem descriptam est in magnitudine linearum homologarum, quarum ratio est eadem in utràque curvâ. Curvæ igitur illæ similes sunt.

^(a) 66. *Et erit SX vera ratio resistantiæ ad gravitatem. Nam ubi MN seu differentia ratio-*

tionum $\frac{Ff}{Df}$ quæ per computationem et per experimentum inventæ sunt, nulla est, ratio re-

quam invenire oportuit. (b) Ex hac ratione colligenda est longitudo D F per calculum; et longitudo quæ sit ad assumptam longitudinem D P, ut longitudo D F per experimentum cognita ad longitudinem D P modo inventam, erit vera longitudo D P. Quâ inventâ, habetur tum curva linea D r a F quam corpus describit, tum corporis velocitas et resistentia in locis singulis.

Scholium.

Cæterum, resistentiam corporum esse in ratione velocitatis, (†) hypothesis est magis mathematica quam naturalis. In mediis, quæ rigore omni vacant, resistentiæ corporum sunt in duplicatâ ratione velocitatum. (c) Etenim actione corporis velocioris communicatur eidem medii quantitati, tempore minore, motus major in ratione majoris velocitatis; ideoque tempore æquali, ob majorem medii quantitatem perturbatam, communicatur motus in duplicatâ ratione major; estque resistentia (per Motûs

sistentiæ ad gravitatem recte assumpta fuit (65). Quare cum S M assumptam illam rationem exponat, et evanescat M N ubi S M fit S X, patet in hoc casu rationem resistentiæ ad gravitatem recte exponi per lineam S X. Itaque si innumeræ abscissæ S M assumptæ fuissent, et innumeræ ordinatæ N M per experimenta determinatæ, curva quam punctum N perpetuò tangit, rationem accuratam resistentiæ ad gravitatem determinaret per ejus intersectionem X cum lineâ S M; ideoque si multa fiunt tentamina, sicque plura obtineantur puncta N, et per ea ducatur curva regularis N N X N, illa quam proxime punctum X quæsitum determinabit; methodum autem ducendi curvam regularem per plura puncta data mox in Scholio sumus tradituri.

(b)*Ex hac ratione colligenda est, &c. Sit, exempli causâ, ratio assumpta resistentiæ ad gravitatem 1 ad 10, seu $S M = \frac{1}{10}$; inventa autem sit $S X = 2 S M = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$; erit resistentia ad gravitatem ut 1 ad 5. Ex hac ratione et assumptâ longitudine D P colligenda est longitudo D F seu amplitudo jactûs (64); et quoniam inventâ verâ ratione resistentiæ ad gravitatem, trajectory per calculum vel per constructionem inventa similis est trajectory quam corpus in medio resistente, reverâ describit (65), erit amplitudo D F per calculum inventa ad amplitudinem D F per experimentum cognitam, ut assumpta longitudo D P ad veram longitudinem D P pro trajectory in medio resistente descriptâ. Hâc autem longitudine inventâ, habetur (per Cor. 4.) tum curva linea D r a F quam corpus reipsâ describit, tum corporis velocitas et resistentia in locis singulis (per Cor. 5.)

F f 4

(†) 67. Ex supra demonstratis determinari possent motus corporis in medio quod resistit partim uniformiter, partim in ratione velocitatis. Et quidem si corpus solâ vi insitâ in hoc medio feratur, pars illa resistentiæ quæ est uniformis, tanquam vis constans gravitatis quâ corporis ascendenti motus retardatur, consideranda est, et in superioribus constructionibus pro corporis ascensu, non gravitas, sed ea resistentia uniformis data per lineam A C, vel per rectangulum A H exponi debet. Si vero corpus in prædicto medio vi gravitatis etiam urgeatur, linea A C gravitatem et resistentiæ partem uniformem simul junctas, si corpus ascendit, et excessum gravitatis supra eam resistentiæ partem uniformem, si corpus descendit, exponet. Qua ratione cæteris manentibus, determinabuntur motus corporis tum solâ vi insitâ moti, tum vi gravitatis urgente ascendenti et descendenti in medio quod resistit partim in ratione datâ, partim in ratione velocitatis, tum etiam corporis projecti.

(c) Etenim actione, &c. Hæc patent per demonstrata (8).

68. *Scholium.* Ex æquatione ad curvam D r a F, quam (57) invenimus, deducitur hujus curvæ per logarithmicam satis elegans constructio, quâ usi sunt Varignonius et Hermannus. Eam hic exponemus breviter. Deinde cum in superioris propositionis Corollario ultimo et alibi postea describenda sit curva regularis quæ per data puncta transeat, hoc problema, quod Newtonus in Epistolâ ad Oldenburgum anno 1676. datâ unum fere ex pulcherrimis dici quod solvere desideraverit, solvemus.

in problematis 55, 58 et 61. adhibuit. Hæc sunt ipsius verba: Cum curva non datur specie, sed determinanda proponitur, possisque pro arbitrio æquationem fingere quæ naturam ejus generaliter contineat, et hanc pro eâ designandâ tanquam si daretur assumere, ut ex ejus assumptione quomodocumque perveniat ad æquationes ex quibus assumpta tandem determinetur. Si itaque curva generis dati per data puncta delineanda sit, assumatur generalis ad curvam illam æquatio cum terminorum coefficientibus indeterminatis, et curvâ ad rectam aliquam positione datam relatâ, ex singulis punctis datis in rectam illam demittantur perpendicularares aut rectæ aliæ inter se parallelæ, quæ datæ erunt ut et earum abscissæ a dato in rectâ illâ puncto computatæ; deinde in assumptâ æquatione loco abscissæ variabilis x et ordinatæ etiam variabilis y scribantur abscissæ et ordinatæ per puncta data determinatæ, et tot inde obtinebuntur æquationes quot sunt puncta data per quæ curva transire debet, atque ex illis æquationibus, generalis æquationis assumptæ coefficientes determinabuntur. Hujus methodi exemplum sit solutio Lemmatis V. Lib.

III. Principiorum, quod ita propositum est: invenire curvam generis parabolici quæ per data quocumque puncta transibit; cujus Lemmatis solutionem dedit ibidem Newtonus, sed sine demonstratione quæ tamen ex ejusdem auctoris differentiali methodo collegi potest.

76. I. Sunto puncta illa A, B, C, D, E, F, &c. et ab iisdem ad rectam quamvis positione datam H N demittantur perpendiculara quocumque A H, B I, C K, D L, E M, F N, &c.; positisque abscissâ variabili H S = x , et ordinatâ R S = y , assumatur generalis ad parabolam A B D E F æquatio $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 +$, &c., sintque A, B, C, D, E, &c. cum suis signis indeterminatæ. Dicantur A H = a , B I = f , C K = g , D L = h , E M = $-k$, et H I = l , H K = m , H L = n , H M = t , &c. Ponantur 1^o . $y = a$ et $x = 0$; 2^o . $y = f$, et $x = l$; 3^o . $y = g$ et $x = m$; 4^o . $y = h$, et $x = n$; 5^o . $y = -k$, et $x = t$ atque ita deinceps; et loco y et x seorsim substituantur hi valores in æquatione generali assumptâ, quæ in hæc mutabitur:

II. $a = A$

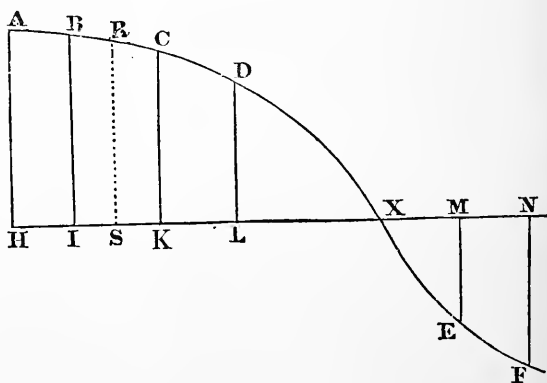
$$\begin{aligned} f &= A + B l + C l^2 + D l^3 + E l^4 +, \&c. \\ g &= A + B m + C m^2 + D m^3 + E m^4 +, \&c. \\ h &= A + B n + C n^2 + D n^3 + E n^4 +, \&c. \\ -k &= A + B t + C t^2 + D t^3 + E t^4 +, \&c. \end{aligned}$$

Subducantur æquationes inferiores ex superioribus, nimirum secunda ex primâ, tertia ex

secundâ, et ita deinceps. Differentia primæ ac secundæ ordinatæ per primum intervallum H I divisa dicatur b , id est, $b = \frac{a-f}{l}$; secundæ ac tertiæ differentia per secundum intervallum I K divisa dicatur $2b$, id est, $2b = \frac{f-g}{m-l}$, et ita de cæteris. Prodibunt æquationes sequentes.

$$\begin{aligned} \text{III. } b &= \frac{a-f}{l} = -B - Cl - D l^2 - E l^3 \\ 2b &= \frac{f-g}{m-l} = -B - Cl - Cm - D l^2 - D l m - D m^2 - E l^3 - E l^2 m - E l m^2 - E m^3 \\ 3b &= \frac{g-h}{n-m} = -B - Cm - Cn - D m^2 - D m n - D n^2 - E m^3 - E m^2 n - E m n^2 - E n^3 \\ 4b &= \frac{h+k}{t-n} = -B - Cn - Ct - D n^2 - D n t - D t^2 - E n^3 - E n^2 t - E n t^2 - E t^3. \end{aligned}$$

Simili modo capiantur adhuc æquationum istarum differentiæ, et dividantur per intervallum



inter duas ordinatas interceptum H K, I L, K M, et differentiæ sic divisæ dicantur c , $2c$, $3c$, ut hic factum videtur.

$$\begin{aligned} \text{IV. } c &= \frac{b-2b}{m} = C + D l + D m + E l^2 + E l m + E m^2. \\ 2c &= \frac{2b-3b}{n-l} = C + D l + D m + D n + E l^2 + E l m + E m^2 + E l n + E m n + E n^2. \\ 3c &= \frac{3b-4b}{t-m} = C + D m + D n + D t + E m^2 + E m n + E n^2 + E m t + E n t + E t^2. \end{aligned}$$

Harum æquationum differentia per intervalla trium ordinatarum H L, I M, divisæ dicantur d , $2d$, et erunt æquationes.

$$V. d = \frac{c-2c}{n} = -D - E l - E m - E n$$

$$2 d = \frac{2c-3c}{t-1} = -D - E l - E m - E n - E t$$

Harum tandem æquationum differentia per intervallum quatuor ordinarum H M divisa dicatur e, et erit

$$VI. e = \frac{d-2d}{t} = E.$$

Si plura fuissent puncta data, pluresque ideo fuissent æquationes, eodem modo pergendum esset usque ad differentiam ultimam: quæ hic est differentia quarta, et sic tandem pervenitur ad valorem coefficientis ultimi termini æquationis generalis assumptæ, et deinde retrogrediendo inveniuntur valores aliarum coefficientium D, C, B, et A hoc modo.

VII. Quoniam $e = E$, et (V) $d = -D - E l - E m - E n$, erit $D = -d - e l - e m - e n$; et quia (IV.) est $c = C + D l + D m + E l^2 + E l m + E m^2$ ideoque $C = c - D l - D m - E l^2 - E l m - E m^2$ si loco E et D substituantur eorum valores modo inventi, habebitur $C = c + d l + d m + e l m + e n l + e m n$. Et simili modo si in æquatione (III.) $b = -B - C l - D l^2 - E l^3$, substituantur coefficientium E, D, C valores, inveniatur $B = -b - c l - d l m - e l m n$.

VIII. Cum igitur sit (II.) $A = a$, æquatio assumpta $y = A + B x + C x^2 + D x^3 + E x^4$, in hanc abit $y = a - x. (b + c l + d l m + e l m n) + x^2. (c + d l + d m + e l m + e n l + e m n) - x^3. (d + e l + e m + e n) + x^4 = a - b x - c l x + c x^2 - d l m x + d l x^2 + d m x^2 - d x^3 - e l m n x + e l m x^2 + e n l x^2 + e m n x^2 - e l x^2 - e m x^3 - e n x^3 + e x^4$, seu $y = a + b. (-x) + c. (-x \times l - x) + d. (-x \times l - x \times m - x \times n - x) + e. (-x \times l - x \times m - x \times n - x)$, &c. In quâ æquatione patet terminorum progressus, et quomodo datâ abscissâ H S seu x inveniri compendiosè possit correspondens ordinata S R seu y. Nam si dicantur $-x$ seu $-H S = p$; $-I S \times p$, seu $-x \times l - x = q$; $+ S K \times q$, seu $-x \times l - x \times m - x = r$; $+ S L \times r$, seu $-x \times l - x \times m - x \times n - x = s$, ita scilicet pergendo ad usque perpendiculum penultimum, quod hic est D L; erit R S seu $y = a + b p + c q + d r + e s$, &c.

IX. Atque hæc ipsa est regula quam Newtonus casu secundo Lemmatis V. Lib. III. sic tradit: collige perpendiculorum A H, B I, C K, &c. differentias primas per intervalla perpendiculorum divisas b, 2 b, 3 b, 4 b, &c.; secundas per intervalla bina divisas c, 2 c, 3 c, 4 c, &c.; tertiis per intervalla ternaria divisas d, 2 d, 3 d, &c.; quartas per intervalla quaternaria

divisas e, 2 e, &c. Et sic deinceps. Inventis differentiis, dic A H = a, $-H S = p$, p in $-I S = q$, q in $+ S K = r$, r in $+ S L = s$, pergendo scilicet ad usque perpendiculum penultimum. Et erit ordinatim applicata R S = a + b p + c q + d r + e s, &c. ubi observandum est, præponenda esse signa negativa terminis H S, I S, &c. qui jacent ad partes puncti S versus A, et signa affirmativa terminis S K, S L, &c. qui jacent ad alteras partes puncti S.

X. Per hanc igitur regulam, assumptâ quâlibet abscissâ H S, invenietur valor ordinatæ correspondentis S R, singulaque parabolæ puncta determinabuntur. Si vero in æquatione ponatur $y = 0$, et deinde quæatur valor abscissæ x, cognoscetur punctum X quo parabola rectam H N intersecat.

77. XI. Si perpendiculorum H A, I B, K C, L D, &c. æqualia sunt intervalla H I, I K, K L, &c.; cæteris ut supra (I) nominibus servatis, positoque intervallo H I = l = 1, erunt H K = m = 2, H L = n = 3, H M = t = 4, &c. et perpendiculorum differentiæ per intervalla, per intervalla bina, ternaria, quaternaria, et divisæ erunt (III., IV., V., VI.) quæ secuntur.

Differentiæ primæ per intervalla divisæ, $b = a - f$, $2 b = f - g$, $3 b = g - h$, $4 b = h + k$.

Differentiæ secundæ per intervalla bina divisæ, $c = \frac{a-2f+g}{2}$, $2 c = \frac{f-2g+h}{2}$, $3 c = \frac{g-2h+k}{2}$.

Differentiæ tertiæ per intervalla ternaria divisæ, $d = \frac{a-3f+3g-h}{6}$, $2 d = \frac{f-5g+3h+k}{6}$.

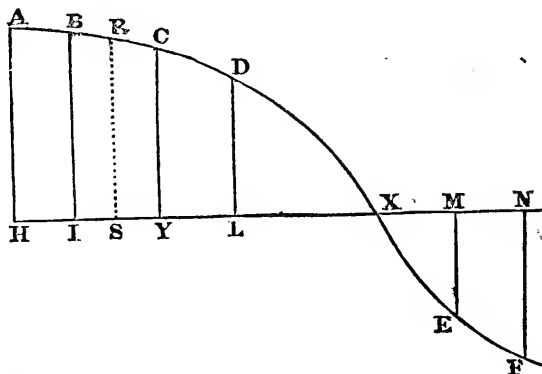
Differentiæ quartæ per intervalla quaternaria divisæ, $e = \frac{a-4f+6g-4h+k}{24}$.

XII. Ponantur $a - f = \beta$, $a - 2f + g = \alpha$, $a - 3f + 3g - h = \delta$, $a - 4f + 6g - 4h + k = \epsilon$; et erit $b = \beta$, $c = \frac{\alpha}{2}$,

$d = \frac{\delta}{6}$, $e = \frac{\epsilon}{24}$. Quare si hi valores substituantur in æquatione supra (VIII.) inventa, $y = a + b. (-x) + c. (-x \times l - x) + d. (-x \times l - x \times m - x) + e. (-x \times l - x \times m - x \times n - x) + \dots$, &c., illa in hanc mutabitur $y = a + \beta (-x) + \frac{\alpha}{2} (-x \times l - x) + \frac{\delta}{6} (-x \times l - x \times m - x) + \frac{\epsilon}{24} (-x \times l - x \times m - x \times n - x) + \dots$, &c.

Quapropter si in hac ultimâ æquatione dicantur $-H S$, seu $-x = p$; $\frac{1}{2} p$ in $-I S$, seu $\frac{-x \times 1 - x}{2} = q$; $\frac{1}{3} q$ in $+S K$, seu

mum, erit $y = a + \beta p + \kappa q + \delta r + \epsilon s + \dots$ ut Newtonus in casu primo Lemmatis V. Lib. III. determinavit. De hoc problemate lector consulat clarissimos auctores, Herman-



$$\frac{-x \times 1 - x \times 2 - x}{2 \times 3} = r; \frac{1}{4} r \text{ in } +S L,$$

$$\text{seu } \frac{-x \times 1 - x \times 2 - x \times 3 - x}{2 \times 3 \times 4} = s; \text{ et}$$

ita pergatur ad usque perpendiculum penult-

num in Appendice ad Phoronomiam, Craigium in Tractatu de Calculo Fluentium, maxime vero Stirling in libro de interpolatione serierum, in quo totam hanc materiam copiosè et sagaciter explicat.

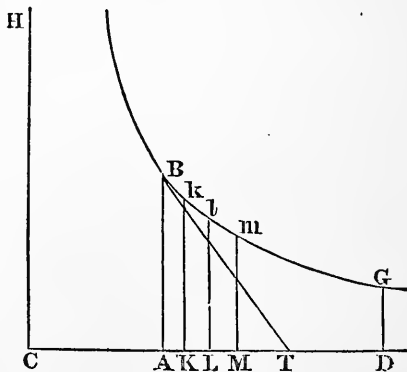
SECTIO II.

De motu corporum quibus resistitur in duplicatâ ratione velocitatum.

PROPOSITIO V. THEOREMA III.

Si corpori resistitur in velocitatis ratione duplicatâ, et idem solâ vi insitâ per medium simile movetur; tempora verò sumantur in progressionem geometricâ a minoribus terminis ad majores pergente: dico quod velocitates initio singulorum temporum sunt in eâdem progressionem geometricâ inversè; et quod spatia sunt æqualia, quæ singulis temporibus describuntur.

Nam quoniam quadrato velocitatis proportionalis est resistentia medii, ^(d) et resistentiæ proportionale est decrementum velocitatis; si tempus in particulas innumeras æquales dividatur, quadrata velocitatum singulis temporum initiis erunt velocitatum earundem differentiis proportionalia. Sunto temporis particulæ illæ $AK, KL, LM, \&c.$ in rectâ CD sumptæ, et erigantur perpendicularia $AB, Kk, Ll, Mm, \&c.$ hyperbolæ $BklmG$, centro C asymptotis rectangulis CD, CH descriptæ, occurrentia in $B, k, l, m, \&c.$ ^(e) et erit AB ad Kk ut CK ad CA , et divisim $AB - Kk$ ad Kk ut AK ad CA , et vicissim $AB - Kk$ ad AK ut Kk ad CA , ideóque ut $AB \times Kk$ ad $AB \times CA$. ^(f) Unde, cum AK et $AB \times CA$ dentur, erit $AB - Kk$ ut



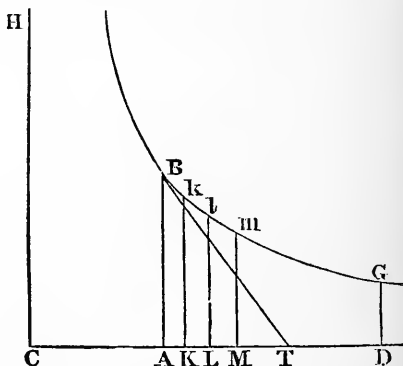
^(d) * Et resistentiæ proportionale est decrementum velocitatis; dato nempe temporis momento, (1. 15.).

^(e) * Et erit AB ad Kk ut CK ad CA , (per Theor. IV. de Hyp.).

^(f) * Unde, cum AK , et $AB \times CA$ dentur. AK quidem (ex Hyp. tempus enim in particulas innumeras æquales dividitur quæ per lineas æquales $AK, KL, \&c.$ exponuntur) et $AB \times CA$ (per Theor. IV. de Hyp.).

$A B \times K k$; et ultimo, ubi coëunt $A B$ et $K k$, ut $A B q$. Et simili argumento erunt $K k - L l$, $L l - M m$, &c. ut $K k$ quad. $L l$ quad. &c. Linearum igitur $A B$, $K k$, $L l$, $M m$ quadrata sunt ut earundem differentiarum; et idcirco cum quadrata velocitatum fuerint etiam ut ipsarum differentiarum, ^(g) similis erit ambarum progressio.

^(h) Quo demonstrato, consequens est etiam ut areae his lineis descriptae sint in progressionem consimili cum spatiis quae velocitatibus describuntur. Ergo si velocitas initio primi temporis $A K$ exponatur per lineam $A B$, et velocitas initio secundi $K L$ per lineam $K k$, et longitudo primo tempore descripta per aream $A K k B$; velocitates omnes sub-



sequentes exponentur per lineas subsequentes $L l$, $M m$, &c. et longitudo descripta per areas $K l$, $L m$, &c. Et compositè, si tempus totum exponatur per summam partium suarum $A M$, longitudo tota descripta exponetur per summam partium suarum $A M m B$. Concipe jam tempus $A M$ ita dividi in partes $A K$, $K L$, $L M$, &c. ut sint $C A$, $C K$, $C L$, $C M$, &c. in progressionem geometricam; ⁽ⁱ⁾ et erunt partes illae in eadem progressionem, ^(k) et velocitates $A B$, $K k$, $L l$, $M m$, &c. in progressionem eadem inversam, ^(l) atque spatia descripta $A k$, $K l$, $L m$, &c. aequalia. Q. e. d.

Corol. 1. Patet ergo quod, si tempus exponatur per asymptoti partem quamvis $A D$, et velocitas in principio temporis per ordinatim applicatam $A B$; velocitas in fine temporis exponetur per ordinatam $D G$, et spatium totum descriptum per aream hyperbolicam adjacentem $A B G D$;

^(g) * *Similis erit ambarum progressio*; et ideo velocitates singulis temporum aequalium $A K$, $K L$, $L M$, &c. initiis exponi possunt per lineas $A B$, $K k$, $L l$, &c.

^(h) * *Quo demonstrato, consequens est ut areae* $A B k K$, $K k l L$, $L l m M$, &c. *sint in progressionem consimili cum spatiis quae velocitatibus* $A B$, $K k$, $L l$, &c., *tempusculis* $A K$, $K L$, $L M$, &c., *describuntur* (14).

⁽ⁱ⁾ 78. * *Et erunt partes illae* $A K$, $K L$, $L M$, &c. *quae sunt differentiae linearum* $C A$, $C K$, $C L$, $C M$, &c. *in eadem progressionem*. Differentiae enim cujusvis progressionis geome-

tricae, sunt in eadem progressionem geometricam. Nam cum sit $C A : C K = C K : C L = C L : C M$, &c., erit auferendo antecedentia ex antecedentibus et consequentia ex consequentibus $C A : C K = A K : K L = K L : L M$, &c.

^(k) * *Et velocitates* $A B$, $K k$, $L l$, $M m$, &c., *in progressionem eadem inversam*. Siquidem (per Theor. IV. de Hyp.) est $A B$ ut $C A$ inversè, $K k$ ut $C K$ inversè.

^(l) * *Atque spatia descripta*, $A B k K$, $K k l L$, $L l m M$, &c., *aequalia* (380. Lib. I.)

neon spatium, quod corpus aliquod eodem tempore A D, velocitate primâ A B, in medio non resistente describere posset, ^(m) per rectangulum A B \times A D.

Corol. 2. Unde datur spatium in medio resistente descriptum, capiendô illud ad spatium quod velocitate uniformi A B in medio non resistente simul describi posset, ut est area hyperbolica A B G D ad rectangulum A B \times A D.

Corol. 3. Datur etiam resistentia medii, statuendo eam ipso motûs initio æqualem esse vi uniformi centripetæ, quæ in cadente corpore, tempore A C, in medio non resistente, generare posset velocitatem A B. Nam si ducatur B T quæ tangat hyperbolam in B, et occurrat asymptoto in T; ⁽ⁿ⁾ recta A T æqualis erit ipsi A C, ^(o) et tempus exponet, quo resistentia prima uniformiter continuata tollere posset velocitatem totam A B.

Corol. 4. ^(p) Et inde datur etiam proportio hujus resistentiæ ad vim gravitatis, aliamve quamvis datam vim centripetam.

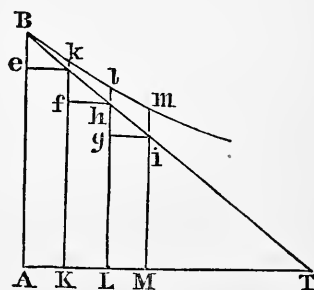
^(m) 79. * Per rectangulum A B \times A D. Si enim velocitas A B, manet eadem, tempore A K, describet corpus spatium A B \times A K, dum in medio resistente describit spatium A B k K, tempore K L velocitate A B describet spatium A B \times K L, dum in medio resistente describit spatium K k l L, et ita deinceps (14. Lib. I.); quare tempore A M velocitate primâ A B in medio non resistente describet corpus spatium A B \times (A K + K L + L M) = A B \times A M; et tempore A D, spatium A B \times A D. Et quoniam ipso motûs initio, est area A B k K, æqualis rectangulo A B \times K k, atque spatia in medio resistente et in medio non resistente descripta temporis momento A K, sunt etiam æqualia, liquet spatium in medio resistente descriptum tempore quovis A D, esse ad spatium eodem tempore in medio non resistente descriptum velocitate A B, ut est area hyperbolica A B G D ad rectangulum A B \times A D.

80. Ex Corollario primo sequitur tempore infinito spatium infinitum describi in medio quod resistit in ratione quadrati velocitatis. Non enim evanescet G D, hoc est velocitas tota extincta non erit, nisi infinita evadat recta A D, hoc est nisi tempus motus sit infinitum, tuncque infinita fit area A B G D, seu spatium descriptum est infinitum.

⁽ⁿ⁾ * Recta A T æqualis erit ipsi A C. (Per Theor. I. de Hyp.)

^(o) * Et tempus exponet. Ordinatæ K k, L l, M m, &c. rectæ B T, occurrant in k, h, i, &c. ex punctis k, h, i, demissa sint ad A B, K k, L l, &c. perpendiculara K e, h f, i g, &c. et sumptis temporibus quam minimis A K, K L, L M, æqualibus erunt B e, k f, h g æquales, sed resistentia prima temporis momento A K, tollit velocitatem A B — K k, seu B e, et ea-

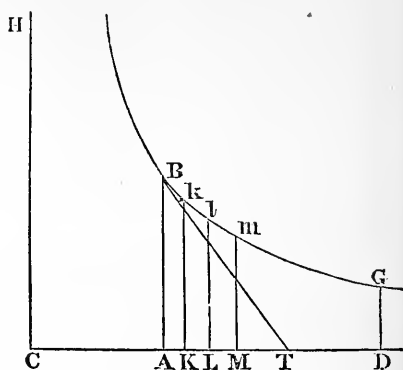
dem uniformiter continuata temporis momento K L, sive A K, tolleret etiam velocitatem k f = B e, et temporis momento L M, seu A K, velocitatem g h = B e, atquæ ita deinceps; quare resistentia prima uniformiter continuata tempore A T tolleret velocitatem totam A B,



quia A B æqualis est omnibus differentiis B e, k f, g h, &c. usque ad T; vis autem centripeta quæ tempore A K, producit velocitatem B e, æqualis est vi quæ eodem temporis momento eandem velocitatem B e extinguit, seu æqualis est resistentiæ primæ, et illa vis centripeta uniformis manens toto tempore A T, totam velocitatem A B, produceret, quam resistentia prima uniformis manens eodem tempore extingueret; ergo resistentia prima æqualis est vi uniformi centripetæ quæ in cadente corpore, tempore A T sive A C, in medio non resistente generare posset velocitatem A B.

^(p) * Et inde datur etiam proportio. Sunt enim vires centripetæ uniformes ut velocitates

Corol. 5. Et vice versâ, si datur proportio resistantiæ ad datam quamvis vim centripetam; (†) datur tempus AC , quo vis centripeta resistantiæ æqualis generare possit velocitatem quamvis AB : et inde datur punctum B per quod hyperbola asymptotis CH , CD , describi debet; ⁽⁹⁾ ut et spatium $ABGD$, quod corpus incipiendo motum suum cum velocitate illâ AB , tempore quovis AD , in medio



similari resistente describere potest.

quas dato tempore producant (13. Lib. I.) et ideò erit resistantia prima ad gravitatem ut velocitas quam producit vis centripeta uniformis cui resistantia illa æqualis supponi potest, ad velocitatem quam vis gravitatis eodem tempore generat.

(†) *Datur tempus AC quo vis resistantiæ æqualis generare possit velocitatem AB .* Si enim datur vis quædam centripeta, dabitur tempus quo velocitatem AB generare potest: tempora autem quibus diversæ vires centripetæ eandem velocitatem generare possunt, sunt inversè ut illæ vires; ergo si datur ratio vis centripetæ cui resistantia est æqualis ad aliam vim datam, dabitur ratio temporis quo hæc vis velocitatem AB generare potest ad tempus quo vis cui resistantia est æqualis eam velocitatem generat, hoc est datur tempus AC .

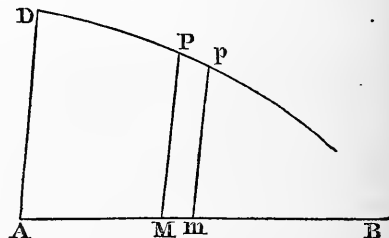
⁽⁹⁾ * *Ut et spatium $ABGD$.* His enim datis, datur tùm area $ABGD$, tùm rectangulum $AB \times AD$, tùm spatium quod corpus tempore AD , cum datâ velocitate uniformi AB , describeret in medio non resistente, ideòque cum sit $AB \times AD$, ad $ABGD$, ut spatium tempore AD et velocitate AB in medio non resistente descriptum ad spatium eodem tempore descriptum in medio resistente (per Cor. 2.) hoc spatium dabitur.

81. *Scholium.* Hujus propositionis constructio ad logarithmicam reduci facile posset, sed id relinquimus lectoris arbitrio, generalis problematis quod sequitur, solutionem analyticam tradituri ut inventionis fons ipse aperiat.

PROBLEMA.

82. Definire motum corporis solâ vi insitâ lati in medio quod resistit in ratione compositâ ex simplici ratione densitatis medii, et quâvis ratione multiplicatâ celeritatis mobilis.

E loco A egrediaturs corpus cum velocitate datâ c et tempore t describat rectam $AM = s$, sitque ejus velocitas in $M = v$ densitas medii in eodem loco $= k$, et resistantia r erit (17.) $r ds = -v dv$. Ponatur resistantia $r = \frac{k v^n}{a^n}$, sitque a quantitas data, et habebitur $\frac{k v^n ds}{a^n} = -v dv$, et hinc $k ds = -z^n v^{1-n} dv$. Per punctum M , erigatur ad AM , perpendicularum MP quod exponat medii densitatem k in



loco M , sitque DP p curva quam punctum P perpetuò tangit, et erecto altero perpendicularo mp priori MP infinitè propinquo ut sit $Mm = ds$, erit elementum $M'p m = k ds = -a^n v^{1-n} dv$, sumptisque fluentibus, area $ADPM = \frac{Q - a^n v^{2-n}}{2-n}$; quia verò evanescente areâ $ADPM$, evanescit quoque s , et fit $v = c$, erit $o = \frac{Q - a^n c^{2-n}}{2-n}$, et ideò constans $Q = a^n c^{2-n}$, atque itâ $ADPM = \frac{a^n c^{2-n} - a^n v^{2-n}}{2-n}$. Porro si densitas k , seu $P M$, est ut functio quævis spatii de-

scripti s sive A M, poterit curva D P p describi, ac proinde in hac hypothesis dato spatio descripto, dabitur per quadraturam areæ A D P M, velocitas, et contrà datâ velocitate dabitur area A D P M, et hinc dabitur spatium descriptum A M, indè etiam (14. Lib. I.) datâ velocitate aut spatio dabitur tempus t, et contrà.

83. Si $n = 2$, fit $2 - n = 0$, et ideò resu-

menda est æquatio $M P p m = -a^n v^{1-n}$

$d v = -\frac{a^2 d v}{v}$, quæ, sumptis fluentibus, abit

in hanc $A D P M = Q - a^2 L. v$, et quia

positâ areâ A D P M = 0, fit $v = c$, erit Q

$= a^2 L. c$, ideòque $A D P M = a^2 L. c -$

$a^2 L. v = a^2 L. \frac{c}{v}$. Sit $A D P M = b$, lo-

garithmus numeri $h = 1$, seu $L. h = 1$, erit

$b L. h = a^2 L. \frac{c}{v}$, et $\frac{b}{a^2} \times L. h = L. \frac{c}{v}$,

seu $L. h^{\frac{b}{a^2}} = L. \frac{c}{v}$, ac proinde $h^{\frac{b}{a^2}} = \frac{c}{v}$, et

$v = \frac{c}{h^{\frac{b}{a^2}}}$. Quarè dato spatio, dabitur velocitas

et hinc dabitur tempus (14) et contrà.

84. Sit densitas uniformis seu $k = 1$, erit $k d s$

$= d s = -a^n v^{1-n} d v$, sumptisque fluentibus

$s = \frac{Q - a^n v^{2-n}}{2-n} = \frac{a^n c^{2-n} - a^n v^{2-n}}{2-n}$. Un-

dè reperitur $v = \frac{[a^n c^{2-n} + \frac{1}{(n-2)s}]^{\frac{1}{2-n}}}{a^{\frac{2-n}{n}}}$.

Invenitur tempus per formulam $d t = \frac{d s}{v} =$

$-\frac{a^n v^{1-n} d v}{v} = a^n v^{-n} d v$. Et sum-

ptis fluentibus, fit $t = \frac{Q - a^n v^{1-n}}{1-n} =$

$\frac{a^n c^{1-n} - a^n v^{1-n}}{1-n}$, quia posito $t = 0$, fit v

$= c$, et proinde $Q = a^n c^{1-n}$.

85. Si $k = 1$, et $n = 1$, hoc est, si densitas

est uniformis et resistentia ut velocitas erit (84)

$s = a c - a v$; et quia (ibid.) $d t = -a^n v^{-n}$

$d v = -\frac{a d v}{v}$, erit $t = Q - a L. v = a L. c$

$- a L. v = a L. \frac{c}{v}$, quod posito tempore

$t = 0$, fiat $v = c$ et proinde $Q = a L. c$.

86. Si $k = 1$, et $n = 2$, erit (84) $t =$

$\frac{a^2 c - a^2 v}{c v}$, et quia (ibid.) $d s = -a^n v^{1-n} d v$

$= -\frac{a^2 d v}{v}$, erit $s = Q - a^2 L. v = a^2 \times$

$L. c - a^2 L. v = a^2 L. \frac{c}{v}$.

87. Si in æquatione spatii et velocitatis supra

inventâ, velocitas v , supponatur = 0, erit $s =$

$\frac{a^n c^{2-n}}{2-n}$, si n est numerus binario minor, at

erit $s = \frac{a^n c^{n-2} - a^n v^{n-2}}{(n-2)c^{n-2}v^{n-2}} = \frac{a^n}{(n-2)0} =$

∞ , si n est numerus binario major; et (86) erit

$s = a^2 L. \frac{c}{0} = \infty$, ubi $n = 2$. Quarè si n est

numerus positivus binario minor, descripto spa-

tio aliquo finito velocitas omnis extinguitur; at

si n binario æqualis est vel major, spatium infi-

nitum conficitur, priusquam velocitas evanescat.

88. Si in æquationibus temporis et velocitatis

velocitas v evadat = 0, erit (84) $t = \frac{a^n c^{1-n}}{1-n}$,

si n est numerus unitate minor, at erit $t = \infty$,

si n est unitate major, et (85) $t = a L. \frac{c}{0} =$

∞ , ubi $n = 1$. Quapropter si numerus positi-

vus n est unitate minor, velocitas tempore finito

extinguitur, spatio etiam finito descripto (87).

Si n est unitati æqualis vel ipsâ major, velocitas

nonnisi tempore infinito extingui potest, et spa-

tium finitum est, si n est numerus binario minor,

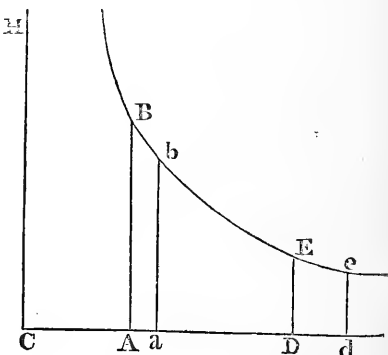
infinitum verò, si n binario æqualis vel major

(87.).

PROPOSITIO VI. THEOREMA IV.

Corpora sphaerica homogenea et æqualia, resistantiis in duplicatâ ratione velocitatum impedita, et solis viribus insitis incitata, temporibus quæ sunt reciprocè ut velocitates sub initio, describunt semper æqualia spatia, et amittunt partes velocitatum proportionales totis.

Asymptotis rectangulis CD , CH descriptâ hyperbolâ quâvis BbE e secante perpendiculari AB , ab , DE , de , in B , b , E , e , (^r) exponantur velocitates initiales per perpendiculari AB , DE , et tempora per lineas Aa , Dd . Est ergo ut Aa ad Dd ita (per hypothesin) DE ad AB , et ita (^t) (ex naturâ hyperbolæ) CA ad CD ; et componendo, ita Ca ad Cd . (^u) Ergo areæ



$ABba$, $DEed$, hoc est, spatia descripta æquantur inter se, et velocitates primæ AB , DE sunt ultimis ab , de , et propterea dividendo partibus etiam suis amissis $AB - ab$, $DE - de$ proportionales. Q. e. d.

PROPOSITIO VII. THEOREMA V.

Corpora sphaerica quibus resistitur in duplicatâ ratione velocitatum, temporibus, quæ sunt ut motus primi directè et resistantiæ primæ inversè, amittunt partes motuum proportionales totis, et spatia descripta temporibus istis et velocitatibus primis conjunctim proportionalia.

(^x) Namque motuum partes amissæ sunt ut resistantiæ et tempora conjunctim. Igitur ut partes illæ sint totis proportionales, debet resistantia et tempus conjunctim esse ut motus. Proinde tempus erit ut motus

(^r) * Exponantur velocitates initiales, &c. Cum enim corpora duo similia homogenea et æqualia supponantur, eorum motus considerari possunt tanquam motus unius ejusdemque corporis variis celeritatis gradibus acti (ut in Prop. V.) ideoque (per Corol. 1. Prop. V.) velocitates initiales exponi possunt per lineas AB , DE , tempora per lineas Aa , Dd , velocitates

in fine illorum temporum residuæ per lineas ab , de , et spatia his temporibus descripta per areas hyperbolicas $ABba$, $DEed$.

(^t) * Ex naturâ hyperbolæ. (Per Theor. IV. de Hyperb.)

(^u) * Ergo areæ $ABba$, $DEed$, (378. Lib. I.)

(^x) * Namque motuum partes amissæ, &c. (2.)

directè et resistentia inversè. Quare temporum particulis in eâ ratione sumptis, corpora amittent semper particulas motuum proportionales totis, (7) ideòque retinebunt velocitates velocitatibus suis primis semper proportionales. (2) Et ob datam velocitatum rationem, describent semper spatia, quæ sunt ut velocitates primæ et tempora conjunctim. Q. e. d.

(a) *Corol. 1.* Igitur si æquivelocibus corporibus resistitur in duplicatâ ratione diametrorum: globi homogenei quibuscunque cum velocitatibus moti, describendo spatia diametris suis proportionalia, amittent partes motuum proportionales totis. Motus enim globi cujusque erit ut ejus velocitas et massa conjunctim, id est, ut velocitas et cubus diametri; resistentia (per hypothesin) erit ut quadratum diametri et quadratum velocitatis conjunctim; et tempus (per hanc Propositionem) est in ratione priore directè et ratione posteriore inversè, id est, ut diameter directè et velocitas inversè; ideòque spatium, tempori et velocitati proportionale, est ut diameter.

(b) *Corol. 2.* Si æquivelocibus corporibus resistitur in ratione sesquiplicatâ diametrorum: globi homogenei quibuscunque cum velocitatibus moti, describendo spatia in sesquiplicatâ ratione diametrorum, amittent partes motuum proportionales totis.

(7) * *Idèòque retinebunt velocitates in ratione primâ, ob datas corporum massas (6. Lib. I.)*

(2) * *Et ob datam velocitatum rationem (12.)*

89. Tota propositionis hujus demonstratio per analysim hoc modo exponitur. Sit globi cujusvis massa m , velocitas data initio motûs c , in fine temporis t sit v , resistentia data initio motûs r , et quia ejusdem corporis resistentiæ in diversis locis sunt ut velocitatum quadrata (per Hyp.) erit c , ad v v , ut r , ad resistentiam elapso tempore t , quæ proindè erit $\frac{r v v}{c c}$. Sed (2) resistentia

$\frac{r v v}{c c}$ est ut motûs decrementum $-m d v$ directè, et temporis momentum $d t$, inversè, hoc est, $\frac{r v v}{c c} = -\frac{m d v}{d t}$, et hinc $d t = -\frac{m c d v}{r v v}$,

sumptisque fluentibus $t = Q + \frac{m c c}{r v}$. Pona-

tur $t = 0$, et fiet $v = c$, adeòque $Q = -\frac{m c}{r}$, quo valore substituto fit $t = \frac{m c c - m c v}{r v}$.

Capiatur tempus t , ut motus primus $m c$, directè et resistentia prima r , inversè, hoc est t ut $\frac{m c}{r}$,

et erit $\frac{m c}{r}$ ut $\frac{m c c - m c v}{r v}$, ideòque $m c v$, ut

$m c c - m c v$, et dividendo per c , $m v$ ut $m c$

$-m v$; et compositè fiet $m c$, ut $m c - m v$, id est, motus amissus $m c - m v$ ut motus primus $m c$; et hinc ob datam massam m , erit etiam c , ut $c - v$, id est, velocitas amissa $c - v$, ut velocitas prima c ; indè etiam erit c , ad $c - c + v$, seu v , hoc est velocitas prima c , ad residuam v , in ratione datâ. Jam si spatium tempore t descriptum dicatur s , erit (15) $d s = v d t$, et quia v est ut data c , erit $d s$ ut $c d t$, sumptisque fluentibus ob datam c , fiet s ut $c t$. Q. e. d.

90. Quoniam spatium s est ut $c t$, et t ut $\frac{m c}{r}$,

erit etiam s ut $\frac{m c c}{r}$; globi cujus massa m dia-

meter sit D , et datâ globi densitate erit massa m ,

ut volumen (2. Lib. I.) hoc est r ut D^3 , et proindè velocitate non datâ, resistentia r , ut

datâ velocitate c , resistentia r est ut diametri D ,

dignitas cujus index n , hoc est r ut D^n , et proindè velocitate non datâ, resistentia r , ut

$D^n c c$, erit s ut $\frac{D^3 c c}{D^n c c}$, seu ut D^{3-n} . Ex

quibus patent Corollaria quæ sequuntur.

(a) * *Corol. 1.* Nam in hypothesi Corollarii hujus est $n = 2$, adeòque s ut D .

(b) * *Corol. 2.* In hypothesi Corollarii hujus est $n = \frac{5}{2}$, ideòque s ut $D^{3-\frac{5}{2}}$, seu ut $D^{\frac{1}{2}}$

Corol. 3. Et universaliter, si æquivelocibus corporibus resistitur in ratione dignitatis cujuscunque diametrorum: spatia quibus globi homogenei, quibuscunque cum velocitatibus moti, amittent partes motuum proportionales totis, erunt ut cubi diametrorum ad dignitatem illam applicati. Sinto diametri D et E ; et si resistentiæ, ubi velocitates æquales ponuntur, sint ut D^n et E^n : spatia quibus globi, quibuscunque cum velocitatibus moti, amittent partes motuum proportionales totis, erunt ut D^{3-n} et E^{3-n} . Et propterea globi homogenei describendo spatia ipsis D^{3-n} et E^{3-n} proportionalia, retinebunt velocitates in eâdem ratione ad invicem ac sub initio.

(c) *Corol. 4.* Quod si globi non sint homogenei, spatium a globo densiore descriptum augeri debet in ratione densitatis. Motus enim, sub pari velocitate, major est in ratione densitatis, et tempus (per hanc Propositionem) augetur in ratione motus directè, ac spatium descriptum in ratione temporis.

(d) *Corol. 5.* Et si globi moveantur in mediis diversis; spatium in medio, quod cæteris paribus magis resistit, diminuendum erit in ratione majoris resistentiæ. Tempus enim (per hanc Propositionem) diminuetur in ratione resistentiæ auctæ, et spatium in ratione temporis.

(e) LEMMA II.

Momentum genitæ æquatur momentis laterum singulorum generantium in eorundem laterum indices dignitatum et coëfficientia continuè ductis.

Genitam voco quantitatem omnem, quæ ex lateribus vel terminis quibuscunque in arithmetica per multiplicationem, divisionem, et extractionem radicum; in geometriâ per inventionem vel contentorum et laterum, vel extremarum et mediarum proportionalium, sine additione et subductione generatur. Ejusmodi quantitates sunt facti, quoti, radices, rectangula, quadrata, cubi, latera quadrata, latera cubica, et similes. Has quantitates,

(c) * *Corol. 4.* Sit globi m densitas δ , adeoque (2 Lib. I.) massa m ut δD^3 , et hinc (90) s ut $\frac{\delta D^3 c c}{r}$. Quare si ponatur resistentia r , ut $D^n c c$, erit s ut δD^{3-n} , hoc est, spatium s , quod datâ densitate δ , erat ut D^{3-n} , augeri debet in ratione densitatis δ .

(d) * *Corol. 5.* Resistentia r , quæ antè erat ut $D^n c c$, augeatur in ratione quavis a , seu sit r

ut $a D^n c c$, et quia s est ut $\frac{\delta D^3 c c}{r}$, (Cor. 4.) fiet s ut $\frac{\delta D^3 c c}{a D^n c c}$, seu ut $\frac{\delta D^{3-n}}{a}$, spatium igitur diminuendum est in ratione majoris resistentiæ.

(e) * *Lem. II.* Totum istud Lemma num. 137. et sequentibus Lib. I. fusè expositum videat lector.

ut indeterminatas et instabiles, et quasi motu fluxuve perpetuo crescentes vel decrescentes, hic considero; et earum incrementa vel decrementa momentanea sub nomine momentorum intelligo: ita ut incrementa pro momentis additiis seu affirmativis, ac decrementa pro subductitiis seu negativis habeantur. Cave tamen intellexeris particulas finitas. Particulæ finitæ non sunt momenta, sed quantitates ipsæ ex momentis genitæ. Intelligenda sunt principia jamjam nascentia finitarum magnitudinum. Neque enim spectatur in hoc Lemmate magnitudo momentorum: sed prima nascentium proportio. Eodem recidit si loco momentorum usurpentur vel velocitates incrementorum ac decrementorum (quas etiam motus, mutationes et fluxiones quantitatum nominare licet) vel finitæ quævis quantitates velocitatibus hisce proportionales. (f) Lateris autem cuiusque generantis coëfficiens est quantitas, quæ oritur applicando genitam ad hoc latus.

Igitur sensus (g) Lemmatis est, ut, si quantitatum quarumcunque perpetuo motu crescentium vel decrescentium A, B, C , &c. momenta, vel his proportionales mutationum velocitates dicantur a, b, c , &c. momentum vel mutatio geniti rectanguli AB fuerit $aB + bA$, et geniti contenti ABC momentum fuerit $aBC + bAC + cAB$: et genitarum dignitatum $A^2, A^3, A^4, A^{\frac{1}{2}}, A^{\frac{3}{2}}, A^{\frac{1}{3}}, A^{\frac{2}{3}}, A^{-1}, A^{-2}$, et $A^{-\frac{1}{2}}$ momenta $2aA, 3aA^2, 4aA^3, \frac{1}{2}aA^{-\frac{1}{2}}, \frac{3}{2}aA^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{3}aA^{-\frac{2}{3}}, \frac{2}{3}aA^{-\frac{1}{3}}, -aA^{-2}, -2aA^{-3}$, et $-\frac{1}{2}aA^{-\frac{3}{2}}$ respectivè. Et generaliter, ut dignitatis cujuscunque $A^{\frac{n}{m}}$ momentum fuerit $\frac{n}{m}aA^{\frac{n-m}{m}}$. Item ut genitæ A^2B momentum fuerit $2aAB + bA^2$; et genitæ $A^3B^4C^2$ momentum $3aA^2B^4C^2 + 4bA^3B^3C^2 + 2cA^3B^4C$; et genitæ $\frac{A^3}{B^2}$ sive A^3B^{-2} momentum $3aA^2B^{-2} - 2bA^3B^{-3}$: et sic in cæteris. Demonstratur vero Lemma in hunc modum.

Cas. 1. Rectangulum quodvis motu perpetuo auctum AB , ubi de la-

(f) *Lateris autem.* Sic lateris x , in quantitate genitæ $x^n y^m$ positi, coëfficiens est $\frac{x^n y^m}{x}$, seu $x^{n-1} y^m$.

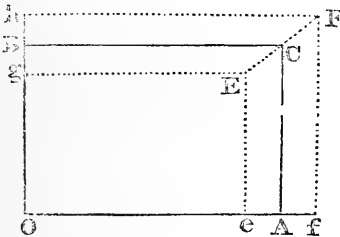
(g) * *Sensus Lemmatis est, ut, si quantitatum A, B, C momenta dicantur a, b, c , ita ut dùm A fit $A + a$, B evadat $B + b$, C evadat $C + c$, &c., momentum vel mutatio geniti rectanguli AB , erit $aB + bA$, &c. vel si loco litterarum A, B, C , &c. utamur litteris minusculis x, y, z ,*

&c. quibus variabiles quantitates consuevimus significare, et loco a, b, c , &c. scribamus $d x, d y, d z$, &c. sensus Lemmatis est momentum seu fluxionem rectanguli xy , esse $y dx + x dy$, fluxionem solidi xyz , esse $yz dx + xz dy + xy dz$, et genitarum quantitatum $x^2, x^3, x^4, x^{\frac{1}{2}},$ &c. momenta esse $2x dx, 3x^2 dx, 4x^3 dx, \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} dx$, &c. respectivè; et genitæ $x^n y^m$, momentum esse, $n y^m x^{n-1} dx + m x^n y^{m-1} dy$, &c.

teribus A et B deerant momentorum dimidia $\frac{1}{2} a$ et $\frac{1}{2} b$, fuit $A - \frac{1}{2} a$ in $B - \frac{1}{2} b$, seu $A B - \frac{1}{2} a B - \frac{1}{2} b A + \frac{1}{4} a b$; et quam primum latera A et B alteris momentorum dimidiis aucta sunt, evadit $A + \frac{1}{2} a$ in $B + \frac{1}{2} b$ seu $A B + \frac{1}{2} a B + \frac{1}{2} b A + \frac{1}{4} a b$. De hoc rectangulo subducatur rectangulum prius, ^(b) et manebit excessus $a B + b A$. Igitur laterum

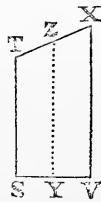
^(b) * Et manebit excessus $a B + b A$.

^{1^{us}}. Casus. Sit rectangulum O A B C sub duabus variabilibus O A, O B continuè crescentibus; sumantur hinc inde ab A partes æquales A e, A f, et à B partes æquales B g, B h, ita ut, si a et b sint quantitates momentis linearum O A, O B proportionales sit e f = a, et g h = b: Compleantur rectangula



O g E e. O h F f, ducatur F E, quæ transibit per C punctum concursus linearum A' C, B C (ob parallelas, et lineas e f et g h similiter, nempe bifariam, sectas in A et B). Dico quod summa trapeziorum E F f e et E F h g æqualis erit momento rectanguli O A C B; obtinetur verò trapeziorum summa, sumendo differentiam rectangulorum O e E G, O f F H, quæ est O f \times O h - O e \times O g, sive $\frac{O A + A f \times O B + B h - O A - A e \times O B - B g}{et vocando O A, A; O B, B; A f = A e = \frac{1}{2} a, B h = B g = \frac{1}{2} b}$ differentia rect. erit $A + \frac{1}{2} a \times B + \frac{1}{2} b - A - \frac{1}{2} a \times B - \frac{1}{2} b = A B + \frac{1}{2} a B + \frac{1}{2} b A + \frac{1}{4} a b - A B + \frac{1}{2} a B + \frac{1}{2} b A - \frac{1}{4} a b = a B + b A$.

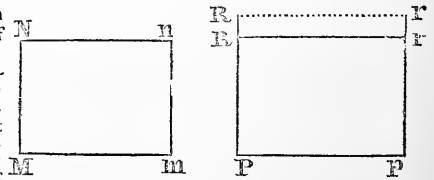
Ut verò probeetur summam trapeziorum E F f e et E F h g æqualem esse momento rectanguli O A C B, observandum primò. Quòd si lineæ quævis S T, V X, utcumque inæquales, in lineam S V sint perpendiculares jungaturque T X, et in medio lineæ S V erigatur perpendicularis Y Z, erit trapezium S T X V æquale rectangulo S V \times Y Z: itaque trapezium E F f e erit æquale rectangulo A C \times e f, et trapezium E F h g æquale rectangulo B C \times g h. Præterea quoniam e f et g h sunt



momentis linearum O A, O B proportionales, hoc est, proportionales velocitatibus quibus lineæ O A, O B crescent, sive, quod idem est, celeritatibus quibus, dum rectangulum O A C B crescit, lineæ A C, B C antorsorum feruntur, rectangula A C \times e f et B C \times g h, erunt ut lineæ illæ A C, B C et earum velocitates conjunctim.

Mutatio autem geniti rectanguli O A C B proportionalis est causæ quæ eam producit, ea autem causa est motus linearum variabilium A C, B C quo antorsum feruntur dum lineæ O A, O B crescent, et quamvis dum illæ lineæ A C, B C moventur, interim lineæ O A, O B crescant, incrementi hujus nulla habenda est ratio dum rectanguli fluxionem sive incrementum nascentis consideramus, etenim in ipso hujus incrementi nascentis ortu illæ productiones linearum O A, O B nihil planè sunt, et cum primum sunt aliquid jam aliæ A C, B C prioribus majores assumuntur, ergo momentum rectanguli O A C B sive ejus mutationis momentanea causa, ex lineis A C et B C et velocitatibus quibuscum feruntur, determinanda est.

Sint verò rectangula M N n m, P R r p, quorum lineæ M N, P R sint æquales, concipiantur aliæ lineæ bisce etiam æquales quæ ab M N et P R profectæ motu uniformi et paral-



lelo secundum lineas M m et P p ferantur, ita ut eodem tempore ad m n et p r perveniant, manifestum est (per l. 6^{ta} Elem.) areas M n, P r fore ut lineæ M m, P p, et pariter velocitates linearum ab M N et P R profectarum in eadem fore ratione ideòque areas M n, P r, fore in ratione earum velocitatum. Quod si lineæ N M, P R sint inæquales, aræ erunt ut lineæ illæ M N, P R et earum velocitates conjunctim, et quævis incrementa rectangulorum N M n m, P R r p æquali tempore facta in eadem ratione erunt, ideòque et nascentia incrementa erunt in eâ ratione. Unde tandem sequitur quod incrementum rectanguli O A C B ex motu lineæ A C natum, est ut illa linea A C et ejus velo-

incrementis totis a et b generatur rectanguli incrementum $a B + b A$.
Q. e. d.

Cas. 2. Ponatur $A B$ semper æquale G , et contenti $A B C$ seu $G C$ momentum (per Cas. 1.) erit $g C + c G$, id est (si pro G et g scribantur $A B$ et $a B + b A$) $a B C + b A C + c A B$. Et par est ratio contenti sub lateribus quocunque. Q. e. d.

Cas. 3. Ponatur latera A, B, C sibi mutuo semper æqualia; et ipsius A^2 , id est rectanguli $A B$, momentum $a B + b A$ erit $2 a A$, ipsius autem A^3 , id est contenti $A B C$, momentum $a B C + b A C + c A B$ erit $3 a A^2$. Et eodem argumento momentum dignitatis cujuscunque A^n est $n a A^{n-1}$. Q. e. d.

Cas. 4. Unde cum $\frac{1}{A}$ in A sit 1, momentum ipsius $\frac{1}{A}$ ductum in A , unâ cum $\frac{1}{A}$ ducto in a , (i) erit momentum ipsius 1, id est, nihil. Proinde momentum ipsius $\frac{1}{A}$ seu ipsius A^{-1} est $-\frac{a}{A^2}$. Et generaliter cum $\frac{1}{A^n}$ in A^n sit 1, momentum ipsius $\frac{1}{A^n}$ ductum in A^n unâ cum $\frac{1}{A^n}$ in $n a A^{n-1}$ erit nihil. Et propterea momentum ipsius $\frac{1}{A^n}$ seu A^{-n} erit $-\frac{n a}{A^{n+1}}$. Q. e. d.

Cas. 5. Et cum $A^{\frac{1}{2}}$ in $A^{\frac{1}{2}}$ sit A , momentum ipsius $A^{\frac{1}{2}}$ ductum in $2 A^{\frac{1}{2}}$ erit a , per Cas. 3: ideoque momentum ipsius $A^{\frac{1}{2}}$ erit $\frac{a}{2 A^{\frac{1}{2}}}$ sive

citâ conjunctim, et quod incrementum ejusdem rectanguli $O A C B$ ex motu lineæ $B C$ natum, est ut illa lineæ $B C$ et ejus velocitas conjunctim, ideoque totum momentum rectanguli $O A C B$ est summa factorum linearum $A C$ et $B C$ per velocitates quibus feruntur respectivè ductarum, ideoque ut summa rectangulorum $A C \times e f$ et $B C \times g h$, sive denique ut summa trapeziorum $E F f e$, $E F h g$. Q. e. d.

2^{us}. Casus. Facillè hæc applicantur ad eos casus ubi vel ambæ lineæ $O A$, $O B$ decrescunt, vel unâ crescente altera decrescit, quippe varianda sunt solummodo signa juxta has hypotheses.

Vide aliam hujus casus demonstrationem (num. 160. Lib. I.)

(i) * Erit momentum ipsius 1, id est nihil.

Ponatur enim $\frac{1}{A} = B$ et erit $\frac{1}{A} \times A = A B$

$= 1$, sed momentum rectanguli $A B$ est $a B + b A$ (per Cas. 1.) et momentum constantis 1 nullum est; quare erit $a B + b A = 0$, et hinc $b A = -a B = -\frac{a}{A}$, undè momentum

b ipsius B seu $\frac{1}{A}$ est $b = -\frac{a}{A^2} = -a A^{-2}$.

Similiter si ponatur $\frac{1}{A^n} = B$, et ideò $\frac{1}{A^n} \times A^n = A^n B = 1$, erit per Cas. 3. et I. $n a A^{n-1} B + b A^n = 0$ et $b A^n = -n a A^{n-1} B = -\frac{n a A^{n-1}}{A^n} = -\frac{n a}{A}$,

atque adeò b , seu momentum ipsius $\frac{1}{A^n}$, erit

$-\frac{n a}{A^{n+1}}$. Simil modo patent Casus 5. et 6.

$\frac{1}{2} a A - \frac{1}{2}$. Et generaliter si ponatur $A^{\frac{m}{n}}$ æquale B , erit A^m æquale B^n , ideóque $m a A^{m-1}$ æquale $n b B^{n-1}$, et $m a A^{-1}$ æquale $n b B^{-1}$ seu $n b A^{-\frac{m}{n}}$, ideóque $\frac{m}{n} a A^{\frac{m-n}{n}}$ æquale b , id est, æquale momento ipsius $A^{\frac{m}{n}}$. Q. e. d.

Cas. 6. Igitur genitæ cujuscunque $A^m B^n$ momentum est momentum ipsius A^m ductum in B^n , unâ cum momento ipsius B^n ducto in A^m , id est $m a A^{m-1} B^n + n b B^{n-1} A^m$; idque sive dignitatum indices m et n sint integri numeri vel fracti, sive affirmativi vel negativi. Et par est ratio contenti sub pluribus dignitatibus. Q. e. d.

Corol. 1. Hinc in continuè proportionalibus, si terminus unus datur, ^(k) momenta terminorum reliquorum erunt ut iidem termini multiplicati per numerum intervallorum inter ipsos et terminum datum. Sunt A, B, C, D, E, F continuè proportionales; et si detur terminus C , momenta reliquorum terminorum erunt inter se ut $2A, -B, D, 2E, 3F$.

^(l) *Corol. 2.* Et si in quatuor proportionalibus duæ mediæ dentur, momenta extremarum erunt ut eadem extremæ. Idem intelligendum est de lateribus rectanguli cujuscunque dati.

^(m) *Corol. 3.* Et si summa vel differentia duorum quadratorum detur, momenta laterum erunt reciproce ut latera.

Scholium.

In epistolâ quâdam ad D. J. Collinium nostratem 10 Decem. 1672. datâ, cùm descripsissem methodum tangentium quam suspicabar eandem

^(k) * *Momenta terminorum reliquorum.* Quoniam enim A, B, C, D, E, F , sunt continuè proportionales erit $D : C = C : B = \frac{C C}{D} =$

$C C D^{-1}$ et similiter invenitur $A = \frac{C^3}{D^2} =$

$C^3 D^{-2}$, $E = \frac{D^2}{C}$, $F = \frac{D^3}{C C}$, &c. Quare ob datum C , cujus nullum est momentum, momenta reliquorum terminorum erunt (per Cas. 3. et 4.) $-2 d C^3 D^{-3}$, $-d C^2 D^{-2}$, d , $\frac{2 d D}{C}$, $\frac{3 d D^2}{C C}$, et multiplicando singulos ter-

minos per $\frac{D}{d}$, manebit proportio terminorum

$-2 C^3 D^{-2}$, $-C^2 D^{-1}$, D , $\frac{2 D^2}{C}$, $\frac{3 D^3}{C C}$,

hoc est $-2 A, -B, D, 2 E, 3 F$. Est autem 2 numerus intervallorum inter terminum A , et terminum datum C , sicut et intervallorum inter E et C , 1 intervallum inter B et C , ac inter C et D , et 3, numerus intervallorum inter C et F . Quare patet veritas Corollarii.

^(l) * *Corol. 2.* Sit $A : B = C : D$, seu $B C = A D$, et $B C$, rectangulum datum erit (per Cas 1.) $a D + d A = o$, et hinc $a D = -d A$ ideóque $a : -d = A : D$.

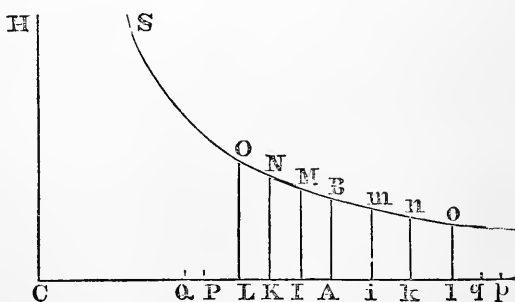
^(m) * *Corol. 3.* Sit $A^2 + B^2 = C^2$, et quadratum C^2 sit datum, erit (per Cas. 3.) $2 a A + 2 b B = o$, ideóque $A a = -b B$, et proinde $a : -b = B : A$. In iis duobus Corollariis necessum est ut variabili unâ crescente, decrescat altera, et ideó dum momentum unius positivum est, alterius momentum est negativum.

esse cum methodo Slusii tum nondum communicatâ; subjunxi: *Hoc est unum particulare vel Corollarium potius methodi generalis, quæ extendit se citra molestum ullum calculum, non modo* ⁽ⁿ⁾ *ad ducendum tangentes ad quasvis curvas sive geometricas sive mechanicas vel quomodocunque rectas lineas aliasve curvas respicientes, verùm etiam ad resolvendum alia abstrusiora problematum genera de* ^(o) *curvitatibus, ^(p) areis, longitudinibus, ^(q) centris gravitatis curvarum, &c. neque (quemadmodum Huddenii methodus de maximis et minimis) ad solas restringitur æquationes illas quæ quantitibus surdis sunt immunes. Hanc methodum intertexui alteri isti quâ æquationum exegesis instituo reducendo eas ad series infinitas. Hactenus epistola. Et hæc ultima verba spectant ad tractatum quem anno 1671. de his rebus scripseram. Methodi verò hujus generalis fundamentum continetur in Lemmate præcedente. (†)*

PROPOSITIO VIII. THEOREMA VI.

Si corpus in medio uniformi, gravitate uniformiter agente, rectâ ascendat vel descendat, et spatium totum descriptum distinguatur in partes æquales, inque principiis singularum partium (addendo resistantiam mediæ ad vim gravitatis, quando corpus ascendit, vel subducendo ipsam quando corpus descendit) investigentur vires absolutæ; dico quòd vires illæ absolutæ sunt in progressionem geometricâ.

Exponatur enim vis gravitatis per datam lineam A C; resistantia per lineam indefinitam A K; vis absoluta in descensu corporis per differentiam K C; velocitas corporis per lineam A P, quæ sit media proportionalis in-



⁽ⁿ⁾ * *Ad ducendum tangentes* (150. 156. Lib. I.) vide Marchionis Hospitalii *Analysim infinitè parvorum*, ubi methodus illa tangentium fusè et perspicuè exponitur.

^(o) * *De curvitatibus*. (216. Lib. I.)

^(p) * *Areis, longitudinibus, &c.* Hæc plurimis exemplis, tum 1^o. tum 2^o. libro contentis manifesta sunt. Vide tractatum Newtoni de quadraturâ curvarum.

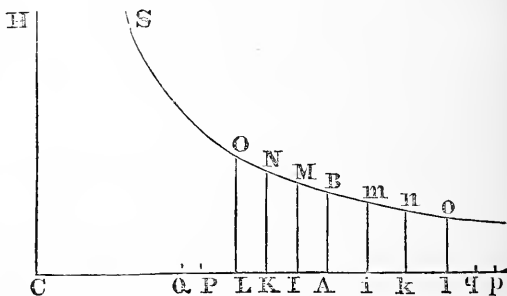
^(q) * *Centris gravitatis*. (66. Lib. I.)

^(†) In præcedentibus editionibus istud scholium hoc modo se habebat.

In litteris quæ mihi cum geometrà peritissimo G. G. Leibnitio annis abhinc decem intercebant, cùm significarem me compotem esse methodi determinandi maxima et minima, ducendâ tangentes, et similia peragendi, quæ in terminis surdis æque ac in rationalibus procederet, et

ter A K et A C, (^r) ideóque in subduplicatâ ratione resistentiæ; incrementum resistentiæ datâ temporis particulâ factum per lineolam K L, et contemporaneum velocitatis incrementum per lineolam P Q; et centro C asymptotis rectangulis C A, C H describatur hyperbola quævis B N S, erectis perpendicularis A B, K N, L O occurrens in B, N, O. Quoniam A K est ut A P q, erit

hujus momentum K L (^s) ut illius momentum 2 A P Q: id est, ut A P in K C, nam velocitatis incrementum P Q (per Motûs Leg. II.) proportionale est vi generanti K C. Componatur ratio ipsius K L cum ratione ipsius K N, et fiet rectan-



gulum K L \times K N ut A P \times K C \times K N; hoc est, (^t) ob datum rectangulum K C \times K N, ut A P. Atqui areae hyperbolicæ K N O L ad rectangulum K L \times K N ratio ultima, ubi coeunt puncta K et L, est æqualitatis. Ergo area illa hyperbolica evanescebat ut A P. Componitur igitur area tota hyperbolica A B O L ex particulis K N O L velocitati A P semper proportionalibus, (^u) et propterea spatio velocitate istâ descripto proportionalis est. Dividatur jam area illa in partes æquales A B M I, I M N K, K N O L, &c. et vires absolutæ A C, I C, K C, L C, &c. (^x) erunt in progressionem geometricâ. Q. e. d. (^z) Et simili ar-

literis transpositis hanc sententiam involventibus. (Datâ æquatione quocumque fluentes quantitates involvente, fluxiones invenire, et vice versâ) eamdem celarem; rescripsit vir clarissimus se quoque in ejusmodi methodum incidisse, et methodum suam communicavit a meâ vix abludentem præterquàm in verborum et notarum formulis, et ideâ generationis quantitatum. Utriusque fundamentum continetur in hoc Lemmate.

(^r) * Ideóque in subduplicatâ ratione resistentiæ. Ob datam A C.

(^s) * Ut illius momentum 2 A P Q. Cum enim sit A K \times A C = A P² (per constr.) erit A C \times K L = 2 A P \times P Q (per Cas. 1. et 5. Lem. II.) id est, ob datam A C; K L est ut A P \times P Q, et quia velocitatis incrementum P Q, dato temporis momento genitum (per Mot. Leg. II.) proportionale est vi generanti K C, erit K L, ut A P \times K C.

(^t) * Ob datum rectangulum K C \times K L (per Theor. IV. de Hyp.)

(^u) * Et propterea spatio velocitate istâ descripto proportionalis est; dato enim temporis momento, spatium descriptum est ut velocitas (12).

(^x) * Erunt in progressionem geometricâ. (379. Lib. I.)

(^z) * Et simili argumento. Exponatur enim vis gravitatis per datam lineam A C, resistentia per lineam indefinitam A I, vis absoluta in ascensu corporis per summam C I, velocitas corporis per lineam A p quæ sit media proportionalis inter A I et A C, ideóque in subduplicatâ ratione resistentiæ; decrementum resistentiæ datâ temporis particulâ factum per lineolam l k, et contemporaneum velocitatis decrementum per lineolam p q; et describatur ut suprâ hyperbola S B o; quoniam A I est ut A p² erit hujus momentum k l ut illius momentum 2 A p q, id est, ut A p in l C; nam velocitatis decrementum p q (per Mot. Leg. II.) proportionale est vi generanti l C, componatur ratio ipsius k l cum ratione ipsius l o, et fiet rectangulum k l \times l o ut

gumento, in ascensu corporis, sumendo, ad contrariam partem puncti A, æquales areas $ABmi$, $imnk$, $kno l$, &c. constabit quod vires absolutæ AC , iC , kC , lC , &c. sunt continuè proportionales. Ideoque si spatia omnia in ascensu et descensu capiantur æqualia; omnes vires absolutæ lC , kC , iC , AC , IC , KC , LC , &c. erunt continuè proportionales. Q. e. d.

Corol. 1. Hinc si spatium descriptum exponatur per aream hyperbolicam $ABNK$; exponi possunt vis gravitatis, velocitas corporis et resistentia medii per lineas AC , AP et AK respectivè; ^(a) et vice versâ.

Corol. 2. Et velocitatis maximæ, quam corpus in infinitum descendendo potest unquam acquirere, ^(b) exponens est linea AC .

Corol. 3. Igitur si in datâ aliquâ velocitate cognoscatur resistentia medii, invenietur velocitas maxima, sumendo ipsam ad velocitatem illam datam in subduplicatâ ratione, quam habet vis gravitatis ^(c) ad medii resistentiam illam cognitam.

$Ap \times lC \times lo$, hoc est, ob datum rectangulum $lC \times lo$, ut Ap . Ergo, coëuntibus punctis k , l , area hyperbolica $kno l = k l \times lo$, est ut Ap . Componitur igitur area tota hyperbolica $2ABol$ ex particulis $kno l$ velocitati Ap semper proportionalibus, et propterea spatio velocitate istâ descripto proportionalis est. Dividatur jam area illa in partes æquales $ABmi$; $imnk$, $kno l$, &c. et vires absolutæ AC , iC , kC , lC , &c. erunt in progressionem geometricâ. Q. e. d.

^(a) * *Et vice versâ.* Simili modo si in ascensu corporis, spatium usque ad motus extinctionem describendum exponatur per aream hyperbolicam $ABnk$ exponi possunt vis gravitatis, velocitas corporis et resistentia medii per lineas AC , Ap , Ak .

^(b) * *Exponens est linea AC.* Fiat enim $AP = AC$, et quia (per constr.) $AP^2 = AK \times AC$, erit etiam $AK = AC$, ideoque coincidente ordinatâ KN , cum asymptoto CH , area hyperbolica $ABNK$, infinita evadet, et spatium descendendo descriptum huic proportionale erit quoque infinitum, gravitas verò, resistentia et velocitas corporis exponentur per lineam AC , eritque proinde resistentia gravitati æqualis, et propterea velocitas AC maxima.

^(c) * *Ad medii resistentiam illam cognitam.* Cum enim velocitates sint in subduplicatâ ratione resistentiarum (per Hyp.) et resistentia sit gravitati æqualis, ubi velocitas maxima est, (per Cor. 2.) velocitas maxima erit ad velocitatem datam in subduplicatâ ratione gravitatis ad medii resistentiam illam cognitam.

catâ ratione laterum, erit particula $t D v$ ut $\frac{q D p \times t D \text{ quad.}}{p D \text{ quad.}}$, id est,

ob datam $t D$, ut $\frac{q D p}{p D \text{ quad.}}$. Sed $p D \text{ quad.}$ est $A D \text{ quad.} + A p \text{ quad.}$

(^e) id est, $A D \text{ quad.} + A D \times A k$, seu $A D \times C k$; (^f) et $q D p$ est $\frac{1}{2} A D \times p q$. Ergo sectoris particula $t D v$ est ut $\frac{p q}{C k}$, id est, ut veloci-

tatis decrementum quam minimum $p q$ directè, et vis illa $C k$ quæ velocitatem diminuit inversè; (^g) atque ideò ut particula temporis decremento velocitatis respondens. Et componendo fit summa particularum omnium $t D v$ in sectore $A D t$, ut summa particularum temporis singulis velocitatis decrescens $A p$ particulis amissis $p q$ respondentium, usque dum velocitas illa in nihilum diminuta evanuerit; hoc est, sector totus $A D t$ est ut tempus totum ascendendi ad locum summum. Q. e. d.

Cas. 2. Agatur $D Q V$ abscindens tum sectoris $D A V$, tum trianguli $D A Q$ particulas quam minimas $T D V$ et $P D Q$, et erunt hæ particulæ ad invicem ut $D T q$ ad $D P q$, id est (si $T X$ et $A P$ parallelæ sint) (^h) ut $D X q$ ad $D A q$ vel $T X q$ ad $A P q$, et divisim ut $D X q - T X q$ ad $D A q - A P q$. (ⁱ) Sed ex naturâ hyperbolæ $D X q - T X q$ est $A D q$, (^k) et per hypothesin $A P q$ est $A D \times A K$. Ergo particulæ sunt ad invicem ut $A D q$ ad $A D q - A D \times A K$; id est, ut $A D$ ad $A D - A K$ seu $A C$ ad $C K$: ideòque sectoris particula $T D V$ est

$D v$, (per Prop. XIX. Lib. VI. Elem.) et triangulum $D q p$ æquale est triangulo $D q r$ evanescente $p r$ respectu $D q$; est igitur $p D^2$

undè ob datum circuli radium $A D$, particula

$t D v$ est ut $\frac{q D p}{p D^2}$.

(^e) * *Id est.* Nam $A C \times A k$, seu $A D \times A k = A p^2$ (per Prop. VIII.) et $A D^2 + A D \times A k = A D \times (A C + A k) = A D \times C k$.

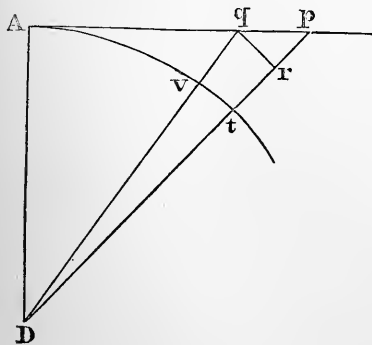
(^f) * *Et $q D p$ est $\frac{1}{2} A D \times p q$,* ob $A D$ basi $p q$ productæ normalem.

(^g) * *Atque ideò ut particula temporis decremento velocitatis respondens* (18).

(^h) * *Ut $D X^2$ ad $D A^2$,* ob triangula $D T X$, $D P A$ similia (per Prop. II. Lib. VI. Elem.)

(ⁱ) * *Sed ex natura hyperbolæ, &c.* Quoniam (per Theor. II. de Hyperb.) rectangulum $2 A D + A X \times A X$, est ad quadratum ordinatæ $T X$, ut latus transversum est ad latus rectum, hæc verò hyperbola est æquilatera, erit (per Theor. V. de Hyperb.) $T X^2 = 2 A D + A X \times A X$. Sed est $2 A D + A X \times A X = D X^2 - D A^2$ (per Prop. VI. Lib. II. Elem.) ergò $T X^2 = D X^2 - D A^2$, ac proinde $D X^2 - T X^2 = D A^2$.

(^k) * *Et per hypothesin $A P^2$ est $A D \times A k$,* seu $A C \times A k$ (per Prop. VIII.)



ad $t D^2$, seu $A D^2$, ut triangulum $q D p$ ad triangulum $t D v$, et ideò $t D v = \frac{A D^2 \times q D p}{p D^2}$,

maximam quam corpus cadendo potest acquirere. Cum igitur arearum $A B N K$ et $A T D$ momenta $L K N O$ et $D T V$ sunt ut velocitates, erunt arearum illarum partes omnes simul genitæ (+) ut spatia simul descripta, ideóque areæ totæ ab initio genitæ $A B N K$ et $A T D$ ut spatia tota ab initio descensus descripta. Q. e. d.

Corol. 2. (°) Idem consequitur etiam de spatio quod in ascensu describitur. Nimirum quòd spatium illud omne sit ad spatium, uniformi cum velocitate $A C$ eodem tempore descriptum, ut est area $A B n k$ ad sectorem $A D t$.

Corol. 3. Velocitas corporis tempore $A T D$ cadentis est ad velocitatem, quam eodem tempore in spatio non resistente acquireret, ut triangulum $A P D$ ad sectorem hyperbolicum $A T D$. Nam velocitas in medio non resistente (P) foret ut tempus $A T D$, et in medio resistente est ut $A P$, id est, ut triangulum $A P D$. (°) Et velocitates illæ initio descensus æquantur inter se, perinde ut areæ illæ $A T D$, $A P D$.

Corol. 4. (r) Eodem argumento velocitas in ascensu est ad velocitatem,

(+) * *Ut spatia simul descripta* (11).

(°) * *Idem consequitur*, &c. Eadem est prorsus demonstratio, si loco $A K$ et $Q P$ substituantur $A k$ et $q p$, et ad primum demonstrationis casum attendatur.

91. *Corol.* Velocitas $A p$ corporis in medio resistente ascendentis ad maximam altitudinem $A B n k$, est ad velocitatem $A P$ corporis in eodem medio e quiete descenditis per æquale spatium $A B N K$, ut secans anguli $A D p$ ad radium, aut quod idem est, ut tangens $A p$ anguli $A D p$, ad ejusdem sinum. Quoniam enim (per Hyp.) area $A B N K$, æqualis est $A B n k$, erit (380. Lib. I.) $C k : A C = A C : C K$, et dividendo $A k : A C = A K : C K$, et alternando, $A k : A K = A C : C K = C k$ (sive $A C + A k : A C$, et ideó $A k \times A C : A K \times A C = A C^2 + A k \times A C : A C^2$; sed (per dem. Prop. VIII.) $A C \times A k = A p^2$, et $A C \times A K = A P^2$. Quare $A p^2 : A P^2 = A C^2 + A p^2$ seu $D p^2 : A C^2$, et hinc $A p : A P = D p : A C$, seu $A D$. Q. e. d.

(P) * *Foret ut tempus $A T D$* . Cresceret enim uniformiter, ideóque ut tempus (25. Lib. I.)

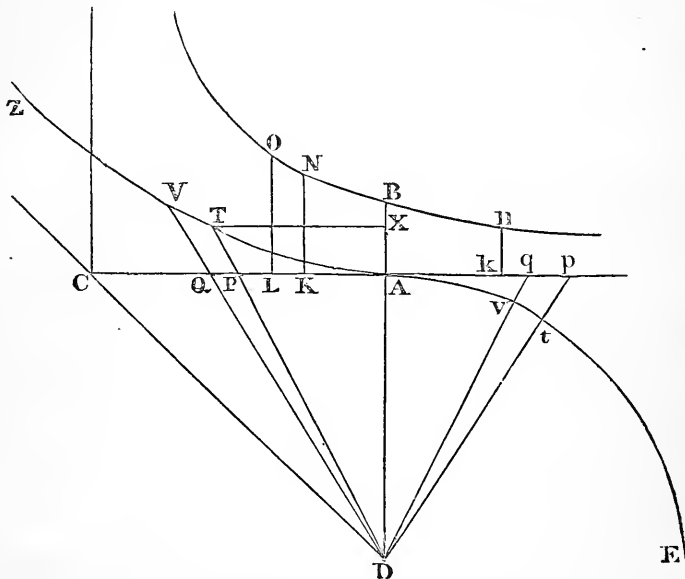
(°) * *Et ve ocitates illæ initio descensus æquantur inter se* ob resistantiam respectu gravitatis nullam, ubi velocitas nascitur. Cum igitur velocitates in medio non resistente sint semper inter se ut areæ $A T D$, et in medio resistente sint ut triacula $A P D$, erit velocitas in medio resistente tempore finito $A T D$ acquisita ad velocitatem initio descensus in eo medio resistente ut triangulum finitum $A P D$, ad triangulum

nascens $A P D$, et erit velocitas initio descensus in medio non resistente ad velocitatem in eodem medio tempore finito $A T D$ acquisitam ut area nascens $A T D$ (æqualis areæ nascenti $A P D$) ad aream finitam $A T D$; quare (ex æquo) velocitas corporis tempore finito $A T D$ cadentis in medio resistente est ad velocitatem quam eodem tempore in medio non resistente cadendo acquireret ut triangulum $A P D$ ad sectorem hyperbolicum $A T D$.

(r) * *Eodem argumento*. Nam velocitas in medio non resistente foret ut tempus $A t D$, et in medio resistente est ut $A p$, id est, ut triangulum $A p D$ ob datam $A D$, et velocitates illæ in fine ascensus ubi evanescent æquantur inter se, perindè ut areæ evanescentes $A t D$, $A p D$; est autem triangulum $A p D = \frac{1}{2} A D \times A p$, et sector circularis $A t D = \frac{1}{2} A D \times A t$. Quare $A p D$ est ad $A t D$, ut $A p$ ad $A t$.

92. Hinc si velocitas ascensus $A p$ in medio resistente velocitati maximæ $A C$ æqualis fuerit, erit velocitas $A p$ seu $A C$, ad velocitatem quâ corpus eodem tempore in spatio non resistente omnem suum ascendendi motum amittere posset, ut triangulum $A C D$, ad octantem circuli, sive ut radius ad octavam partem peripheriæ, aut quod idem est, ut quadratum circulo circumscriptum ad circuli aream. Dum enim fit $A p = A C$, triangulum $A p D$ æquatur triangulo $A C D$, et sector $A t D$, octanti circuli, ideóque arcus $A t$ est pars octava peripheriæ, et triangulum $A C D$ est ad sectorem $A t D$, ut $A C$ ad arcum $A t$, ac præterea triangulum $A C D$, ob $A C = A D$, est pars octava quadrati circulo circumscripti.

quâ corpus eodem tempore in spatio non resistente omnem suum ascendendi motum amittere posset, ut triangulum $A p D$ ad sectorem circula-rem $A t D$; sive ut recta $A p$ ad arcum $A t$.



Corol. 5. Est igitur tempus, quo corpus in medio resistente cadendo velocitatem AP , acquirit, ad tempus, quo velocitatem maximam AC in spatio non resistente cadendo acquirere posset, ^(s) ut sector ADT ad triangulum ADC : et tempus, quo velocitatem Ap in medio resistente ascendendo possit amittere, ad tempus quo velocitatem eandem in spatio non resistente ascendendo posset amittere, ^(t) ut arcus At ad ejus tangentem Ap .

^(s) * Ut sector ADT ad triangulum ADC . Cum enim AP exponat velocitatem tempore ATD in medio resistente acquisitam, sumatur AY talis ut exponat velocitatem tempore eodem in medio non resistente productam, et erit per Corol. 2. AP ad AY ut APD , ad ATD , cumque etiam AC exponat velocitatem maximam, erit AY ad AC ut tempus quo prior celeritas AY in medio non resistente acquiri potest, ad tempus quo velocitas maxima AC in medio etiam non resistente acquireretur, et cum tempus quo celeritas AY acquiritur, exprimitur per aream ATD , erit AY ad AC ut ATD ad aream quæ exponet tempus quo velocitas maxima in medio non resistente acquiritur, ita-

que cum sit $AP : AY = APD : ATD$ et $AY : AC = ATD$: ad hanc aream, erit ex æquo $AP : AC = APD$, ad hanc aream, sed sumptâ communi altitudine DH est AP ad $AC = tri. APD$ ad $tri. ADC$, ergo area quæ exponet tempus quo maxima velocitas in medio non resistente acquiritur, est area ADC . Undè sequitur quod corpus in medio resistente, velocitatem maximam AC acquirere cadendo non potest nisi tempore infinito. Cum enim fit $AP = AC$, coincidit D T cum hyperbolæ ATV asymptoto DC , et sector ADT fit infinitus.

^(t) * Ut arcus At , ad ejus tangentem Ap . Siquidem (per Cor. 4.) velocitas Ap in medio

Corol. 6. Hinc ex dato tempore datur spatium ascensu vel descensu descriptum. Nam corporis in infinitum descendens datur velocitas maxima (per *Corol. 2.* et *3.* *Theor. VI. Lib. II.*) ^(u) indeque datur tempus quo corpus velocitatem illam in spatio non resistente cadendo posset acquirere. Et sumendo sectorem *A D T* vel *A D t* ad triangulum *A D C* in ratione temporis dati ad tempus modo inventum; ^(x) dabitur tum velocitas *A P* vel *A p*, ^(y) tum area *A B N K* vel *A B n k*, ^(z) quæ est ad sectorem *A D T* vel *A D t* ut spatium quæsitum ad spatium, quod tem-

resistente tempore *A t D* extinguenda, est ad velocitatem eodem tempore in spatio non resistente extinguendam ut triangulum *A p D* ad sectorem *A t D*; et etiam ut tempus quo velocitas *A p* in spatio non resistente extingueretur ad tempus *A t D* quo altera velocitas in spatio non resistente extinguitur quod idem est cum eo quo velocitas *A p* in spatio resistente extinguitur. Quare tempus quo velocitas *A p* in spatio non resistente evanesceret est ad tempus *A t D* quo in spatio resistente extingueretur ut triangulum *A p D*, ad sectorem *A t D*, sive tangens *A p* ad ejus arcum *A t*. Patet ergo propositum.

93. Hinc tempus quo corpus velocitatem *A p* in medio resistente ascendendo amittere potest, est ad tempus quo velocitatem maximam *A C* in spatio non resistente ascendendo amitteret vel descendendo acquireret ut sector circularis *A t D*, ad triangulum *A D C*, seu ut arcus *A t* ad radium *A D*. Nam in medio non resistente velocitas *A p* est ad velocitatem *A C*, ut tempus *A p D*, quo generatur vel extinguitur velocitas *A p*, ad tempus quo generatur vel extinguitur velocitas *A C*, quod proinde erit $\frac{A C \times A p D}{A p}$, seu $\frac{1}{2} A D \times A C$, hoc est, triangulum *A D C*.

Cum igitur tempus quo velocitas *A p*, in medio resistente extinguitur, exponatur per sectorem *A t D*, patet propositum.

94. Tempus quo corpus in medio resistente descendendo acquirit velocitatem *A P*, vel ascendendo amittit velocitatem *A p*, est ad tempus quo eandem velocitatem in medio non resistente acquirit vel amittit, ut sector *A D T*, vel *A D t*, ad triangulum *A D P*, vel *A D p*, respectivè. Etenim (per *Cor. 5.* et not. 93.) tempus quo in medio resistente generatur velocitas *A P*, vel extinguitur velocitas *A p*, est ad tempus quo in spatio non resistente generatur vel extinguitur velocitas maxima *A C*, ut *A D T* vel *A D t*, ad *A D C*; et tempus quo in spatio non resistente generatur vel extinguitur velocitas *A C*, est ad tempus quo generatur vel extinguitur in eodem spatio non resistente, velocitas *A P* vel *A p*.

A p, ut *A C* ad *A P* vel *A p*, et sumptâ comuni altitudine *D A* ut *A D C* ad *A P D* vel *A p D*. Quare (ex æquo) tempus quo in medio resistente generatur velocitas *A P*, vel extinguitur velocitas *A p*, est ad tempus quo velocitas eadem in spatio non resistente producit vel amittitur, ut *A D T* ad *A D P*, vel *A D p*. Q. e. d.

95. Si celeritas *A p* corporis in medio resistente ascendens maximæ *A C* æqualis fuerit, erit *A D p* = *A D C*, et sector *A D t*, circuli octans. Quare tempus quo corpus in medio resistente ascendendo amittere potest velocitatem maximam *A C* est ad tempus quo eandem in spatio non resistente amitteret, ut circuli octans ad triangulum *A D C*, hoc est, ut area circuli ad quadratum circumscriptum, seu etiam ut 8^{a} pars peripheriæ ad radium.

^(u) 96. Indèque datur tempus. Cum enim vires acceleratrices uniformes, sint ut velocitates quas generant oirectè et tempora quibus illas generant inversè (13. *Lib. I.*) datâ vi acceleratrice uniformi quâ corpus in medio quovis sollicitatur, seu datâ vis illius ratione ad notam quamlibet aliam vim v. gr. ad corporum terrestrium gravitatem, datâque simul velocitate quanti vis illa acceleratrix produxit, dabitur tempus quo velocitas illa data genita est. Sit enim vis acceleratrix data ad vim notam gravitatis, ut *a* ad *b*, velocitas datâ vi illâ acceleratrice tempore *x* genita *c*, et velocitas quam vis gravitatis tempore quovis dato *t* generat *C*, erit $a : b = \frac{c}{x} : \frac{C}{t}$.

Undè invenitur tempus $x = \frac{b c t}{a C}$.

^(x) * Dabitur tum velocitas *A P*, vel *A p*, (Per *Cor. 5.* et not 92.)

^(y) * Tum area *A B N K* vel *A B n k*. Est enim (ex dem. *Prop. VIII.*) $A C : A P = A P : A K$, et $A C : A p = A p : A k$, et ideò datis *A C* et *A P* vel *A p* dabuntur *A K* vel *A k*, et aræ correspondentes *A B N K*, *A B n k*, quæ per tabulas logarithmorum inveniri possunt. (384. *Lib. I.*)

^(z) * Quæ est ad sectorem *A D T*, vel *A D t*, (Per *Cor. 1.* et 2.)

sistentiæ. Decrementum resistentiæ datâ temporis particulâ factum per lineolam KL et contemporaneum velocitatis decrementum per lineolam PQ . Quoniam K est ut aP^2 , erit huius momentum KL , ut illius momentum $2aPQ$, id est, ut a in KC . Nam velocitatis decrementum PQ , (per Mot. Leg. II.) proportionale est vi generanti KC , quæ est excessus resistentiæ aK , supra vim gravitatis aC . Compo-

sunt ad invicem ut aD^2 , ad $aD \times aK - aD^2$, id est, ut aD ad $aK - aD$, seu ut aC ad CK ; ideoque sectoris particula TDV , est $\frac{PDQ \times aC}{CK}$, atque ideo ob datas aC et aD ,

ut $\frac{PQ}{CK}$, id est ut decrementum velocitatis directè utque vis generans decrementum inversè,

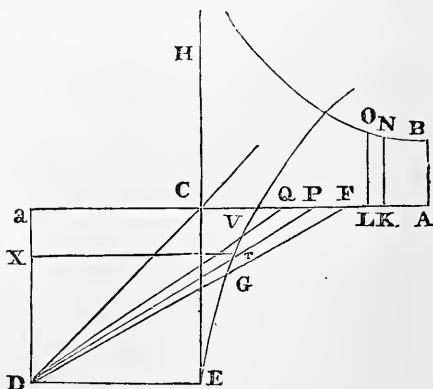
atque ideo ut particula temporis decremento velocitatis respondens, et componendo, fit summa particularum temporis quibus omnes velocitatis FP particulæ PQ extinguuntur, ut summa particularum sectoris GDT , id est, tempus totum ut sector totus. Q. e. d.

100. Corol. 1. Quoniam coincidente puncto P cum C , coincidit etiam K cum C , et DT cum asymptoto DC , liquet corporis projecti velocitatem aP nonnisi descripto spatio infinito, elapsoque infinito tempore, fieri posse velocitati terminali aC æqualem.

101. Corol. 2. Si dignitas hyperbolæ BNO seu rectangulum $CA \times AB$, sit $\frac{1}{2}aC^2$, spatium quod corpus tempore quovis describit, erit ad spatium quod corpus velocitate terminali aC eodem tempore uniformiter progrediendo describere potest, ut area $ABNK$ quâ spatium descriptum exponitur ad aream GDT quâ tempus exponitur. Nam cum sit aC ad aP , ut aP ad aK , erit (per Cor. 1. Lem. II. Lib. II.) LK

natur ratio ipsius KL cum ratione ipsius KN , et fiet rectangulum $KL \times KN$ ut $aP \times KC \times KN$, hoc est, ob datum rectangulum $KC \times KN$, ut aP , ergo rectangulum evanescens $KN \times KL$, hoc est, area hyperbolica $KNOL$, est ut aP . Componitur igitur area tota hyperbolica $ABOL$, ex particulis $KNOL$, velocitati aP semper proportionalibus, et propterea spatio velocitate istâ descripto proportionalis est. Dividatur jam area illa in partes æquales $ABMI$, $IMNK$, $KNOL$, &c. et vires absolutæ AC , IC , KC , LC , &c. erunt in progressionem geometricâ. Si spatium descriptum exponatur per aream hyperbolicam $ABNK$, exponi possunt vis gravitatis, velocitas corporis et resistentia medii per lineas aC , aP , aK .

Propositionis 9^æ constructio in hanc abit. Cæteris ut in figurâ et constructione superiori manentibus, capiatur aF media proportionalis inter aC et aA , et ideo velocitatem projectionis initialem exponens, completo quadrato CED , centro D describatur hyperbola rectangula $EGTV$, semiaxem transversum habens DE , verticem principalem E , et asymptotum DC . Jungantur DF , DP hyperbolæ occurrentes in G et T , et erit sector hyperbolicus GDT ut tempus descensus per spatium $ABNK$. Agatur enim DVQ abscindens tum sectoris $GDTV$ tum trianguli FDQ particulas quam minimas TDV , PDQ , et erunt hæ particulæ ad invicem ut DT^2 ad DP^2 , id est, si TX et aP parallæ sint, ut DX^2 ad aD^2 , vel TX^2 ad aP^2 , et divisim ut $TX^2 - DX^2$ ad $aP^2 - aD^2$; sed (ex naturâ Hyperb.) $TX^2 - DX^2$ est aD^2 , et (per Hyp.) aP^2 est $aD \times aK$; ergo particulæ TDV , PDQ ,



ad PQ ut $2aK$ ad aP , hoc est, ut $2aP$ ad aC , et indè LK ad $\frac{1}{2}PQ$, ut aP ad $\frac{1}{2}aC$. (Ex naturâ Hyperb. et per Hyp.) $KN \times CK$ est $CA \times AB$, seu $\frac{1}{2}aC^2$, ideoque KN ad aC seu aD , ut $\frac{1}{2}aC$ ad CK . Itaque (ex æquo) LKN , ad DPQ , ut aP , ad CK ; sed erat DPQ , ad DTV , ut CK ad aC , ergo rursus (ex æquo), LKN , est ad DTV ,

Hh2

ut a P, ad a C, hoc est, ut velocitas corporis projecti est ad velocitatem maximam quam corpus e quiete cadendo potest acquirere. Cū igitur arearum A B N K et G D T, momenta L K N et D T V sint ut velocitates, erunt arearum illarum partes omnes simul genitæ ut spatia simul descripta, ideoque areæ totæ ab initio genitæ A B N K et G D T, ut spatia tota ab initio projectionis descripta.

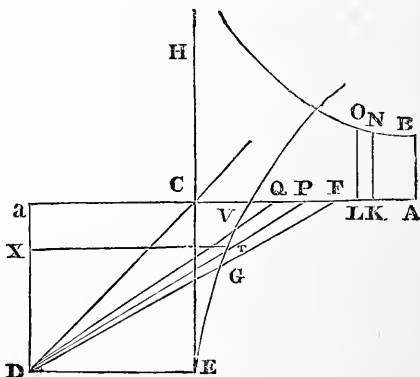
102. *Corol. 3.* Velocitas a P corporis projecti in fine temporis G T D, est ad velocitatem quam corpus velocitate initiali a F projectum eodem tempore in medio non resistente cadendo haberet, ut triangulum a P D ad summam trianguli a F D et sectoris hyperbolici G T D. Nam velocitatis incrementum tempore G T D in spatio non resistente genitum est ut tempus G T D, et velocitas projectionis ut a F, sive ut triangulum a F D, atque adeo velocitas tota in fine temporis G T D ut G T D \div a F D, et velocitas in fine temporis ejusdem G T D in medio resistente est ut a F, id est, ut triangulum a P D, et velocitates illæ initio projectionis æquantur inter se, perinde ut aræ illæ G T D \div a F D et a P D, ob sectorem G T D evanescentem, et a P æqualem a F initio descensûs.

103. *Corol. 4.* Tempus quo corpus in medio resistente projectum acquirit velocitatem a P, seu quo amittit velocitatem P F, est ad tempus quo velocitatem maximam a C, in spatio non resistente et quiete cadendo acquirere posset, ut sector G D T ad triangulum a D C. Sit a $F \div V$, recta velocitatem exponens quam corpus in medio non resistente cum velocitate initiali a F projectum elapso tempore G D T haberet, et erit (102) a P ad a F $\div V$, seu multiplicando per $\frac{1}{2}$ a D, a P D ad a F D $\div \frac{1}{2}$ a D $\times V$, ut a P D ad a F D \div G T D, ideóque $\frac{1}{2}$ a D $\times V = G T D$, et $V = \frac{G T D}{\frac{1}{2} a D}$; sed V est velocitas quam corpus et quiete cadendo in medio non resistente acquireret tempore G T D, et velocitates in medio non resistente acquisitæ, sunt ut tempora quibus acqui-runtur, ideóque velocitas V seu $\frac{G T D}{\frac{1}{2} a D}$, est ad velocitatem a C, in medio non resistente acquisitam ut tempus G T D ad tempus quo corpus velocitatem a C acquirit; quare hoc tempus erit $\frac{1}{2}$ a D \times a C, seu per triangulum a D C exponetur.

104. *Corol. 5.* Hinc ex dato tempore datur spatium descriptum. Capiatur enim sector GDT ad triangulum aDC , ut tempus datum ad tempus quo corpus in medio non resistente acquirit velocitatem terminalem aC , et dabitur tum velocitas aP , tum area $ABNK$, quæ est ad sectorem GDT , ut spatium quassitum ad spatium quod tempore dato cum velocitate illâ terminali aC uniformiter describi potest (101) et regrediendo ex dato spatii $ABNK$, dabitur tempus GDT , si capiatur area $ABNK$, ad

triangulum a D C in ratione spatii dati ad
duplum spatii quod corpus in medio non resis-
tente cadendo describit ut velocitatem termina-
lem a C acquirat. Id demonstratur ex (not. 103.
et 101.) eodem prorsus modo quo factum est
(97.)

105. *Scholium.* Superiores construcciones definiendis corporum motibus sufficiunt, licet medii resistentia partim constans partim velocitatis quadrato proportionalis. Nam si corpus solâ visâ insitâ moveatur, recta A C, quæ in construc-



tionibus Prop. VIII. et IX. vim gravitatis uniformem exponebat, partem resistantiæ constantem quæ vi alicui centripetæ uniformi æqualis censi potest, cæteris manentibus, exponet. Sed si corpus in medio prædicto gravitate uniformiter agente sollicitatum rectâ ascendat vel descendat, linea A C, in constructionibus pro ascensu vim gravitatis et partem resistantiæ datam simul exhibebit, in constructionibus verò pro descensu excessum gravitatis suprâ partem resistantiæ datam repræsentabit; et linea illa A C, itâ determinata vim gravitatis uniformem exponet, quâ corpus urgeretur in medio cujus esset resistentia ut velocitatis quadratum. Si verò pars illa resistentiæ quæ uniformis manet vi gravitatis æqualis fuerit et corpus deorsum projiciatur, idem erit illius motus ac si solâ vi insitâ ferretur in medio quod resisteret in ratione quadrati velocitatis, atque ideo in hoc casu usurpanda erit constructio Propositionis 5^{mæ}. Jam verò omissis constructionibus per logarithmicam quas (ex demonstr. 44. 45.) facile deducere, aut in Monumentis Academiæ Regiæ an. 1709 et etiam in Phoronomia Hermanni lector videri poterit, duo quæ sequuntur generalia problemata analyticè solvemus.

PROBLEMA.

Definire motum corporis, uniformi gravitate
urgente, rectà descendantis vel ascendentis in

medio similari, quod in ratione quâlibet multiplicatâ velocitatis resistit.

106. Sit vis gravitatis = g , velocitas corporis sub initio motus = c , spatium descriptum = s , tempus quo descriptum est = t , velocitas hoc tempore acquisita vel residua = v , resistentia medii $r = \frac{v^n}{a^{n-1}}$, et a quantitas data. Corpore

descendente erit (19) $g \, ds = \frac{v^n \, ds}{a^{n-1}}$ = $v \, dv$,

ideoque $ds = \frac{a^{n-1} v \, dv}{g a^{n-1} - v^n}$, et quia (13) $dt = \frac{ds}{v}$, erit $dt = \frac{a^{n-1} v \, dv}{g a^{n-1} - v^n}$. Simili modo pro

corporis ascensu, invenitur $ds = \frac{-a^{n-1} v \, dv}{g a^{n-1} + v^n}$

et $dt = \frac{-a^{n-1} v \, dv}{g a^{n-1} + v^n}$. Cum igitur in his

quatuor æquationibus variables separatæ sint, poterunt illæ, saltem concessis figurarum quadraturis, construi.

107. Si resistentia velocitati proportionalis fuerit, erit $n = 1$, et ideò corpore descendente $ds = \frac{v \, dv}{g - v}$ et divisione numeratoris $v \, dv$ per

$-v + g$ peractâ, est $ds = -dv + \frac{g \, dv}{g - v}$,

et sumptis fluentibus $s = Q - v - g \times$

$L. \frac{g - v}{g - v}$. Quia verò ubi evanescit spatium s , fit $v = c$ (per Hyp.) erit constans $Q = c +$

$g L. \frac{g - c}{g - v}$, ac proinde $s = c - v +$

$L. \frac{g - c}{g - v}$. Tempus habetur per æquationem $dt = \frac{ds}{g - v}$

cujus fluens $t = Q - L. \frac{g - v}{g - v} =$

$L. \frac{g - c}{g - v}$. Simili modo pro corpore ascensu

invenitur $s = c - v + g L. \frac{g + v}{g + c}$, et $t =$

$L. \frac{g + c}{g + v}$.

108. Si resistentia sit ut velocitatis quadratum,

erit $n = 2$ et (106) $r = \frac{v^2}{a}$. Sit b velocitas

terminalis, et quia resistentia gravitati æqualis est ubi corpus velocitatem maximam habet, erit

$g = \frac{b \, b}{a}$, et $b \, b = a \, g$. Sit e spatium quod

corpus vi gravitatis constante g cadendo in medio non resistente describit ut acquirat velocitatem

b , et erit $2 \, g \, e = b \, b = a \, g$ (25) ideoque $a = 2 \, e$. His positis, corpore descendente erit (106) $ds =$

$\frac{a \, v \, dv}{a \, g - v \, v} = \frac{2 \, e \, v \, dv}{b \, b - v \, v}$. Ponatur $b \, b - v \, v = x \, x$,

et proinde sumptis fluxionibus $v \, dv = -x \, dx$,

atquè ideò $ds = -\frac{2 \, e \, x \, dx}{x \, x} = -\frac{2 \, e \, dx}{x}$, et

sumptis fluentibus $s = Q - 2 \, e \, L. x = Q -$

$e \, L. x^2 = Q - e \, L. b \, b - v \, v$. Ponatur $s = o$.

et ideò $v = c$, et indè habebitur $Q =$

$e \, L. \frac{b \, b - c \, c}{b \, b - v \, v}$, ac propterea $s = e \, L. \frac{b \, b - c \, c}{b \, b - v \, v}$.

Sit $L. h = 1$ et erit $s \, L. h = e \, L. \frac{b \, b - c \, c}{b \, b - v \, v}$;

$\frac{s}{e} \times L. h = L. h \frac{s}{e} = L. \frac{b \, b - c \, c}{b \, b - v \, v}$, ideoque

$h \frac{s}{e} = \frac{b \, b - c \, c}{b \, b - v \, v}$; undè eruitur $v \, v =$

$\frac{b \, b \, h \frac{s}{e} + c \, c - b \, b}{h \frac{s}{e}}$. Tempus obtinetur per

æquationem (106) $dt = \frac{a \, dv}{a \, g - v \, v} = \frac{2 \, e \, dv}{b \, b - v \, v}$

$= \frac{e \, dv}{b \, b - v \, v} + \frac{e \, dv}{b \, b - v \, v}$; quod patet, si duæ pos-

tre mæ fractiones ad communem denominatorem

reducantur, et sumptis fluentibus $t = Q + \frac{e}{b} \times$

$L. \frac{b \, b - v \, v}{b \, b - v \, v} - \frac{e}{b} L. \frac{b \, b - v \, v}{b \, b - v \, v} = Q + \frac{e}{b} \times$

$L. \frac{b \, b - v \, v}{b \, b - v \, v}$. Ponatur $t = o$, et ideò $v = c$, et in-

venietur $Q = -\frac{e}{b} L. \frac{b \, b - c \, c}{b \, b - c \, c}$. Quarè erit $t =$

$\frac{e}{b} L. \frac{b \, b - v \, v}{b \, b - v \, v} \times \frac{b \, b - c \, c}{b \, b - c \, c}$. Si corpus e quiete ca-

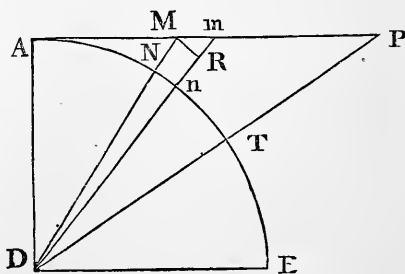
dat erit $c = o$, et ideò $s = e \, L. \frac{b \, b}{b \, b - v \, v}$; $v \, v =$

$\frac{b \, b \, h \frac{s}{e} - b \, b}{h \frac{s}{e}}$ et $t = \frac{e}{b} L. \frac{b \, b - v \, v}{b \, b - v \, v}$. Si in hac

ultimâ æquatione loco $n \frac{e}{s}$ scribatur m et loco v

ipsius valor $b \sqrt{1 - \frac{1}{m}}$, habebitur $t = \frac{e}{b}$

$\times \frac{L \, 1 + \sqrt{1 - \frac{1}{m}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{m}}}$.



Simili modo, ascendente corpore invenie-

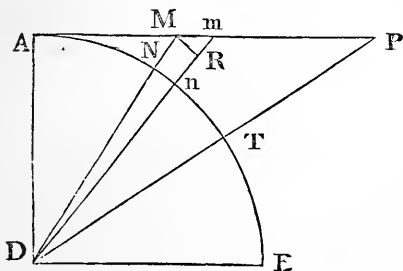
tur $s = e \, L. \frac{b \, b + c \, c}{b \, b + v \, v}$ et $v \, v =$

$\frac{b b + c c - h b h}{h \frac{s}{e}}$. Tempus autem reperi-

tur per æquationem $d t = - \frac{a d v}{a g + v v} = -$

$\frac{e d v}{b b + v v}$. Centro D, radio D A = b, descri-

batur circuli quadrans A N E, velocitas c, sub initio ascensûs exponatur per datam tangentem A P, velocitas residua v, per tangentis illius partem: A M, et d v per M m, jungantur D P,



D M, D m, circulo occurrentes in T, N, n, et ex puncto M, demissum sit ad D n perpendiculum M R, triangula similia D N n, D M R, dant D M : D N vel D A = M R : N n, et triangula similia m R M, M A D, dant D M : D A = M m : M R, ideòque (ex æquo) D M² : D A² = M m : N n, hoc est, $b b + v v$:

$b b = d v : N n = \frac{b b d v}{b b + v v}$; undè fit $\frac{e \times N n}{b b}$

$= \frac{e d v}{b b + v v}$; et hinc habebitur $d t = -$

$\frac{e \times N n}{b b}$, sumptisque fluentibus $t = Q -$

$\frac{e \times A N}{b b}$. Ponatur $t = 0$, et fiet A M =

A P, et A N = A T, ideòque $Q = \frac{e \times A T}{b b}$.

Quare erit $t = \frac{e \times T N}{b b} = \frac{T N}{2 g}$, (ob $b b =$

$2 g e$).

PROBLEMA.

Definire motum corporis in lineâ rectâ A C, vi quâlibet centripetâ ad punctum C tendente sollicitati in medio cujus resistantia est ut densitas medii et dignitas quævis velocitatis corporis conjunctim.

109. Corpus e loco dato A vel a, datâ cum velocitate projectum ascendat per spatium a P vel descendat per spatium A P, dicanturque velocitas projectionis in a vel A = c, spatium descriptum a P vel A P = s, tempus quo de-

scriptum est = t, velocitas corporis in loco P = v, vis centripeta ibidem = g, densitas medii in eodem loco = k, resistantia $r = k v^n$, distantia C P = x, et data C a vel C A = b, erit (22) pro corporis ascensu, $g d x + k v^n d x = - v d v$, et pro descensu $g d x - k v^n d x = - v d v$, quarum æquationum alterutram resolvere satis est, cum altera in alteram abeat, mutato signo + vel - quantitati k præfixo. Quia verò corpore ascendente est a P = s = x - b, et proinde d s = d x; at eodem descendente A P = s = b - x, et ideò d s = - d x, erit pro corporis ascensu (15) $d t = \frac{d s}{v} = \frac{d x}{v}$, et pro descen-

su $d t = - \frac{d x}{v}$. His positis bre-

viter exponimus præcipuos casus in quibus superiorum æquationum variabiles separari et æquationes proinde per curvarum quadraturas construi possunt.

110. Si in æquatione generali $g d x \pm k v^n d x = - v d v$, quæ est pro ascensu et descensu simul. Sit g quantitas constans, et densitas k, ut

distantiæ dignitas $x^{\frac{1}{2}}$ reciprocè, hoc est, $k = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$, variables separari possunt. Nam æqua-

tio generalis in hanc mutabitur $g d x \pm \frac{v^n d x}{a x^{\frac{1}{2}}}$

$= - v d v$. Ponatur $v^2 = x z$, ideòque $v^n =$

$x^{\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}}$, et $v d v = \frac{x d z + z d x}{2}$, et æqua-

tio evadet $g d x \pm \frac{z^{\frac{1}{2}} d x}{a} = \frac{- x d z - z d x}{2}$,

undè eruitur $\frac{d x}{x} = \frac{a d z}{2 a g + a z - 2 z^{\frac{1}{2}}}$. In

qua variables sunt separate.

111. Si densitas k constans fuerit, vis centripeta g ut distantia x a centro et resistantia ut velocitas, variables separari possunt. Nam si ponatur $g = a x$, k constans et $n = 1$, æquatio generalis fiet $a x d x \pm k v d x = - v d v$, in quâ neglectis coëfficientibus datis a et k, termini omnes sunt homogenei seu ejusdem dimensionis. Ponatur itaque $v = z x$, et proinde $d v = z d x + x d z$, et æquatio evadet $a x d z \pm k z x d x = - z^2 x d x - z x^2 d z$, et terminis omnibus per x divis, iisque ordinatis invenitur $\frac{d x}{x} = -$

$\frac{z d z}{a + k z + z^2}$, quæ æquatio, concessâ hyperbolæ vel circuli quadraturâ semper construi potest.

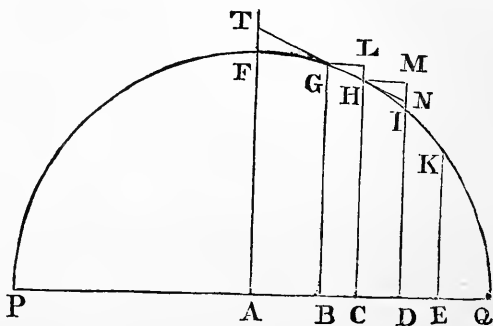
112. Si, cæteris paribus, medii resistantia sit ut quadratum velocitatis, id est, $n = 2$, et densitas medii k visque centripeta g sint ut functiones quælibet distantiae x, variables in superioribus

A
P
P
a
C

PROPOSITIO X. PROBLEMA III.

Tendat uniformis vis gravitatis directè ad planum horizontis, sitque resistentia ut medii densitas et quadratum velocitatis conjunctim: requiritur tum medii densitas in locis singulis, quæ faciat ut corpus in datâ quâvis lineâ curvâ moveatur; tum corporis velocitas et medii resistentia in locis singulis.

Sit P Q planum illud plano schematis perpendiculare; P F H Q linea curva plano huic occurrens in punctis P et Q; G, H, I, K loca quatuor corporis in hâc curvâ ab F ad Q pergentis; et G B, H C, I D, K E ordinatæ quatuor parallelæ ab his punctis ad horizontem demissæ, et lineæ horizontali P Q ad puncta B, C, D, E insistentes; et sint B C, C D, D E distantie ordinarum inter se æquales. A punctis G et H ducantur rectæ G L, H N curvam tangentes in G et H, et ordinatis C H, D I sursum productis occurrentes in L et N, et compleatur parallelogrammum H C D M. (b) Et tempora, quibus corpus describit arcus G H, H I, erunt in sub-



æquationibus (109.) separationem admittunt. In hâc hypothesi æquatio pro corporis ascensu fit $g dx + k v^2 dx = -v dv$, seu $v dv + k v^2 dx = -g dx$. Ponatur $k dx = \frac{dz}{2z}$ ut sit $2z v dv + v^2 dz = -2gz dx$, et sumptis fluentibus erit $z v^2 = Q - S. 2gz dx$, et $v^2 = \frac{Q - S. 2gz dx}{z}$. Quia verò $k dx$

$= \frac{1}{2} \frac{dz}{z}$, erit $S. k dx = \frac{1}{2} L$. z et $S. 2k dx =$

$S. 2k dx$ L. z. Atque ideò si fuerit $L. h = 1, h$

$= z$ undè fit $v^2 = \frac{Q - S. 2gh}{S. 2k dx} \frac{dx}{h}$

pro corporis ascensu; et pro descensu loco $+k$, $-S. 2k dx$

scribendo $-k$ erit $v^2 = \frac{Q - S. 2gh}{-S. 2k dx} \frac{dx}{h}$

$S. 2k dx$ $S. 2k dx$ $-S. 2k dx$
 $= Qh$ $-h$ $S. 2gh$ dx
 in quibus æquationibus variables sunt separatæ, quia (per Hyp.) quantitates k et g, sunt ut functiones variabilis x. Constans Q determinatur ex eo quod ubi $x = b$, sit $v = c$, tempus verò definitur per æquationem $dt = \frac{dx}{v}$ pro corporis

ascensu, et per æquationem $dt = -\frac{dx}{v}$ pro

corporis descensu, in quibus æquationibus, si loco v substituitur ipsius valor per x inventus, variables erunt separatæ. Sed de his vide Mechanicam Clar. Euleri.

(b) 113. * Et tempora quibus corpus describit arcus evanescentes G H, H I, erunt in subdivicatâ ratione altitudinum L H, N I. Eodem enim temporis momento quo corpus vi motus insiti in G, describeret tangentem G L, vi gravitatis uniformi caderet per altitudinem L H qualem in medio non resistente percurreret eo ipso tempore; resistentiæ enim effectus altitudinem

duplicitâ ratione altitudinum LH , NI , quas corpus temporibus illis describere posset, a tangentibus cadendo; ^(c) et velocitates erunt ut longitudines descriptæ GH , HI directè et tempora inversè. Exponantur tempora per T et t , et ve-

locitates per $\frac{GH}{T}$ et $\frac{HI}{t}$;

^(d) et decrementum velocitatis tempore t factum expone-

tur per $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t}$. Hoc

decrementum oritur a resistentiâ corpus retardante, et gravitate corpus accelerante.

Gravitas, in corpore cadente et spatium NI cadendo de-

scribere, generat velocitatem, quâ duplum illud spatium eodem tempore describi potuisset, ^(e) ut Galilæus demonstravit; id est velocitatem $\frac{2NI}{t}$:

^(f) at in corpore arcum HI describente, auget arcum illum solâ longitu-

eam minuit quantitate ejus ipsius respectu infinitè parvâ, quæ itaque hic non est spectanda, itaque corpus arcum GH describere censendum est vi compositâ ex vi motus insiti et vi gravitatis. Et simili modo, tempore eodem quo describit arcum HI , vi gravitatis caderet per altitudinem NI . Quare (per Lem. X. Lib. I.) tempora quibus corpus describit arcus GH , HI , seu quibus cadit per altitudines LH , NI , sunt in subduplicitâ ratione harum altitudinum.

^(c) * Et velocitates erunt (11).

^(d) * Et decrementum velocitatis. Nam si velocitas per arcum HI , eadem esset ac velocitas

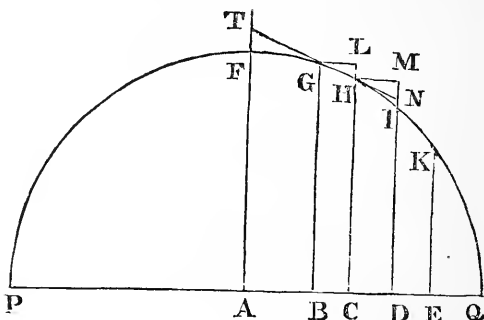
per arcum GH , exponeretur per $\frac{GH}{T}$, est autem illa $\frac{HI}{t}$.

Quare si velocitas decrescat, illius decrementum tempore t factum, exponetur

per $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t}$. Si verò crescat, exponetur per $\frac{HI}{t} - \frac{GH}{T}$;

hoc decrementum vel incrementum oritur a resistentia corpus retardante

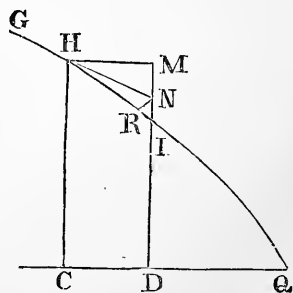
ejusque motui secundum directionem tangentis HN vel arcus HI directè contraria (1) et a gravitate motum corporis descendentis accelerante, vis enim gravitatis in vires duas videlicet normalem et tangentialem divisa (24) corporis in curvâ descendentis motum per vim tangentialem accelerat quem vis normalis nec accelerat, nec



retardat. Quare si resistentia vi gravitatis tangentiali major est, motus retardatur, si minor acceleratur, si æqualis nec acceleratur nec retardatur.

^(e) * Ut Galilæus demonstravit. (Vid. dem. not 29. Lib. I.)

^(f) * At in corpore, &c. Nam solâ vi insitâ, corpus tempore t describeret tangentem HN , et vi gravitatis solâ altitudinem NI , viribus verò



conjunctis describit arcum HI . Quare gravitas spatium a corpore secundum directionem HN vel HI , describendum auget solâ longitudine NI — HN . Est autem $HI - HN = \frac{MI \times NI}{HI}$.

dine $HI - HN$ seu $\frac{MI \times NI}{HI}$; ideóque generat tantum velocitatem

$\frac{2 MI \times NI}{t \times HI}$. Addatur hæc velocitas ad decrementum prædictum, ^(a) et

habebitur decrementum velocitatis ex resistentiâ solâ oriundum, nempe $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2 MI \times NI}{t \times HI}$. Proindeque cùm gravitas eodem tem-

pore in corpore cadente generet velocitatem $\frac{2 NI}{t}$; ^(b) resistentia erit ad

gravitatem ut $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2 MI \times NI}{t \times HI}$ ad $\frac{2 NI}{t}$, sive ut $\frac{t \times GH}{T}$

$- HI + \frac{2 MI \times NI}{HI}$ ad $2 NI$.

Jam pro abscissis CB, CD, CE ^(c) scribantur $-o, o, 2o$. Pro ordinata CH scribatur P , ^(d) et pro MI scribatur series quælibet $Qo + Ro + So^3 +$, &c. Et seriei termini omnes post primum, nempe $Ro + So^3 +$, &c. ^(e) erunt NI , ^(f) et ordinatæ DI, EK , et BG erunt $P - Qo - Ro - So^3 -$, &c. $P - 2Qo - 4Ro - 8So^3 -$, &c. et $P + Qo - Ro + So^3 -$, &c. respectivè. Et quadrando

Si enim centro H et radio HN , descriptus intelligatur arcus circularis NR , secans HI in R , duo triângula IRN, IMH similia erunt, ob angulum MIH utrique triângulo communem, et angulos IRN, IMH rectos, ideóque æquales, undè erit $HI : MI = NI : RI$ seu $HI - HN$; et propterea $HI - HN = \frac{MI \times NI}{HI}$.

Cum igitur RI sit spatium tempore t vi gravitatis tangentiali descriptum (115) velocitas illa quam vis illa tempore t generat, exponitur (29.

Lib. I.) per $\frac{2 RI}{t} = \frac{2 MI \times NI}{t \times HI}$.

^(a) * Et habebitur decrementum velocitatis ex solâ resistentiâ oriundum, nempe $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t}$

$+ \frac{2 MI \times NI}{t \times HI}$, non solum in eo casu quo

resistentia vim gravitatis tangentialem superat, sed etiam in eo casu quo ab istâ superatur. Sit enim velocitatis decrementum ex solâ resistentiâ oriundum V , cùm incrementum velocitatis vi gravitatis tangentiali genitum sit $\frac{2 MI \times NI}{t \times HI}$,

erit in primo casu $V - \frac{2 MI \times NI}{t \times HI} = \frac{GH}{T}$

$- \frac{HI}{t}$ (113), ideóque $V = \frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} +$

$\frac{2 MI \times NI}{t \times HI}$; at in secundo casu erit (113)

$\frac{2 MI \times NI}{t \times HI} - V = \frac{HI}{t} - \frac{GH}{T}$, et proinde $V = \frac{2 MI \times NI}{t \times HI} + \frac{GH}{T} - \frac{HI}{t}$, quæ eadem est expressio ac prius.

^(b) * Resistentia erit ad gravitatem, &c. Vires enim acceleratrices vel retardatrices sunt ut velocitatum elementa quæ dato temporis momenta generant aut extinguunt, (15. Lib. I.)

^(c) * Scribantur $-o, o, 2o$. Si enim abscissæ CD, CE affirmativè capiantur, abscissæ CB , &c. in contrariam partem sumptæ negativè debent exprimi.

^(d) * Et pro MI scribatur series quælibet. Nam ordinatorum CH, DN differentia fluxionalis MI exprimi potest per seriem infinitam $Qo + Ro + So^3 +$, &c. in quâ Q, R, S , &c. sunt quantitates finitæ hic generaliter sumptæ et postea in singulis casibus determinandæ, et o est incrementum nascent et constans abscissæ (552, 556. Lib. I.)

^(e) * Erunt NI , &c. (552. Lib. I.)

^(f) * Et ordinatæ, &c. Est enim $DI = DM - MI = CH - MI = P - Qo - Ro - So^3 -$, &c. (per Hyp.); et quia $CE = 2o$, si in valore ordinatæ DI loco o scribatur $2o$, abibit DI in $EK = P - 2Qo - 4Ro - 8So^3 -$, &c.; et simili modo quia $CB = -o$, si in valore ordinatæ DI loco $+o$ scribatur $-o$, fiet $DI = BG = P + Qo - Ro + So^3 -$, &c.

differentias ordinarum $B G - C H$ et $C H - D I$, et ad quadrata prodeuntia addendo quadrata ipsarum $B C$, $C D$, ^(g) habebuntur arcuum $G H$, $H I$ quadrata $00 + Q Q 00 - 2 Q R 00^3 +$, &c. et $00 + Q Q 00 + 2 Q R 00^3 +$, &c.

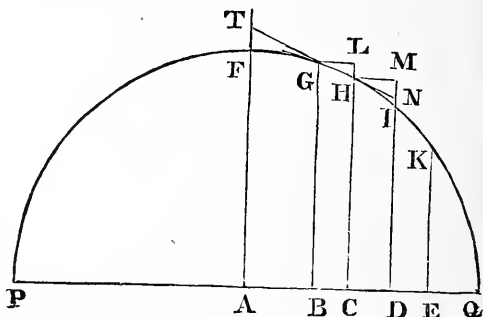
Quorum radices $0 \sqrt{1 + Q Q}$

$$- \frac{Q R 00}{\sqrt{1 + Q Q}}, \text{ et } 0 \sqrt{1 + Q Q}$$

$$+ \frac{Q R 00}{\sqrt{1 + Q Q}} \text{ sunt arcus}$$

$G H$ et $H I$. Præterea si ab ordinatâ $C H$ subducatur semisumma ordinarum $B G$ ac $D I$, et ab ordinatâ $D I$

subducatur semisumma ordinarum $C H$ et $E K$, ^(h) manebunt arcuum $G I$ et $H K$ sagittæ $R 00$ et $R 00 + 3 S 00^3$. ^(k) Et hæ sunt lineolis $L H$ et $N I$ proportionales, ideoque in duplicatâ ratione temporum infinitè parvorum T et t : ^(l) et inde ratio $\frac{t}{T}$ est $\sqrt{\frac{R + 3 S 0}{R}}$ seu $\frac{R + \frac{3}{2} S 0}{R}$;



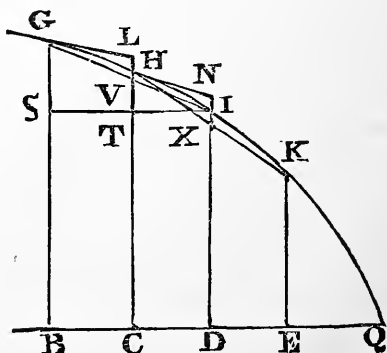
^(g) * Habebuntur arcuum $G H$, $H I$ quadrata, &c. Est enim, ob angulum $H M I$ rectum $H I^2 = H M^2 + M I^2$, et $H M = C D = 0$, ac $M I = C H - D I = Q 0 + R 00 + S 0^3 +$, &c. ideoque $H M^2 = 00$, $M I^2 = Q^2 0^2 + 2 Q R 00^3 + R^2 0^4 + 2 Q S 0^4 +$, &c.; unde $H I^2 = 0^2 + Q Q 0^2 + 2 Q R 0^3 +$, &c. Negliguntur autem termini in quibus est 0^4 , 0^5 , &c. quod præ cæteris antecedentibus evanescant et ad rem nihil faciant. Quare extrahendæ radicem quadratum fit $H I =$

$$0 \sqrt{1 + Q Q} + \frac{Q R 00}{\sqrt{1 + Q Q}}, \text{ neglectis}$$

$$\text{cæteris terminis negligendis: et simili modo invenitur } G H = 0 \sqrt{1 + Q Q} - \frac{Q R 00}{\sqrt{1 + Q Q}}.$$

^(h) * Manebunt arcuum $G I$ et $H K$ sagittæ, &c. Jungatur chorda $G I$ secans $C H$ in V , et ex puncto I demittatur ad $B G$ perpendiculariculum $I S$ secans $C H$ in T . Erit, ob triangulorum $I T V$, $I S G$ similitudinem $I T$ ad $I S$, seu $D C$ ad $D B$, id est, 1 ad 2 , ut $T V$ ad $G S$, et ideò $G S = 2 V T$, et $G B = 2 V T + S B = 2 V T + D I$, et $G B + D I = 2 V T + 2 D I$, quare semisumma ordinarum $G B$ ac $D I$ est $V T + D I$, seu $V C$, quæ si ab ordinatâ $C H$ subducatur, remanebit arcus $G I$ sagittæ $V H$. Et simili ratiocino patet arcus $H K$ sagittam $I X$ æqualem esse differentię inter ordinatam $D I$ et semisummam ordinarum $C H$ et $E K$.

^(k) * Et hæ sunt lineolis $L H$ et $N I$ proportionales. Nam coëuntibus punctis B , C , D , E et G , H , I , K figuræ $N H I X H$, $L G H V G$



similes fiunt, et propterea latera homologa $H V$ et $I X$, $L H$ et $N I$ proportionalia; sunt autem (ex demonstr.) lineolæ $L H$, $N I$ ut quadrata temporum T , t , quibus describuntur arcus $G H$, $H I$.

^(l) * Et inde ratio $\frac{t}{T}$ est, &c. Nam (ex demonstr.) $\frac{t^2}{T^2} = \frac{I X}{H V} = \frac{R 00 + 3 S 0^3}{R 00} =$

et $\frac{t \times G H}{T} - H I + \frac{2 M I \times N I}{H I}$, substituendo ipsorum $\frac{t}{T}$, $G H$,

$H I$, $M I$ et $N I$ valores jam inventos, ^(m) evadit $\frac{3 S o o}{2 R} \sqrt{1 + Q Q}$.

Et cum $2 N I$ sit $2 R o o$, resistentia jam erit ad gravitatem ut $\frac{3 S o o}{2 R}$

$\sqrt{1 + Q Q}$ ad $2 R o o$, id est, ut $3 S \sqrt{1 + Q Q}$ ad $4 R R$.

Velocitas autem ea est, quâcum corpus de loco quovis H , secundum tangentem $H N$ egrediens, in parabolâ diametrum $H C$ et latus rectum $\frac{H N q}{N I}$ seu $\frac{1 + Q Q}{R}$ habente, ⁽ⁿ⁾ deinceps in vacuo moveri potest.

Et resistentia est ut medii densitas et quadratum velocitatis conjunctim, et propterea medii densitas est ut resistentia directè et quadratum velocitatis inversè, ^(o) id est, ut $\frac{3 S \sqrt{1 + Q Q}}{4 R R}$ directè et $\frac{1 + Q Q}{R}$ inversè, hoc est, ut $\frac{S}{R \sqrt{1 + Q Q}}$. Q. e. i.

$$\frac{R + \frac{3}{2} S o}{R}, \text{ et ideo } \frac{t}{T} = \sqrt{\frac{R + \frac{3}{2} S o}{R}} = \sqrt{\frac{R R + \frac{3}{2} S R o}{R R}} = \sqrt{\frac{R R + \frac{3}{2} S R o}{R R}};$$

sed $\sqrt{R R + \frac{3}{2} S R o} = R + \frac{\frac{3}{2} S R o}{2 R}$, neglectis terminis negligendis: quare erit $\frac{t}{T} =$

$$\frac{R + \frac{3}{2} S o}{R} = 1 + \frac{\frac{3}{2} S o}{2 R}.$$

^(m) * Evadit $\frac{3 S o o}{2 R} \sqrt{1 + Q Q}$. Estenim

$$\frac{t \times G H}{T} = o \sqrt{1 + Q Q} - \frac{Q R o o}{\sqrt{1 + Q Q}} + \frac{\frac{3}{2} S o o \sqrt{1 + Q Q}}{R}, \text{ neglecto termino in}$$

quo reperitur o^3 , qui præ cæteris evanescit.

$$\text{Unde fit } \frac{t \times G H}{T} - H I = \frac{\frac{3}{2} S o o \sqrt{1 + Q Q}}{R}$$

$$- \frac{2 Q R o o}{\sqrt{1 + Q Q}}; \text{ sed } 2 M I = 2 Q o, \text{ et } N I =$$

$R o o$ neglectis cæteris seriei terminis evanescentibus, ideoque $2 M I \times N I = 2 Q R o^3$, atque proinde $\frac{2 M I \times N I}{H I} = \frac{2 Q R o^3}{\sqrt{1 + Q Q}}$,

neglecto in valore arcûs $H I$ termino evanescente

$$\frac{Q R o o}{\sqrt{1 + Q Q}}. \text{ Quare erit } \frac{t \times G H}{T} - H I +$$

$$\frac{2 M I \times N I}{H I} = \frac{3 S o o \sqrt{1 + Q Q}}{2 R}.$$

⁽ⁿ⁾ * Deinceps in vacuo moveri potest. Cum enim velocitas per arcum $H I$, seu per tangentem nascentem $H N$, æquabilis censi possit (5), et corpus eodem temporis momento quo vi insitâ describeret $H N$, vi gravitatis uniformi, ommissa resistentia quæ hic ut nulla haberi debet (113), cadit per altitudinem $N I$; arcus nascent $H I$, quem corpus viribus conjunctis describit, usurpari potest pro arcu parabolæ, cujus est diameter $H C$ (40. Lib. 1.), tangens $H N$ ordinatis parallela, et $N I$ parallela et æqualis abscissæ cui responderet ordinata æqualis $H N$.

Quare hujus parabolæ latus rectum erit $\frac{H N^2}{N I}$

(per Theor. I. de parab.), seu (per Lemma VII. Lib. I.) $\frac{H I^2}{N I} = \frac{o o + Q Q o o}{R o o} = \frac{1 + Q Q}{R}$,

neglectis terminis negligendis. Si itaque corpus in vacuo deinceps moveretur, hanc parabolam describeret (40. Lib. I.)

^(o) * Id est, ut, &c. Quia enim resistentia est ad gravitatem constantem ut $3 S \sqrt{1 + Q Q}$ ad $4 R R$, erit resistentia ut $\frac{3 S \sqrt{1 + Q Q}}{4 R R}$.

Velocitas autem est ut $\frac{H I}{t}$, et illius quadratum

ut $\frac{H I^2}{t^2}$; et $H I^2$ est $o o + Q Q o o$, neglectis negligendis, t^2 verò est ut $N I$, seu ut $R o o$

(ex demonstr.) adeoque velocitatis quadratum ut $\frac{1 + Q Q}{R}$. Quare medii densitas erit ut

Corol. 1. Si tangens HN producat utrinque donec occurrat ordinatæ cuilibet AF in T : (P) erit $\frac{HT}{AC}$ æqualis $\sqrt{1 + QQ}$, ideóque in supe-

$$\frac{3S\sqrt{1+QQ}}{4R(1+QQ)}, \text{ et ob datum numerum } \frac{3}{4}, \text{ ut}$$

$$S. \sqrt{1+QQ} = \frac{S}{R(1+QQ)} = \frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}.$$

114. Si resistentia esset ut medii densitas et velocitatis V dignitas quælibet V^n conjunctim;

$$\text{cùm sit } V^n \text{ ut } \frac{H I^n}{t^n}, \text{ sive ut } \frac{(1+QQ)^{\frac{n}{2}}}{R^{\frac{n}{2}}}$$

medii densitas foret ut $\frac{3S\sqrt{1+QQ}}{4RR}$ directè

et $\frac{(1+QQ)^{\frac{n}{2}}}{R^{\frac{n}{2}}}$ inversè, id est, directè ut

$$\frac{SR^{\frac{n-4}{2}}}{(1+QQ)^{\frac{n-1}{2}}}$$

^{v)} * Erit $\frac{HT}{AC}$ æqualis, &c.

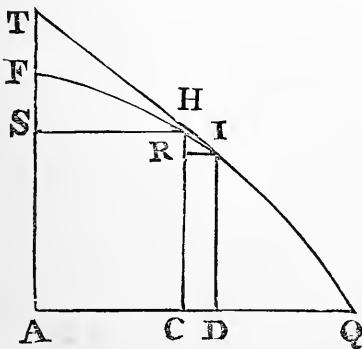
Ex punctis H et I demittantur ad AF et CH perpendiculara HS et IR ; et ob triangu-
la IRH , HST similia, erit HT
ad HS seu AC ut HI ad IR

vel CD , ideóque $\frac{HT}{AC} =$

$$\frac{HI}{CD} = \frac{0\sqrt{1+QQ}}{0} =$$

$$\sqrt{1+QQ}.$$

115. Hinc si resistentia sit ut

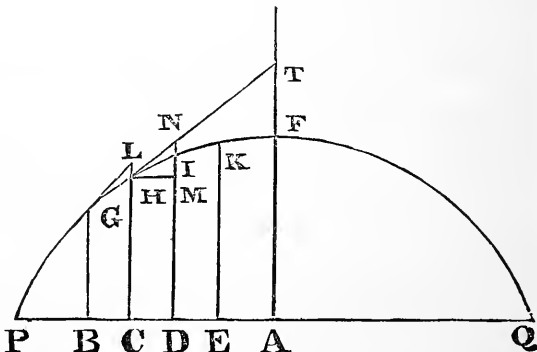


medii densitas et velocitatis dignitas V^n conjunc-
tim, erit resistentia ad gravitatem, ut $SS \times HT$
ad $4RR \times AC$, velocitatis dignitas n . ut

$$\frac{HT^n}{AC^n \times R^{\frac{n}{2}}} \text{ et medii densitas ut } \frac{SR^{\frac{n-4}{2}} \times AC^{n-1}}{HT^{n-1}},$$

$$\text{sive ut } \frac{S}{R^{\frac{n}{2}}} \times \frac{AC^n}{HT^n} \quad (114.)$$

116. Superiores formulæ non solùm pro cor-
poris descensu per arcum FQ , sed etiam pro
ejusdem ascensu per arcum PF usurpari pos-
sunt. Corpore ascendente per arcum PF a
 P ad F , eadem fiat quæ pro descensu per arcum
 FQ constructio; et tempora quibus describun-
tur arcus GH , HI exponantur per T et t .



Decrementum velocitatis tempore t factum erit
 $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t}$. Hoc decrementum oritur a re-

sistentiâ et gravitate corporis ascendenti motum
simul retardantibus. Gravitas in corpore cadente
et spatium NI cadendo describente, generat ve-

locitatem $\frac{2NI}{t}$; at in corpore arcum HI de-

scribente, minuit arcum illum solâ longitudine
 $HN - HI$ seu $\frac{MI \times NI}{HI}$, ideóque extinguit

tantum velocitatem tangentialem $\frac{2MI \times NI}{t \times HI}$.

Auferatur hæc velocitas a decremento prædicto,
et habebitur decrementum velocitatis ex resis-

tentiâ solâ oriundum, nempe $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} -$

$\frac{2MI \times NI}{t \times HI}$. Proindeque cùm gravitas eodem

tempore in corpore cadente generet velocitatem

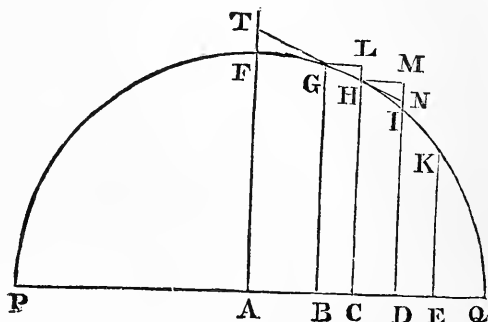
rioribus pro $\sqrt{1 + Q Q}$ scribi potest. Quâ ratione resistentia erit ad gravitatem ut $3 S \times H T$ ad $4 R R \times A C$, velocitas erit ut $\frac{H T}{A C \sqrt{R}}$,

et medii densitas erit ut $\frac{S \times A C}{R \times H T}$.

Corol. 2. Et hinc, si curva linea $P F H Q$ definiatur per relationem inter basem seu abscissam $A C$ et ordinatim applicatam CH , ut moris est; et valor ordinatim applicatæ resolvatur in seriem convergentem. Problema per primos seriei terminos expeditè solvetur, ut in exemplis sequentibus.

Exempl. 1. Sit linea $P F H Q$ semicirculus super diametro $P Q$ descriptus, et requiratur medii densitas quæ faciat ut projectile in hâc lineâ moveatur.

Bisecetur diameter $P Q$ in A ; dic $A Q$, n ; $A C$, a ; CH , e ; et CD , o : et ^(q) erit $D I q$ seu $A Q q - A D q = n n - a a - 2 a o - o o$,



$\frac{2 N I}{t}$; resistentia erit ad gravitatem ut $\frac{G H}{T}$ + $Q Q o o - 2 Q R o^3$; quorum radices
 $-\frac{H I}{t} - \frac{2 M I \times N I}{t \times H I}$ ad $\frac{2 N I}{t}$, sive ut
 $\frac{t \times G H}{T} - H I - \frac{2 M I \times N I}{H I}$ ad $2 N I$.
 $o \sqrt{1 + Q Q} + \frac{Q R o o}{\sqrt{1 + Q Q}}$ et $o \sqrt{1 + Q Q}$
 $-\frac{Q R o o}{\sqrt{1 + Q Q}}$ sunt arcus $G H$ et $H I$. Præ-

Jam si pro abscissis $B C$, $C D$, $C E$ scriban-
 tur $-o$, o , $2 o$, et pro ordinata CH scribatur
 P ; $M I$ et $N I$ erunt $Q o - R o o - S o^3 -$,
 &c., et $R o o + S o^3 +$, &c. Nam in arcu
 $F Q$ (vide fig. Newt.) $D I$, seu $CH - MN$
 $- N I$, erat $P - Q o - R o o - S o^3$, &c.,
 ideóque $M N$ erat $Q o$ (552. Lib. I.), et $N I$
 erat $R o o + S o^3$; at in arcu $P F$ est $D I$
 $= CH + M N - N I$, proindeque $D I =$
 $P + Q o - R o o - S o^3$, &c., et hinc $M I$
 est $Q o - R o o - S o^3$, &c. et $N I$ est $R o o$
 $+ S o^3$. Et si in serie quæ valorem ordinatæ
 $D I$ exprimit, loco o scribantur abscissæ $C E$,
 $B C$, sive $2 o$, $-o$, habebuntur ordinatæ $E K$
 et $B G$, nempe $P + 2 Q o - 4 R o o -$
 $8 S o^3$, &c., et $P - Q o - R o o + S o^3$,
 &c. respectivè. Et quadrando differentias ordi-
 natarum $CH - B G$ et $D I - C H$, et ad
 quadrata prodeuntia addendo quadrata ipsa-
 rum $B C$, $C D$, habebuntur arcuum $G H$, $H I$
 quadrata $o o + Q Q o o + 2 Q R o^3$, et $o o$

terea si ab ordinatâ CH subducatur semisum-
 ma ordinarum $B G$ ac $D I$, et ab ordi-
 nata $D I$ subducatur semisumma ordinata-
 rum CH et $E K$, manebunt arcuum $G I$ et
 $H K$ sagittæ $R o o$ et $R o o + 3 S o^3$. Et
 hæc sunt lineolis $L H$, $N I$ proportionales, ideó-
 que in duplicatâ ratione temporum infinitè par-
 vorum T et t , et inde ratio $\frac{t}{T}$ est, $\sqrt{\frac{R + 3 S o}{R}}$
 seu $\frac{R + 3 S o}{R}$; et $\frac{t \times G H}{T} - H I - \frac{2 M I \times N I}{H I}$,
 substituendo ipsorum $\frac{t}{T}$, $H I$, $G H$, $M I$ et

$N I$ valores jam inventos, evadit $\frac{3 S o o}{2 R} \times$
 $\sqrt{1 + Q Q}$. Et cum $2 N I$ sit $2 R o o$, re-
 sistentia erit ad gravitatem ut $3 S \sqrt{1 + Q Q}$
 ad $4 R R$. Quemadmodum pro descensu in-
 ventum est; et Corollaria eadem quoque manent.
 (q) * Erit $D I q$ seu, &c. Est enim radius

seu $e e - 2 a o - o o$, (r) et radice per methodum nostram extractâ, fiet $D I = e - \frac{a o}{e} - \frac{o o}{2 e} - \frac{a a o o}{2 e^3} - \frac{a o}{2 e^3} - \frac{a^3 o^3}{2 e^5} -$, &c. Hic scribatur $n n$ pro $e e + a a$, et evadet $D I = e - \frac{a o}{e} - \frac{n n o o}{2 e^3} - \frac{a n n o^3}{2 e^5} -$, &c.

Hujusmodi series distingo in terminos successivos in hunc modum. Terminum primum appello, in quo quantitas infinitè parva o non extat; secundum, in quo quantitas illa est unius dimensionis; tertium, in quo extat duarum; quartum, in quo trium est; et sic in infinitum. (s) Et primus terminus, qui hic est e , denotabit semper longitudinem ordinatæ $C H$ insistentis ad initium indefinitæ quantitatis o . (t) Secundus terminus, qui hic est $\frac{a o}{e}$, denotabit differentiam inter $C H$ et $D N$, id est, lineolam $M N$, quæ abscinditur complendo parallelogrammum $H C D M$, (u) atque ideò positionem tangentis $H N$ semper determinat; ut in hoc casu capiendò $M N$ ad $H M$ ut est $\frac{a o}{e}$ ad o , seu a ad e . Terminus tertius, qui hic est $\frac{n n o o}{2 e^3}$, designabit lineolam $I N$, quæ jacet inter tangentem et curvam, (x) ideòque determinat angulum contactus $I H N$ seu curvaturam

$A I = A Q$, et ideò, ob angulum $A D I$ rectum, $D I^2 = A Q^2 - A D^2 = n n - a a$ radii, $H P I$ chorda arcûs $H I$, $N P$ arcus circularis centro H et radio $H N$ descriptus. $- 2 a o - o o = e e - 2 a o - o o$, ob $C H^2 = e e = A Q^2 - A C^2 = n n - a a$.

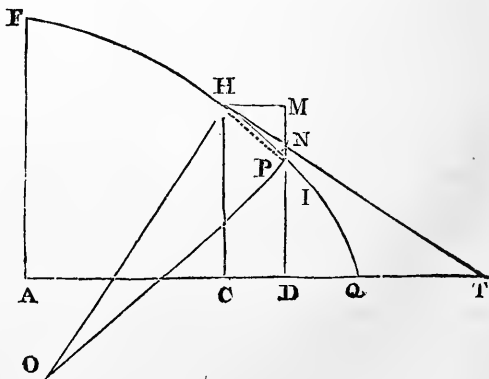
(r) * Et radice per methodum nostram extractâ, seu per formulam generalem. (550. Lib. I.)

(s) * Et primus terminus. (552. Lib. I.)

(t) * Secundus terminus. (ibid.)

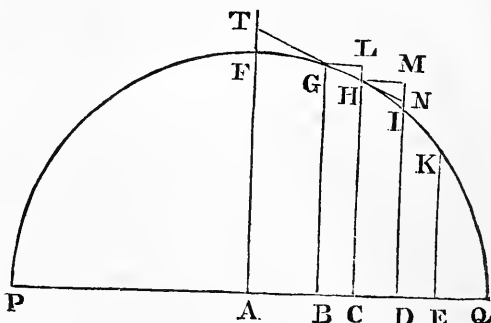
(u) 117. * Atque ideò positionem tangentis $H N$ semper determinat. Producat tangens $H N$ ut diametro $A Q$ occurrat in T ; et propter triangulorum $H M N$, $T C H$ similitudinem, erit $C T : H C = H M : M N$. Est verò generatim $H M = o$, et $M N = Q o$, ac Q coëfficiens secundi termini seriei generalis pro curvâ quâcumque (ex demonstr. Prop. X.); quare si capiatur $C T$ ad $H C$ ut est 1 ad Q habebitur subtangens $C T$.

(x) 118. * Ideòque determinat angulum contactus seu curvaturam, &c. Sit O centrum circuli curvam $F H Q$ osculantis in H ; $O H$, $O I$



Duo triângula $I P N$, $I M H$ similia erunt, ob angulos ad P et M rectos et angulum ad I utriusque triângulo communem; et ideò $H I$ est ad

quam curva linea habet in H. (^y) Si lineola illa I N finitæ est magnitudinis, designabitur per terminum tertium unâ cum sequentibus in infinitum. At si lineola illa minuatur in infinitum, termini subsequentes evadent infinitè minores tertio, ideòque negligi possunt. (^z) Terminus quartus determinat variationem curvaturæ, quintus variationem variationis, et sic deinceps. Unde obiter patet usus non contemnendus harum serierum in solutione problematum, quæ pendent a tangentibus et curvaturâ curvarum.



Conferatur jam series $e - \frac{a o}{e} - \frac{n n o o}{2 e^3} - \frac{a n n o^3}{2 e^5} \rightarrow$, &c. cum serie $P - Q o - R o o - S o^3 \rightarrow$, &c. et perinde pro P, Q, R et S scribatur $e, \frac{a}{e}, \frac{n n}{2 e^3}$, et $\frac{a n n}{2 e^5}$, et pro $\sqrt{1 + Q Q}$ scribatur $\sqrt{1 + \frac{a a}{e e}}$

(^a) seu $\frac{n}{e}$, et prodibit medii densitas ut $\frac{a}{n e}$, hoc est (ob datam n) ut $\frac{a}{e}$, seu

$\frac{A C}{C H}$, (^b) id est, ut tangentis longitudo illa H T, quæ ad semidiametrum

H M ut N I ad N P, ac proinde N P = $\frac{H M \times N I}{H I}$. Anguli N H I, quem tangens

H N cum subtensa H P I constituit, mensura est dimidius arcus H I, et anguli ad centrum H O I mensura est arcus totus H I (ex natura

circuli); unde N P seu $\frac{H M \times N I}{H I}$ est ad

H N seu H I (Lem. VII. Lib. I.) ut $\frac{\frac{1}{2} H I}{H I^3}$ ad H O, et ideò radius osculi H O = $\frac{2 H M \times N I}{H I^3}$.

Et quia (ex demonstr. Prop. X.) H I = $o \sqrt{1 + Q Q}$, H M = o, ac N I = R o o;

erit H O = $\frac{(1 + Q Q)^{\frac{3}{2}}}{2 R}$ Sed angulus con-

tactus et curvatura curvæ lineæ F H Q in H est ut radius osculi H O inverse (121. Lib. I.), id

est, ut $\frac{2 R}{(1 + Q Q)^{\frac{3}{2}}}$. Quare angulus ille, seu

curvatura in H, datis secundo et tertio termino seriei in quam valor ordinatim applicatæ resolvitur, determinabitur.

(^y) * Si lineola illa I N, &c. (552. 553. Lib. I.)

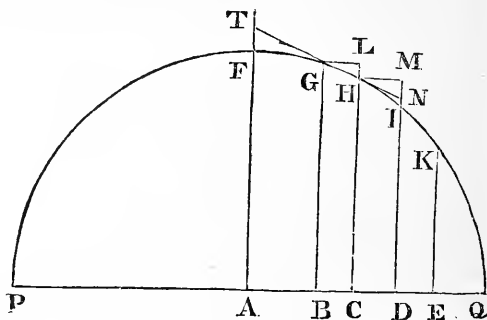
(^z) * Terminus quartus determinat variationem curvaturæ. Quoniam differentia linearum L H et N I quarto seriei termino proportionalis est (554) et per lineolam N I determinatur angulus contactus seu curvatura curvæ in puncto H (118) et per lineolam L H curvatura in puncto G; per harum linearum differentiam seu per quartum seriei terminum determinabitur differentia seu variatio curvaturæ, ductâque aliâ tangente similiter determinabitur variatio variationis, et sic deinceps.

(^a) * Seu $\frac{n}{e}$. Est enim $1 + \frac{a a}{e e} = \frac{e e + a a}{e e} = \frac{n n}{e e}$.

(^b) * Id est, ut tangentis longitudo illa H T, &c. Jungatur radius A H, et ob angulum rectum quem tangens T H cum radio A H constituit, parallelasque A T, C H, triangulum A H C simile erit triangulo A T H, et inde est T H ad H A, ut A C ad H C, id est, $\frac{A C}{H C}$ est

A F ipsi P Q normaliter insistentem terminatur: et resistentia erit ad gravitatem ut 3 a ad 2 n, id est, ut 3 A C ad circuli diametrum P Q: (c) velocitas autem erit ut \sqrt{CH} . Quare si corpus justâ cum velocitate secundum lineam ipsi P Q parallelam exeat de loco F, et medii densitas in singulis locis H sit ut longitudo tangentis H T, et resistentia etiam in loco aliquo H sit ad vim gravitatis ut 3 A C ad P Q, corpus illud describet circuli quadrantem F H Q. Q. e. i.

At si corpus idem de loco P, secundum lineam ipsi P Q perpendicularem egredieretur, et in arcu semicirculi P F Q moveri inciperet, sumenda esset A C seu a ad contrarias partes centri A, et propterea signum ejus mutandum esset et (d) scribendum — a pro + a. Quo pacto prodiret medii densitas ut $-\frac{a}{c}$. Negativam autem densitatem, hoc est, quæ motus corporum accelerat, natura non



ut $\frac{H T}{A H}$ seu ut H T ob datum radium A H.

(c) * *Velocitas autem erit ut \sqrt{CH} . Nam (ex demonstr. Prop. X.) velocitas est ut $\sqrt{\frac{1+QQ}{R}}$, id est, ut $\sqrt{2e}$, vel $\sqrt{2CH}$ ideóque ut \sqrt{CH} .*

119. Quoniam igitur velocitas est ut \sqrt{CH} , medii densitas ut tangens H T, et resistentia ut A C, (quia gravitas et circuli diameter P Q data sunt) corpore perveniente ad punctum Q lineæ horizontalis, velocitas ejus nulla erit, medii densitas infinita, resistentia finita. Si verò ponatur CH negativa, ut corpus infra horizontalem P Q pergat; fiet velocitas ut $\sqrt{-CH}$, quantitas imaginaria; et ideó corpus non potest infra horizontalem P Q descendere. At dum corpus est in F, velocitas ejus est ut \sqrt{AF} , medii densitas nulla, et resistentia nulla.

(d) * *Scribendum — a pro + a. Nam formula quæ densitatem medii exponit, corporis ascensui, et descensui communis est, sicut et aliæ formulæ quæ resistentiam et velocitatem exponunt (116); et idcirco ut quantitas quæ densitatem medii corpore descendente exponit eandem exponat pro corporis ascensu per eum-*

dem vel similem et æqualem arcum, substituentur est in illâ quantitate valor abscissæ, quæ corpore descendente hic positiva est, ascendente negativa.

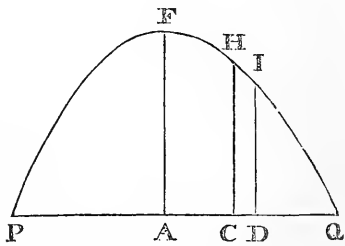
120. Atque hinc generatim colligitur eundem curvæ arcum, vel similes et æquales utrinque ab axe arcus, non posse ascensui et descensui describi in uno medio densitatis utcumque variabilis, id est, si arcus unus ascensui describi potest, descensui describi non posse, et contra. Nam si in solutione problematis hujusce pro corporis descensui per arcum F Q, origo abscissæ positivæ A C statuatur in A, et pro C B, C D, C E scribantur — o, o, 2 o, erit resistentia ut $\frac{S\sqrt{1+QQ}}{RR}$.

Pro ascensui per eundem arcum a Q ad F, abscissa eadem A C sumenda erit negativè, cumque sit o abscissæ fluxio, loco C B, C D, C E scribendum erit o, — o, — 2 o in valoribus linearum M I, N I, D I, E K et B G; et absoluto calculo, ut in eadem pro descensui solutione, resistentia pro ascensui invenietur proportionalis quantitati $-\frac{S\sqrt{1+QQ}}{RR}$, quæ negativa est, si prior $+\frac{S\sqrt{1+QQ}}{RR}$, quæ pro descensui erat, positiva sit; et contra.

admittit: et propterea naturaliter fieri non potest, ut corpus ascendendo a P describat circuli quadrantem P F. Ad hunc effectum deberet corpus a medio impellente accelerari, non a resistente impediri.

Exempl. 2. Sit linea P F Q parabola, axem habens A F horizonti P Q perpendicularem, et requiratur medii densitas, quæ faciat ut projectile in ipsâ moveatur.

(^e) Ex naturâ parabolæ, rectangulum P D Q æquale est rectangulo sub ordinatâ D I et rectâ aliquâ datâ: hoc est, si dicantur recta illa b; P C, a; P Q, c; C H, e; et C D, o; rectangulum a + o in c — a — o seu a c — a a — 2 a o + c o — o o æquale est rectangulo b in D I, ideóque D I æquale $\frac{a c - a a}{b} +$

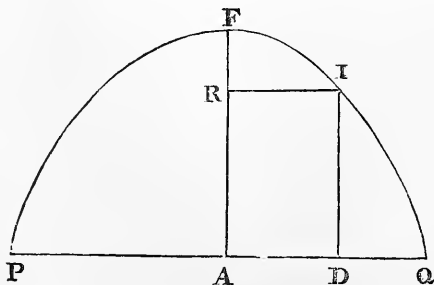


$\frac{c - 2 a}{b} o - \frac{o o}{b}$. Jam scribendus esset hujus seriei secundus terminus

$\frac{c - 2 a}{b} o$ pro Q o, tertius item terminus $\frac{o o}{b}$ pro R o o. Cum verò plures

non sint termini, debet quartus coëfficiens S evanescere, et propterea quantitas $\frac{S}{R \sqrt{1 + Q Q}}$, cui medii densitas proportionalis est, nihil erit.

Nullâ igitur medii densitate movebitur projectile in parabolâ, (^f) uti olim demonstravit Galilæus. Q. e. i.



(^e) * Ex natura parabolæ, rectangulum, &c. Ex puncto I ad axem parabolæ F A demissum sit perpendicularum I R, sitque axis latus rectum = b; erit (per Theor. I. de Parab.) b × F R = R I² = A D², et b × F A = A Q². Quare b × F A — b × F R, seu b × R A, Vol. I.

vel b × D I = A Q² — A D² = A Q + A D × A Q — A D = P D × D Q. Q. e. d.

(^f) * Uti olim demonstravit Galilæus. Vide demonstrationem n. 40. Lib. I.

Exempl. 3. Sit linea A G K hyperbola, asymptoton habens N X plano horizontali A K perpendiculari; et quærat mediæ densitas, quæ faciat ut projectile moveatur in hac lineâ.

Sit M X asymptotos altera, ordinatim applicatæ D G productæ occurrens in V; et ex naturâ hyperbolæ

(^e) rectangulum X V in V G dabitur.

(^b) Datur autem ratio D N ad V X, et propterea datur etiam rectangulum D N in V G. Sit illud b b; et completo parallelogrammo D N X Z; dicatur B N, a; B D, o; N X, c; et ratio data V Z ad Z X vel D N ponatur esse $\frac{m}{n}$.

Et erit D N æqualis a — o, V G æqualis $\frac{b b}{a - o}$, V Z æqualis $\frac{m}{n} a - o$, et

G D seu N X — V Z — V G æqualis

$c - \frac{m}{n} a + \frac{m}{n} o - \frac{b b}{a - o}$. Resolvatur terminus $\frac{b b}{a - o}$ (ⁱ) in seriem

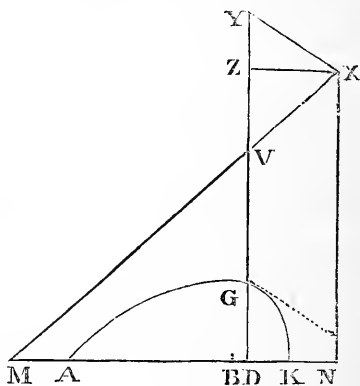
convergentem $\frac{b b}{a} + \frac{b b}{a} o + \frac{b b}{a} o o + \frac{b b}{a} o^3$, &c. et fiet G D æqualis

$c - \frac{m}{n} a - \frac{b b}{a} + \frac{m}{n} o - \frac{b b}{a} o - \frac{b b}{a^3} o^2 - \frac{b b}{a^4} o^3$, &c. (^k) Hujus seriei

terminus secundus $\frac{m}{n} o - \frac{b b}{a} o$ usurpandus est pro Q o, tertius cum signo

mutato $\frac{b b}{a^3} o^2$ pro R o², et quartus cum signo etiam mutato $\frac{b b}{a^4} o^3$ pro

S o³, eorumque coëfficientes $\frac{m}{n} - \frac{b b}{a a}$, $\frac{b b}{a^3}$ et $\frac{b b}{a^4}$ scribendæ sunt in



(^e) * Rectangulum X V in V G dabitur, per Theor. IV. de Hyp.

(^b) * Datur autem ratio D N ad V X, quæ eadem est cum ratione data M N ad M X, ob parallelas D V, N X.

(ⁱ) * In seriem convergentem, divisione in infinitum productâ.

(^k) Hujus seriei, &c. Est enim hæc series æqualis seriei P — Q o — R o o — S o³ —, &c., et singuli illius termini singulis terminis hujus æquantur; id est, $c - \frac{m}{n} a - \frac{b b}{a}$ est P, seu ordinata quæ per punctum B ad hyperbolam duceretur; $+\frac{m}{n} o - \frac{b b}{a} o$ est — Q o, et

ideò $\frac{m}{n} - \frac{b b}{a a} = - Q$; sed quia in expressionibus resistentiæ, densitatis, et velocitatis semper reperitur quadratum Q Q, quod idem manet, seu radix illius Q affirmativè sumatur, seu negativè, nihili interest scribere $\frac{b b}{a a} - \frac{m}{n}$, aut

$\frac{m}{n} - \frac{b b}{a a}$ pro Q. Secundus autem seriei terminus $-\frac{b b}{a^3} o^2$ est — R o², et ideò, mutatis signis, fit $\frac{b b}{a^3} = R$; tertius terminus $-\frac{b b}{a^4} o^3$ est — S o³, atque proinde $\frac{b b}{a^4} = S$.

regula superiore pro Q, R et S. Quo facto prodit medii densitas ut

$$\frac{\frac{b b}{a^4}}{\frac{b b}{a^3} \sqrt{1 + \frac{m m}{n n} - \frac{2 m b b}{n a a} + \frac{b^4}{a^4}}}^{(1)} \text{ seu } \frac{1}{\sqrt{a a + \frac{m m}{n n} a a - \frac{2 m b b}{n} + \frac{b^4}{a a}}}$$

(^m) id est si in V Z sumatur V Y æqualis V G, ut $\frac{1}{X Y}$. Namque a a et

$$\frac{m m}{n n} a a - \frac{2 m b b}{n} + \frac{b^4}{a a} \text{ sunt ipsarum } X Z \text{ et } Z Y \text{ quadrata. } (^n) \text{ Re-}$$

sistentia autem invenitur in ratione ad gravitatem quam habet 3 X Y ad 2 Y G; (^o) et velocitas ea est, quâcum corpus in parabolâ pergeret verticem G, diametrum D G, et latus rectum $\frac{X Y \text{ quad.}}{V G}$ habente. Ponatur

itaque quod medii densitates in locis singulis G sint reciprocè ut distantiae X Y, quodque resistentia in loco aliquo G sit ad gravitatem ut 3 X Y ad 2 Y G; et corpus de loco A, justâ cum velocitate emissum, describet hyperbolam illam A G K. Q. e. i.

Exempl. 4. Ponatur indefinitè, quod linea A G K hyperbola sit, centro X, asymptotis M X, N X eâ lege descripta, ut constructo rectangulo X Z D N cujus latus Z D secet hyperbolam in G et asymptoton ejus in V, fuerit V G reciprocè ut ipsius Z X vel D N dignitas aliqua D Nⁿ, (^p) cujus index est numerus n: et quæraturn medii densitas, quâ projectile progrediatur in hâc curvâ.

(¹) * Seu, numeratore et denominatore in $\frac{a^4}{b b}$ ductis.

(^m) * Id est, si in V Z sumatur, &c. Est enim $V G = \frac{b b}{a - o} = \frac{b b}{a}$, et $V Z = \frac{m}{n} a - o$

$= \frac{m}{n} a$, ubi evanescit B D, seu o. Quare V Y

$= V Z = Z Y = \frac{b b}{a} - \frac{m}{n} a$; et quia Z X

$= D N = a$, et $Y X^2 = Y Z^2 + Z X^2$

erit $Y X^2 = a a + \frac{m m}{n n} a a - \frac{2 m b b}{n} + \frac{b^4}{a a}$;

ideoque medii densitas ut $\frac{1}{X Y}$.

(ⁿ) * Resistentia autem, &c. Resistentia est ad gravitatem ut 3 S $\sqrt{1 + \frac{Q Q}{R R}}$

ad 4 R R, id est, ut $\frac{3 b b}{a^4} \times$

$\sqrt{1 + \frac{m m}{n n} - \frac{2 m b^2}{n a a} + \frac{b^4}{a^4}}$ ad $\frac{4 b^4}{a^4}$, sive

dividendo per $\frac{b b}{a^3}$, ut $3 \sqrt{a a + \frac{m m}{n n} a a - \frac{2 m b b}{n}}$

$+ \frac{b^4}{a a}$ ad $\frac{4 b b}{a}$, seu ut 3 X Y ad 4 V G = 2 Y G.

(^o) * Et velocitas, &c. Hujus parabolæ latus

rectum est $\frac{1 + Q Q}{R} = \frac{1 + \frac{m m}{n n} - \frac{2 m b b}{n a a} + \frac{b^4}{a^4}}{\frac{b b}{a^3}}$

$= \frac{a a + \frac{m m}{n n} a a - \frac{2 m b b}{n} + \frac{b^4}{a a}}{\frac{b b}{a}}$

$= \frac{a a + \frac{m m}{n n} a a - \frac{2 m b b}{n} + \frac{b^4}{a a}}{\frac{b b}{a}}$

$= \frac{a a + \frac{m m}{n n} a a - \frac{2 m b b}{n} + \frac{b^4}{a a}}{\frac{b b}{a}}$

$\frac{Y X^2}{V G}$. Velocitas autem est ut $\sqrt{\frac{1 + Q Q}{R}}$

adeoque ut $\frac{Y X}{\sqrt{V G}}$.

(^p) * Cujus index est numerus n, positivus. Hanc autem hyperbolam, dum producitur, ad

Pro B N, B D, N X scribantur A, O, C respective, sitque V Z ad X Z vel D N ut d ad e, et V G æqualis $\frac{b b}{D N^n}$, et erit D N æqualis A — O,

$$V G = \frac{b b}{A - O|^n}, V Z = \frac{d}{e} \overline{A - O}, \text{ et } G D \text{ seu } N X - V Z - V G \text{ æqualis } C - \frac{d}{e} A + \frac{d}{e} O - \frac{b b}{A - O|^n}.$$

(^q) Resolvatur terminus ille $\frac{b b}{A - O|^n}$

in seriem infinitam $\frac{b b}{A^n} + \frac{n b b}{A^{n+1}} O +$

$$\frac{n n + n}{2 A^{n+2}} b b O^2 + \frac{n^3 + 3 n n + 2 n}{6 A^{n+3}} \times$$

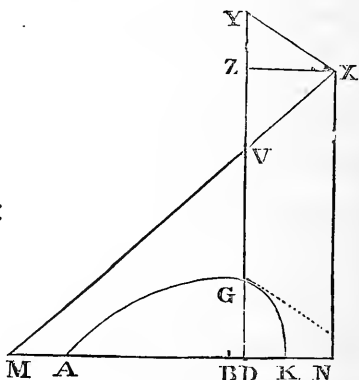
$$b b O^3, \&c. \text{ ac fiet } G D \text{ æqualis } C - \frac{d}{e} A - \frac{b b}{A^n} + \frac{d}{e} O - \frac{n b b}{A^{n+1}} O -$$

$$+ \frac{n n + n}{2 A^{n+2}} b b O^2 - \frac{n^3 + 3 n n + 2 n}{6 A^{n+3}} \times$$

$b b O^3, \&c. \text{ Hujus seriei terminus secundus } \frac{d}{e} O - \frac{n b b}{A^{n+1}} O \text{ usurpan-}$

$\text{dus est pro } Q O, \text{ tertius } \frac{n n + n}{2 A^{n+2}} b b O^2 \text{ pro } R O^2, \text{ quartus } \frac{n^3 + 3 n n + 2 n}{6 A^{n+3}} \times$

$b b O^3 \text{ pro } S O^3. \text{ Et inde medii densitas } \frac{S}{R \sqrt{1 + Q Q}}, \text{ (}^r\text{) in loco quovis}$



lineas X M, X N etiam productas continuo accedere, easque non nisi in distantia infinita contingere posse manifestum est. Cum enim sit V G ut $\frac{1}{D N^n}$, ubi D N = o, hyperbola rectam X N attingit, et distantia V G infinita evadit; et ubi D N infinita fit, V G est nihil, et ideo hyperbola alteram asymptotum X M tangit, in distantia infinita ab asymptoto X N.

(^q) * Resolvatur terminus ille $\frac{b b}{A - O|^n}$, seu $b b \times \overline{A - O}^{-n}$, in seriem infinitam per formulam generalem (548. Lib. I.), et invenietur $b b \times \overline{A - O}^{-n} = b b A^{-n} + \frac{n}{1} b b A^{-n-1} O + \frac{n \times n + 1}{1. 2} \times b b A^{-n-2} O^2 + \frac{n \times n + 1 \times n + 2}{1. 2. 3} b b A^{-n-3} O^3 +$

$\&c. = \frac{b b}{A^n} + \frac{n b b O}{A^{n+1}} + \frac{n n + n \times b b O^2}{2 A^{n+2}} + \frac{n^3 + 3 n^2 + 2 n}{6 A^{n+3}} \times b b O^3 + \&c.; \text{ quo enim modo quo in n. 551. demonstravimus formulam ad potentias, quorum exponentes sunt fracti, applicari posse, eodem ferè modo eam ad potentias quorum exponentes negativus est, applicari debere constabit.}$

(^r) * In loco quovis G fit, &c. Inveniatur enim $\frac{S}{R} = \frac{n + 2}{3 A}$, et $\sqrt{1 + Q Q} = \sqrt{1 + \frac{d d}{e e} - \frac{2 d n b b}{e A^{n+1}} + \frac{n n b^4}{A^{2n+2}}}$; et ideo, ob datum numerum $\frac{n + 2}{3}$, $R \sqrt{1 + Q Q}$ est ut

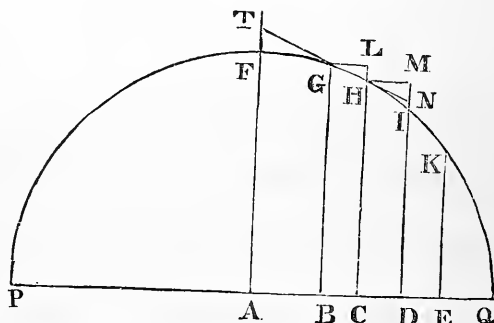
$$\frac{1}{\sqrt{A A + \frac{d d}{e e} A A - \frac{2 d n b b A}{e A^n} + \frac{n^2 b^4}{A^2}}}$$

G, fit $\frac{n+2}{3\sqrt{A^2 + \frac{d}{e}A^2 - \frac{2dnbb}{eA^n}A + \frac{nnb^4}{A^{2n}}}}$, ideóque si in VZ

capiatur VY æqualis $n \times VG$, densitas illa est reciprocè ut XY. Sunt enim A^2 et $\frac{d}{e}A^2 - \frac{2dnbb}{eA^n}A + \frac{nnb^4}{A^{2n}}$ ^(s) ipsarum XZ et ZY quadrata. Resistentia autem in eodem loco G ^(t) fit ad gravitatem 3S in $\frac{XY}{A}$ ad 4RR, id est, ut XY ad $\frac{2nn+2n}{n+2}VG$. Et velocitas ibidem ea ipsa est, quâcum corpus projectum in parabolâ pergeret, verticem G, diametrum GD ^(u) et latus rectum $\frac{1+QQ}{R}$ seu $\frac{2XY \text{ quad.}}{nn+nn \text{ in } VG}$ habente. Q. e. i.

Scholium.

Eâdem ratione quâ prodiiit densitas medii ut $\frac{S \times AC}{R \times HT}$ in Corollario primo, si resistentia ponatur ut velocitatis V dignitas quælibet V^n , ^(x) prodibit densitas medii ut $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}} \times \frac{AC}{HT}^{n-1}$. ^(y) Et



^(*) * Ipsarum XZ et ZY quadrata. Nam $XZ = DN = A$ (Hyp.), et $ZY = VY - VZ = n \times VG - \frac{d}{e}A = \frac{nnb}{A^n} - \frac{d}{e}A$; aut $ZY = VZ - VY = \frac{d}{e}A - \frac{nnb}{A^n}$, prout YV major vel minor est quam VZ. Quare cùm sit $XY^2 = XZ^2 + ZY^2$, densitas erit ut $\frac{1}{XY}$.

^(t) * Fit ad gravitatem ut, &c. Quoniam (ex dem.) $\frac{XY}{A} = \sqrt{1+QQ}$, erit $3S\sqrt{1+QQ} = \frac{3S \times XY}{A}$, et inde resistentia ad gravitatem ut $\frac{3S \times XY}{A}$ ad 4RR, vel ut XY ad $\frac{4RR \times A}{3S}$; sed $4RR \times A = \frac{nn+nn^2 \times b^4}{A^{2n+3}}$ et $3S = \frac{nn+nn \times n+2bb}{2A^{n+3}}$, ideóque

$\frac{4RR \times A}{3S} = \frac{2nn+2n \times b^4}{n+2 \times A^n} = \frac{2nn+2n}{n+2} \times VG$, ob $VG = \frac{bb}{A^n}$. Quare resistentia est ad gravitatem ut XY ad $\frac{2nn+2n}{n+2} \times VG$.

^(u) * Et latus rectum, &c. Est enim $\frac{XY^2}{A^2} = 1+QQ$, et hinc $\frac{1+QQ}{R} = \frac{2XY^2 \times A^n}{nn+nn \times bb} = \frac{2XY^2}{nn+nn \times VG}$, ob $VG = \frac{bb}{A^n}$. Unde velocitas quæ est ut $\sqrt{\frac{1+QQ}{R}}$, erit ut $\sqrt{\frac{YX}{VG}}$, ob datam numerum $\frac{2}{nn+nn}$.

^(x) * Prodibit densitas ut medii ut, &c. (115.)

^(y) * Et propterea, &c. Si enim fuerit

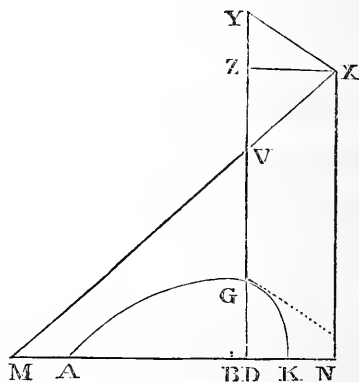
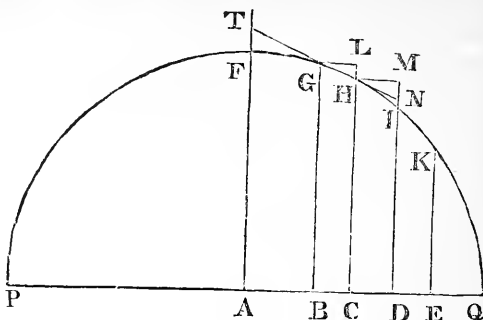
propterea si curva inveniri potest eâ lege, ut data fuerit

ratio $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}}$ ad $\frac{HT^{n-1}}{AC}$, vel

$\frac{S^2}{R^{\frac{4-n}{2}}}$ ad $1 + QQ^{n-1}$:

corpus movebitur in hâc curvâ in uniformi medio cum resistentia quæ sit ut velocitatis dignitas V^n . Sed redeamus ad curvas simpliciores.

Quoniam motus non fit in parabolâ nisi in medio non resistente, in hyperbolis verò hic descriptis fit per resistentiam perpetuam; perspicuum est quod linea, quam projectile in medio uniformiter resistente describit, propius ^(z) accedit ad hyperbolas hasce quàm ad parabolam. Est utique linea illa hyperbolici generis, ^(a) sed quæ circa verticem magis distat ab asymptotis; in partibus a vertice remotioribus propius ad ipsas accedit quàm pro ratione hyperbolarum quas hic descripsi. Tanta verò non est inter has et illam differentia, quin illius loco possint hæ in rebus practicis non incommode adhiberi. Et utiliores forsân futuræ sunt hæ, quàm hy-



$\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}}$ ad $\frac{HT^{n-1}}{AC}$ in ratione a ad b, erit

$\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}} = \frac{a}{b} \times \frac{HT^{n-1}}{AC}$, et $\frac{S \times AC^{n-1}}{R^{\frac{4-n}{2}} \times HT^{n-1}}$

$= \frac{a}{b}$, id est densitas medii ut quantitas data $\frac{a}{b}$,

et proinde uniformis. Est autem (per Cor. 1.

Prop. X.) $\frac{HT}{AC} = \sqrt{1 + QQ}$: quare si data

fuerit ratio $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}}$ ad $\frac{HT^{n-1}}{AC}$, data quoque

erit ratio quadratorum $\frac{S^2}{R^{\frac{4-n}{2}}}$ ad $1 + QQ^{n-1}$,

et contra.

^(z) * Accedit ad hyperbolas hasce, cum iis tamen perfecte convenire nunquam potest, quod in bisce hyperbolis densitas medii reciproce proportionalis sit rectæ variabili XY, et præterea non satis manifestum sit curvam, quam projectile in medio uniformi describit in hypothesi resistentiæ velocitatis quadrato proportionalis, habere asymptotum verticalem ut XN: cum præsertim in hâc resistentiæ hypothesi spatium motu horizontali insito descriptum, semotâ gravitate, infinitum evadat (per Cor. 1. Prop. V.) Verumtamen inveniri possunt hyperbolæ in quibus pro parte illâ exiguâ curvæ AGK, quæ in rebus practicis necessaria est, recta XY sit quam proximè constans, et proinde medii densitas quam proximè uniformis; quo fit ut curvæ illæ in rebus practicis non incommode adhibere possint.

^(a) * Sed quæ circa verticem, &c. Hæc demonstrabuntur infra in notâ ^(b).

perbola magis accurata et simul magis composita. Ipsæ verò in usum sic deducuntur.

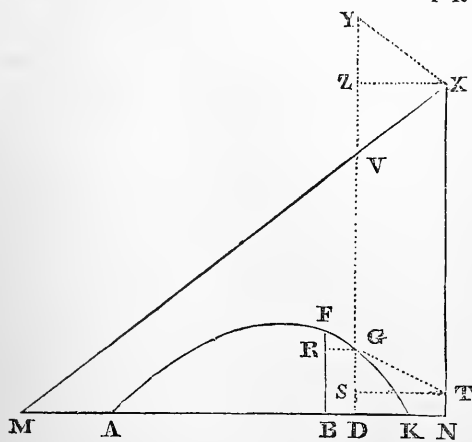
Compleatur parallelogrammum $X Y G T$, ^(b) et recta $G T$ tanget hyperbolam in G , ideòque densitas medii in G , est reciprocè ut tangens $G T$, et velocitas ibidem ut $\sqrt{\frac{G T q}{G V}}$, resistentia autem ad vim gravitatis ut $G T$ ad $\frac{2 n n + 2 n}{n + 2}$ in $G V$.

Proinde si corpus de loco A secundum rectam $A H$ projectum describat hyperbolam $A G K$, et $A H$ producta occurrat asymptoto $N X$ in H , actaque $A I$ eidem parallela occurrat alteri asymptoto $M X$ in I : ^(c) erit medii densitas in A reciprocè ut $A H$, et corporis velocitas ut $\sqrt{\frac{A H q}{A I}}$, ac resistentia

ibidem ad gravitatem ut $A H$ ad $\frac{2 n n + 2 n}{n + 2}$ in $A I$. Unde prodeunt sequentes regulæ.

^(d) *Reg. 1.* Si servetur tum medii densitas in A , tum velocitas quâcum

^(b) * *Et recta $G T$ tanget hyperbolam in G . Ex puncto G ad ordinatam $B F$ per B ducta,*



et ex puncto T ad ordinatam $D G$ demissa sint perpendicularia $G R$ et $T S$, sitque $G T$ tangens in G . Erit $F R$ ad $R G$ seu $B D$, ut $G S$ ad

$S T$, ob triangula similia $F R G$, $G S T$. Sed $F R$ est $Q O$ seu $\frac{n b b O}{A^{n+1}} - \frac{d}{e} O$, $B D$ est O ,

et $S T = Z X = A$. Quare erit $\frac{n b b}{A^{n+1}} - \frac{d}{e}$ ad 1 , seu $\frac{n b b}{A^n} - \frac{d}{e} A$ ad A , ut $G S$ ad $Z X$ seu A . Supra invenimus $Z Y = \frac{n b b}{A^n} - \frac{d}{e} A$. Ergo $Z Y = G S$; et ideò tangens $G T$ æqualis est et parallela rectæ $Y X$. Est autem (ex demonstr.) densitas medii in G reciprocè ut $Y X$: quare densitas medii in G est reciprocè ut tangens $G T$, velocitas ibidem ut $\sqrt{\frac{G T^2}{G V}}$, et resistentia ad gravitatem ut $G T$ ad $\frac{2 n n + 2 n}{n + 2} X$

$G V$.

^(c) * *Erit medii densitas, &c. Coincidente puncto G cum A , tangens $G T$ cum tangente $A H$ congruit, et recta $V G$ cum $A I$, proindeque medii densitas in A est reciprocè ut $A H$, et corporis, &c.*

^(d) * *Reg. 1.* Manentibus indice hyperbolæ n et densitate medii in A , manet tangents longitudo $A H$ quæ densitati reciprocè proportionalis

ratione, et A I minuetur in ratione illâ duplicatâ. ^(e) Augetur verò proportio resistentiæ ad pondus, ubi vel gravitas specifica sub æquali magnitudine fit minor, vel medii densitas major, vel resistentia, ex magnitudine diminutâ diminuitur in minore ratione quàm pondus.

^(h) Reg. 4. Quoniam densitas medii prope verticem hyperbolæ major

^(e) 121. * Augetur verò proportio resistentiæ ad pondus, &c. Corpus specificè gravius vel levius dicitur, quod sub æquali volumine majus vel minus pondus habet quàm alterum corpus quocum comparatur; et ideò gravitas specifica corporis, volumine dato, est ut ipsius pondus absolutum, id est, datâ gravitate acceleratrice, ut corporis massa (per defin. 7. et not. 3. Lib. I.) At, dato volumine, massa est ut densitas (2. Lib. I.); quare gravitas specifica corporis est ipsius densitati proportionalis. Augetur itaque proportio resistentiæ ad gravitatem motricem seu ad corporis pondus, tum ubi manentibus corporis volumine, figurâ et velocitate ac medii densitate, manenteque proinde resistentiâ, gravitas specifica fit minor; tum ubi, cæteris paribus, medii densitas augetur, quo casu medii resistentia crescit cum densitate, et corporis pondus in fluido densiori et specificè graviori magis sublevati minuitur; tum ubi resistentia ex magnitudine corporis diminutâ, diminuitur in minori ratione quàm pondus. Ex quibus liquet tertiam regulam determinandis motibus corporum variæ magnitudinis et densitatis accommodatam esse.

122. Lemma. Datâ curvâ A G K, invenire minimam tangentium G T. Quoniam (ex dem.

in Exemp. 4.) $X Y^2 = G T^2 = A^2 + \frac{d d}{e e} \times A^2 - \frac{2 d n b b}{e B^{n-1}} + \frac{n n b^4}{A^{2-n}}$; hujus quantitatis, in quâ si detur curva A G K, sola est variabilis A, fluxio ponenda est nihilo æqualis (48.). Brevitatis causâ dicantur $1 + \frac{d d}{e e} = f$, $\frac{2 d n b b}{e} = 2 g$, $n n b^4 = h$, et $A = x$; erit $G T^2 = f x x - 2 g x^{1-n} + h x^{-2n}$; et sumptis fluxionibus, $0 = 2 f x d x + \frac{n-1}{2} \times 2 g x^{-n} d x - 2 n h x^{-2n-1} d x$. Dividatur æquatio tota per $2 x d x$, et fiet $0 = f + \frac{n-1}{2} g x^{-n-1} - n h x^{-2n-2}$; et multiplicando per x^{2n+2} , $f x^{2n+2} + \frac{n-1}{2} g x^{n+1} = n h$, unde eruitur, ut fit in resolutione æquationum secundi gradus, $x^{n+1} = \frac{\sqrt{(n-1)^2 g g + 4 n h f - (n-1) g}}{2 f}$,

et hinc habetur $x = \left(\frac{\sqrt{(n-1)^2 g g + 4 n h f - (n-1) g}}{2 f} \right)^{\frac{1}{n+1}}$.

Quare si loco x substituitur, hic ipsius valor in æquatione $G T = \sqrt{f x x - 2 g x^{1-n} + h x^{-2n}}$, obtinebitur minima tangentium. Q. e. i.

123. Corol. Si curva A G K sit hyperbola conica, erit index $n = 1$, et ideò $n - 1 = 0$,

$$\text{et } x = \sqrt[4]{\frac{h}{f}}. \text{ Unde invenitur } G T^2 = f \sqrt[2]{\frac{h}{f}} - 2 g + \frac{h}{\sqrt[4]{\frac{h}{f}}} = 2 \sqrt[2]{h f} - 2 g = \frac{2 b b}{e} \times \sqrt[2]{e e + d d} - \frac{2 d b b}{e} = 2 b b \times \left[\frac{\sqrt{e e + d d} - d}{e} \right].$$

Quia vero (Exemp. 4.) $d : e = V Z : X Z = X N : M N$, ac proinde $d d : e e = X N^2 : M N^2$, et componendo $d d + e e : e e = X N^2 + M N^2 : M N^2$, seu $M X^2 : M N^2$, atque adeò $\frac{\sqrt{e e + d d}}{e} = \frac{M X}{M N}$, et $\frac{d}{e} = \frac{X N}{M N}$; erit $\frac{\sqrt{e e + d d} - d}{e} = \frac{M X - X N}{M N}$. Præterea

(Exemp. 4.) est $V G = \frac{b b}{D N}$, $A I = \frac{b b}{A N}$, et hinc $2 A I \times A N = 2 b b$. Erit igitur minimæ tangentium quadratum $G T^2 = \frac{2 A I \times A N}{M N} \times \frac{M X - X N}{M N}$.

^(h) * Reg. 4. Quoniam densitas in loco quovis G est reciprocè ut tangens G T, quæ prope verticem hyperbolæ minor est quàm in loco A; manifestum est densitatem medii prope verticem hyperbolæ majorem esse quàm in loco A. Densitas in loco A dicatur K, in loco G per quem ducitur tangentium minima G T, dicatur B; et erit $K : B = G T : A H$, et hinc $K + B : K = G T + A H : G T$, et $\frac{K + B}{2} : K = \frac{G T + A H}{2} : G T$. Esset autem $\frac{K + B}{2}$

densitas mediocris, si tangens A H foret omnium maxima, sicuti G T (Hyp.) est omnium minima; et ideò, ut medii densitas ferè tanquam uniformis haberi posset, augenda esset densitas in A in ratione semisummæ tangentium $\frac{G T + A H}{2}$

ad minimam tangentium G T. Verùm quia tangens A H non est omnium maxima, sed tangentes aliæ ad partes curvæ versus K ductæ majores sunt; densitas in A augenda est in ratione paulo majore quàm semisummæ $\frac{G T + A H}{2}$

ad G T, ut medium tanquam uniforme ferè ceaseatur. Atque hoc pacto errores oriundi ex eo quod medium in loco A densius supponatur, corrigentur ferè aliis erroribus qui nascuntur ex eo quod in G medium rarius fingatur quam pro ratione curvæ A G K.

est quàm in loco A; ut habeatur densitas mediocris, debet ratio minimæ tangentium H T ad tangentem A H inveniri, et densitas in A augeri in ratione paulo majore quàm semisummæ harum tangentium ad minimam tangentium G T.

(ⁱ) *Reg. 5.* Si dantur longitudines A H, A I, et describenda sit figura A G K: produc H N ad X, ut sit H X ad A I ut $n + 1$ ad 1, centroque X et asymptotis M X, N X per punctum A describatur hyperbola, eâ lege, ut sit A I ad quamvis V G ut $X V^n$ ad $X I^n$.

(^k) *Reg. 6.* Quò major est numerus n, eò magis accuratæ sunt hæ

Interim liquet veram tractatoriam quam corpus in medio uniformi describit, circa verticem magis distare ab asymptotis, et in partibus a vertice remotioribus propius ad ipsas accedere quàm pro ratione hyperbolarum in medio non uniformi descriptarum. Nam si e loco A, cum velocitate $\sqrt{\frac{A H^2}{A I}}$, et directione A H projiciatur corpus in medio cujus densitas uniformis æqualis sit densitati mediocri medi in quo describitur hyperbola A G K; ob majorem medi uniformis densitatem in A, qua corporis velocitas impressa magis minuitur, trajectoria intra hyperbolam continebitur, adeoque prope verticem ab asymptotis magis distabit; et quia prope verticem est magis depressa, in partibus versus K a vertice remotioribus ad asymptotum N X propius accedet quàm hyperbola A G K; cum præsertim in medio uniformi spatium motu horizontali descriptum, semotâ gravitate, infinitum evadat (per Cor. 1. Prop. V.).

(ⁱ) * *Reg. 5.* Si dentur longitudines A H, A I cum angulo H A N, et describenda sit figura A G K: ex puncto H ad horizontalem A N demitte perpendicularis H N; produc H N ad X, ut sit H X æqualis facto sub $n + 1$ et A I (demonstravimus enim in notâ ad Reg. 1. esse H X æqualem facto $\frac{n+1}{n} \times A I$) centroque X et asymptotis M X, N X per punctum A describatur hyperbola, eâ lege, ut sit A I ad quamvis V G ut $X V^n$ ad $X I^n$: est enim (per Hyp. Exemp. 4.) V G ad A I, ut $A N^n$ ad $D N^n$, seu ut $X I^n$ ad $X V^n$.

(^k) * *Reg. 6.* Quo major est numerus n, eo magis hæ hyperbolæ in ascensu corporis ab A accedunt ad trajectorias in medio uniformi descriptas, et eo minus in descensu ad K accuratæ sunt; et contrâ. Nam quò major est numerus n, eò minus tangens G T, quæ densitati reciproce proportionalis est, in ascensu corporis ab A variatur; et eo magis in descensu ad K mutatur, quippe data sit medi densitas in A cum angulo projectionis H A N, et quantitas $\frac{n+2}{A H}$ densitati in A (Exemp. 4.) proportionalis, data erit, ideòque tangens A H eo longior erit quò major fuerit numerus n; et quia dato angulo

H A N, datur specie triangulum rectangulum H N A, ratioque proinde laterum A H, A N, H N etiam datur, liquet quod crescente A H aut numero n, crescant quoque latera A N et H N. Ex demonstratis in Exemplo 4^o. corpore ascendente tangentis G T quadratum $G T^2 = D N^2 + [Z V - n V G]^2$, et corpore descendente est $G T^2 = D N^2 + [n V G - Z V]^2$. Ex natura hyperbolæ A G K, est $D N^n : A N^n = A I : V G$, ideòque $n V G = \frac{n A I \times A N^n}{D N^n}$.

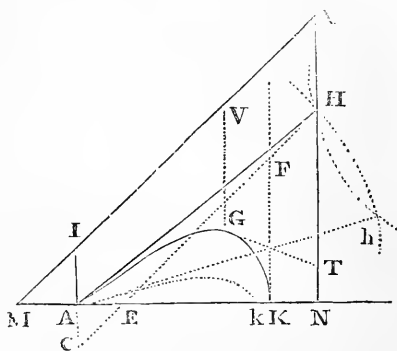
Ex demonstratione Regulæ 1^æ, $H X = \frac{n+1}{n} \times A I$, et proinde $N X = H N + \frac{n+1}{n} \times A I$, et $N X - A I = H N + \frac{1}{n} A I$. Sed ob triangula X Z V, M N X, M A I similia, Z X seu D N cst ad Z V, ut M N ad N X, et ut M A ad A I, et divisim D N est ad Z V, ut A N ad N X - A I seu $H N + \frac{1}{n} A I$; unde fit $Z V = \frac{D N \times H N + \frac{1}{n} A I \times D N}{A N}$.

Quare in corporis ascensu $G T^2 = D N^2 + \left(\frac{D N \times H N + \frac{1}{n} A I \times H N}{A N} - \frac{n A I \times A N^n}{D N^n} \right)^2$ et in descensu $G T^2 = D N^2 + \left(\frac{n A I \times A N^n}{D N^n} - \frac{D N \times H N + \frac{1}{n} A I \times D N}{A N} \right)^2$.

Jam verò si numerus n satis magnus fuerit, lineæ A H, A N, H N tam in ascensu quam in descensu corporis longiores sunt, et in ascensu ab A est fere D N æqualis A N, in descensu verò D N quantum libet minor ipsâ A N. Unde in ascensu ab A est fere $\frac{n A I \times D N}{A N} = n A I$

et ideò $G T^2 = D N^2 + \left(\frac{D N \times H N}{A N} \right)^2 = D N^2 + H N^2$ ferè. Est autem $A H^2 = A N^2 + H N^2$: quare ratio G T ad A H in ascensu corporis ab A est fere æqualitatis, dum numerus n satis magnus supponitur, ac proinde non multum variatur densitas: in descensu verò ad K, fit D N quantumlibet exigua respectu datæ A N, et ideò quantitas $\frac{n A I \times A N^n}{D N^n}$ vehementer crescit, et hinc tangens G T multum variatur ubi numerus n magnus est. Contra fit, si numerus ille sit admodum exiguus,

ea d ad e. Tum erecto cujusvis longitudinis perpendiculo A I, assume utcumque longitudinem A H vel A h, ^(l) et inde collige graphicè longitudes A K, A k, per Reg. 6. Si ratio A K ad A k sit eadem cum ratione d ad e, ^(m) longitudo A H rectè assumpta fuit. Sin minus cape in

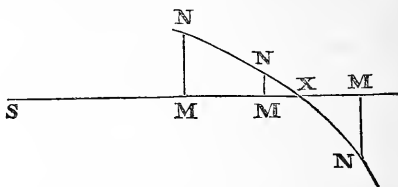


(^m) * *Longitudo AH rectè assumpta fuit.*
Datâ medii densitate in A cum velocitate cor-

poris sub diversis angulis HAK , hAk projecti, manet perpendicularum AI , et tangens AH æqualis est tangenti Ah (per Regulam 1^{am}). Datis tangente AH , angulo HAK et perpendicularo AI , hyperbola AGK describi potest (per Reg. 6^{am}, et notam præced.). et ideo data est tum specie, tum magnitudine. Unde si dentur tantum angulus HAK et ratio tangentis HA ad AI , hyperbola AGK specie tantum dabitur, id est, omnes hyperbolæ, quæ ex his duobus datis describuntur, similes erunt. Quare si in hyperbolâ AGK , quæ in chartâ descripta supponitur, tangens assumpta AH sit ad perpendicularum AI , ut tangens hyperbolæ quam corpus sub angulo æquali HAK projectum in medio resistente describit, est ad suum perpendicularum AI ; hyperbola AGK in charta descripta similis erit hyperbolæ quæ in medio resistente describitur. Et eodem argumento altera hyperbola, cujus est amplitudo Ak , et tangens Ah , manente perpendicularo AI , similis erit hyperbolæ illi quam corpus sub angulo æquali hAk , projectum in secundo experimento describit. Quâ propter, ob figurarum in chartâ et in medio resistente descriptarum similitudinem, amplitudines AK , ak erunt inter se ut homologæ amplitudines hyperbolarum quæ in experimentis descriptæ sunt, id est, $AK : Ak :: d : e$.

rectâ infinitâ S M longitudinem S M æqualem assumptæ A H, et erige perpendiculum M N æquale rationum differentiæ $\frac{A K}{A k} - \frac{d}{e}$ ductæ in

rectam quamvis datam. Simili methodo ex assumptis pluribus longitudinibus A H inveniendâ sunt plura puncta N, et per omnia agenda ⁽ⁿ⁾ curva lineâ regularis N N X N, secans rectam S M M M in X. Assumatur demum A H æqualis abscissæ S X, et inde denuo inveniatûr longitudo A K; et longitu-



dines, quæ sint ad assumptam longitudinem A I et hanc ultimam A H, ut longitudo A K per experimentum cognita ad ultimo inventam longitudinem A K, erunt veræ illæ longitudes A I et A H, ^(o) quas invenire oportuit. Hisce verò datis dabitur et resistentia medii in loco A, ^(p) quippe quæ sit ad vim gravitatis ut A H ad $\frac{4}{3}$ A I. Augenda est autem densitas medii per Reg. 4. et resistentia modo inventa, ^(q) si in eâdem ratione augeatur, fiet accuratior.

Reg. 8. ^(r) Inventis longitudinibus A H, H X; si jam desideretur positio rectæ A H, secundum quam projectile, datâ illâ cum velocitate emissum incidit in punctum quodvis K: ad puncta A et K erigantur rectæ A C, K F horisonti perpendiculares, quarum A C deorsum tendat, et æquetur ipsi A I seu $\frac{1}{2}$ H X. Asymptotis A K, K F ^(s) describatur hyperbola, cujus conjugata transeat per punctum C, centroque A et intervallo A H describatur circulus secans hyperbolam illam in puncto H;

⁽ⁿ⁾ * Curva regularis. Vide notam 75. Lib. hujus.

^(o) * Quas invenire oportuit. Cùm enim abscissa S M longitudini assumptæ A H æqualis sit, et rationum differentia $\frac{A K}{A k} - \frac{d}{e}$ exponatur per ordinatam M N; ubi fit S M = S X et proinde M N = 0, est etiam $\frac{A K}{A k} - \frac{d}{e} = 0$,

et ideo $\frac{A K}{A k} = \frac{d}{e}$, atque S X æqualis veræ longitudini assumendæ A H (per not. præced.) Si itaque ex datis perpendiculo A I et verâ longitudine inventâ A H cum angulo H A N quæratur, ut supra, longitudo A K; ob similitudinem figurarum in medio resistente et in charta descriptarum, erit longitudo A K experimento cognita ad longitudinem A K ultimo inventam in charta, ut longitudo A H in medio resistente ad longitudinem A H in chartâ duc-

tam, atque etiam ut perpendiculum A I in medio resistente ad perpendiculum A I in charta assumptum. Quibus inventis, describi poterit hyperbola similis et æqualis hyperbolæ, quam corpus in medio resistente descripsit.

^(p) * Quippe quæ sit ad vim gravitatis, &c. Ex demonstratis in hoc scholio ante Regulam 1. resistentia est ad gravitatem ut A H ad $\frac{2nn+2n}{n+2} \times$

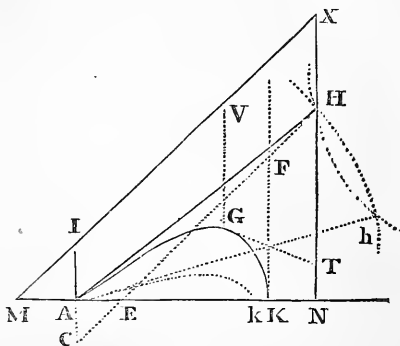
A I, hoc est, ut A H ad $\frac{4}{3}$ A I, ob $n = 1$ (per Hyp.)

^(q) * Si in eadem ratione augeatur. Nam datâ velocitate, resistentia est ut medii densitas.

^(r) * Inventis longitudinibus A H, H X, &c. Inventis enim (per Reg. 7.) lineis A I et A H, datur lineâ H X, ut pote quæ æqualis est 2 A I, ob $n = 1$, (Reg. 5.)

^(s) * Describatur hyperbola. (346. Lib. I.)

et projectile secundum rectam AH emissum incidet in punctum K . Q. e. i. Nam punctum H , ^(t) ob datam longitudinem AH , locatur aliquibi in circulo descripto. Agatur CH occurrens ipsis AK et KF , illi in E , huic in F ; ^(u) et ob parallelas CH , MX , et æquales AC , AI , erit AE æqualis AM , et propterea etiam æqualis KN . Sed CE est ad AE ut FH ad KN , et propterea CE et FH æquantur. Incidit ergo punctum H in hyperbolam asymptotis AK , KF descriptam, cujus conjugata transit per punctum C , atque ideò reperitur in communi intersectione hyperbolæ hujus et circuli descripti. Q. e. d. Notandum est autem, quòd hæc operatio perinde se habet, sive recta AKN horizonti parallela sit, sive ad horizontem in ^(s) angulo quovis inclinata: ^(v) quodque ex duabus intersectionibus H , h duo prodeunt anguli NAH , NAh ; et quod in praxi mechanicâ sufficit circulum semel describere, deinde regulam interminatam CH ita applicare ad punctum C , ut ejus pars FH , circulo et rectæ FK interjecta, æqualis sit ejus parti CE inter punctum C et rectam AK sitæ.



^(t) * Ob datam longitudinem AH , per Reg. 1^{am}.

^(u) * Et ob parallelas CH , MX , &c. Nam si supponamus H esse punctum quæsitum, per quod ducenda est recta AH , erit (per constr.) HX æqualis et parallela IC , et ideò CH parallela IX seu MX , ac triangula CAE , IAM similia proindeque cum sit $CA = AI$ (per constr.) erit etiam $AE = MA = KN$, (per Theor. I. de conicis). Sed ob triangula similia CAE , HNE , et ob parallelas KF , NH , est $CE : AE = EH : EN = FH : KN$. Cum igitur sit $AE = KN$, erit quoque $CE = FH$; ac proinde incidit punctum H in hyperbolam (per Theor. I. de Hyp.)

^(s) * In angulo quovis inclinata. Demonstratio enim lineam $MAKN$ per puncta data A et K ductam horizonti parallelam esse minime supponit, eademque prorsus manet si linea illa ad horizontem inclinata fuerit.

^(v) * Quodque ex duabus intersectionibus. Quoniam punctum H per intersectionem circuli cum hyperbola determinatur (ex dem.), et circulus hyperbolam in duobus punctis intersecare potest, ex duabus intersectionibus H , h duo prodeant anguli, seu duæ sunt positiones tangentis

AH secundum quam projectile datâ velocitat emissum incidit in punctum K .

124. Problema. Inventis longitudinibus AI et AH , maximam altitudinem GD , ad quam corpus sub angulo dato HAN projectum pertingere potest, definire.

Sit, ut in exemplo 3^o. (vid. fig. pag. 74.) $BN = a$, $BD = o$, $NX = c$, ratio data VZ ad ZX , seu AI ad $AM = \frac{m}{n}$, $VG = \frac{bb}{a}$,

ideòque $AI = \frac{bb}{AN}$, et $bb = AI \times AN$.

Et erit (Exemp. 3^o.) $GD = c - \frac{m}{n}a - \frac{bb}{a}$

+ $\frac{m}{n}o - \frac{bb}{aa}o$, &c., et $\frac{m}{n}o - \frac{bb}{a}o = Qo$.

Est autem Qo ut ordinatæ GD fluxio, quæ, ut habeatur ordinata omnium maxima, nihilo

æquanda est (48): quare erit $\frac{m}{n} = \frac{bb}{aa}$, et $a =$

$\frac{nbb}{m}$, sive $DN^2 = \frac{AM \times AI \times AN}{AI}$

$= AN \times AM$. Si ergo capiatur DN media oropotionalis inter AN et AM , ducatur

signet, et manente tum densitate medii in A, tum velocitate quâcum corpus projicitur, mutetur utcunque angulus N A H; manebunt longitudines A H, A I, H X, et inde datur parabolæ vertex X, et positio rectæ X I, et sumendo V G ad I A ut X Vⁿ ad X Iⁿ, dantur omnia parabolæ puncta G, (z) per quæ projectile transibit.

(z) *Per quæ projectile transibit.* Producatur V G ut horizontalem N K secet in D, et rectam X Z horizonti parallelam in Z. Pro B N, B D, N X scribantur A, O, c, respectivè; sique M intersectio linearum X V, N K; et X N ad N M, sive ob triangulorum X N M, V Z X similitudinem, V Z ad Z X vel D N ut d ad e;

ideoque D N = A + O, et V Z = $\frac{d}{e} \times (A + O)$. Quia vero V G est ut X Vⁿ (per Hyp.), et V X est ad X Z, seu D N, in datâ ratione X N ad N M; erit etiam V G ut D Nⁿ. Ponatur ergo V G = $\frac{D N^n}{b b} = \frac{A + O)^n}{b b} = \frac{A^n}{b b}$

+ $\frac{n A^{n-1} O}{b b} + \frac{n \cdot n-1 A^{n-2}}{1 \cdot 2 \cdot b b} O^2 + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 A^{n-3}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot b b} O^3 +$, &c., et erit G D = V Z - N X - V G = $\frac{d}{e} \times A +$

O - c - $\frac{A + O)^n}{b b} = \frac{d}{e} A - c - \frac{A^n}{b b} + \frac{d}{e} O - \frac{n A^{n-1}}{b b} O - \frac{(n n - n) A^{n-2}}{2 b b} O^2 - \frac{(n^3 - 3 n n + 2 n) A^{n-3}}{6 b b} O^3 -$,

&c. Quare erit Q = $\frac{n A^{n-1}}{b b} - \frac{d}{e}$; R = $\frac{n n - n A^{n-2}}{2 b b}$, et S = $\frac{n^3 - 3 n n + 2 n A^{n-3}}{6 b b}$.

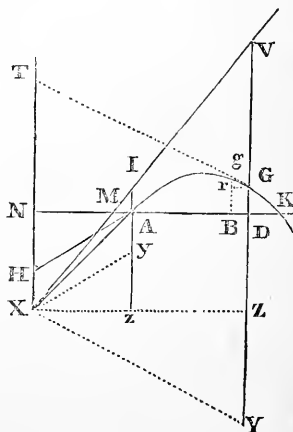
Per punctum B ducatur ordinata B g, ad quam demittatur ex G perpendiculum G r, sitque X Y æqualis et parallela tangenti G T; et ob triangula G r g, X Z Y similia, erit G r² ad G g² ut X Z² seu D N² ad X Y² vel G T²; est autem G r² = O², r g² = Q Q O O, et ideò G g² = O O × $\frac{1 + Q Q}{1 + Q Q}$: quare cum sit etiam B N seu D N = A, erit G T² = A A × $\frac{1 + Q Q}{1 + Q Q}$, G T = A √ $\frac{1 + Q Q}{1 + Q Q}$, et $\frac{G T}{A} = \sqrt{1 + Q Q}$. Per Corol. 1. Prop. X. medii densitas in loco G est ut $\frac{S \times A}{R \times G T}$, et

(ex demonstratis) $\frac{S}{R} = \frac{n-2}{5 A}$, ideòque $\frac{S \times A}{R \times G T}$ est ut $\frac{n-2}{5 G T}$; quare, ob datum numerum

$\frac{n-2}{5}$, densitas est reciprocè ut tangens G T. Velocitas in G (per Prop. X.) ea est, quâ cum

projectile pergeret, in spatio non resistente, in parabolâ conicâ verticem G, diametrum G D, et latus rectum $\frac{1 + Q Q}{R}$ habente; et ideò cum sit $\frac{1 + Q Q}{R} = \frac{G T^2}{A^2 R} = \frac{2 G T^2}{n n - n \times A^n} = \frac{2 G T^2}{b b}$

$\frac{2 G T^2}{n n - n \times V G}$ (ex dem.), parabolæ latus rectum erit $\frac{2 G T^2}{n n - n \cdot V G}$. Resistentia in G (per Cor. 1. Prop. X.) est ad vim gravitatis



$5 S \times G T$ ad $4 R R \times D N$, id est, ut G T ad $\frac{4 R R \times A}{3 S}$; sed $4 R R \times A =$

$\frac{n n - n \times A^{2n-3}}{b^4}$, et $3 S = \frac{n n - n \times n - 2}{2} \times \frac{A^{n-3}}{b b}$, atque ideò $\frac{4 R R \times A}{3 S} =$

$\frac{n n - 2 n}{n - 2} \times \frac{A^n}{b b} = \frac{2 n n - 2 n}{n - 2} \times V G$.

Erit igitur resistentia ad gravitatem, ut G T ad $\frac{2 n n - 2 n}{n - 2} \times V G$. Velocitas in loco G (per

Prop. X.) est ut $\sqrt{\frac{1 + Q Q}{R}} = \sqrt{\frac{2 G T^2}{n n - n \times V G}}$.

multiplicata, ideóque est $-\frac{d}{v} dy = g dt^2 =$
 $\frac{g ds^2}{v^2}$ (cum sit $dt = \frac{ds}{v}$) unde est $v^2 =$
 $\frac{g ds^2}{-d dy}$ sive $-v^2 d dy = g ds^2$, et fluxio-
nem utrinque sumendo est $-v^2 d^3 y =$
 $2 v d dy dv = 2 g ds ds$, et cum lineola
pq designet ds sitque Pp sive $P s (ds)$ ad
 $Pr (dy)$ sicut $ps (-d dy)$ ad $p q (ds)$ est
 $ds ds = -d dy dy$ unde hæc ultima æqua-
tio fit $-v^2 d^3 y = 2 v d dy dv = -2 g dy dy$
et $-2 v d dy dv = v^2 d^3 y - 2 g dy dy$
et, $-v dv = \frac{v^2 d dy}{2 dv} - g dy$, unde cum in-

$$\text{ventum etiam fuerit} - v \, dv = \frac{v^2 \, n \, ds}{2a} - g \, dy,$$
$$\text{est } \frac{v^2 d^3 y}{d d y} = \frac{v^2 n d s}{a}, \text{ et valorem inventum}$$
$$\begin{aligned} \dot{v}^2 &= \frac{g \, d \, s^2}{-d \, d y} \text{ substituendo, fit tandem } \frac{g \, d \, s^2 \, d^3 y}{-d \, d y^2} \\ &= \frac{g \, d \, s^{2n+1}}{-a \, d \, d y^n} \text{ sive reductione factâ a } d^3 y = \\ &= \frac{g \, d \, s^{2n-1} \, d \, s^{2n-1}}{d \, d y^{n-2}}. \end{aligned}$$

Ut autem ex hac æquatione eruatur æquatio inter $d x$, et $d y$, et inter x et y , designet p variables quascumque quæ in æquatione quæsitâ ita multiplicat fluxionem $d x$ ut ea sit æqualis $d y$, sitque $d y = p d x$ et $d y^2 = p^2 d x^2$, cum sit $d s^2 = d x^2 + d y^2$ erit $d s^2 = d x^2 + p^2 d x^2 = d x^2 \sqrt{1 + p^2}$ unde $d s^{2n-1} = d x^{2n-1} \sqrt{1 + p^2}^{2n-1}$.

Præterea cùm dx constans supponatur erit
 $d y = p dx$, $d d y = d x dp$, et sumpta fluxione
erit $et d^3 y = d x d^2 p$. Et si tandem q de-
signet variables quæ ita multiplicant fluxionem
 dx , ut ea fiat æqualis dx , sitque $q dx = d x$ erit
 $d x dq = d d p$ et $d x^2 dq = d d x dp$, et
æquatio proposita in hanc vertetur $a d x^2 dq =$

$$\frac{g^{n-1} d x^{2n-1} \times \frac{2n-1}{2}}{d x d p|^{n-2}} =$$
$$\frac{g^{n-1} dx^{n+1} \times 1 + p p}{d y^{n-2}}, \text{ et divisó}$$

utroque termino per $d x^2$, erit $a d q =$

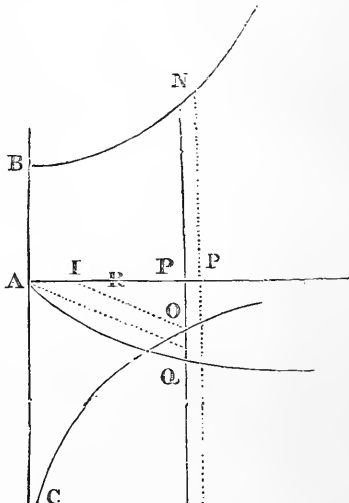
$$g^{n-1} d x^{n-1} \times \sqrt{1 + n n^{\frac{2n-1}{2}}}$$

loco $d x$ posito eius valore $\frac{d p}{d x}$ erit $a d a =$

$$g^{n-1} d p^{n-1} \times \frac{q}{1 + p p^{\frac{2n-1}{2}}}$$
$$q^{n-1} d p^{n-2} \quad \text{give a } dq$$
$$\frac{1}{q^{n-1}} \times dp, \text{ hoc est } a q^{n-1} dq$$

Vol. I.

tio fluxionalis inter $d p$ et $d q$, ex quâ per
curvarum quadraturam obtinebitur æqua-
tio inter p et q et inde inter x et y , ut
id ipsum nunc exponemus, summando enim
terminos æquationis $a q^n - \frac{1}{n} d q = g^{n-1}$

$$\times \frac{1}{1+p} \frac{q^{n-1}}{p^2} \text{ d p habetur } \frac{a q^n}{n} = \frac{g^{n-1} \times}{\frac{1}{1+p}}$$
$$S. \sqrt[n]{1 + p p^{\frac{2n-1}{2}}} d p, \text{ hoc est } q = \sqrt[n]{\frac{n g^{n-1}}{a}}$$
$$\times S. \frac{1+p}{p} p^{\frac{2n-1}{2}} dp, \text{ unde sit curva cujus ab-}$$


scissa qualiscumque A P sit $= p$, sitque ejus or-
dinata P N semper æqualis $\frac{1+p p^{\frac{2n-1}{2}}}{2n-1}$, erit

area A B P N = S. $\frac{1}{1+p} \frac{p^{2n-1}}{p^2} d p$, ducatur
ergo ab altera parte P ordinata P O talis ut sit

$$\frac{1}{n g^{n-1}}$$

semper æqualis $\sqrt[n]{\frac{a}{a}}$ \times A B P N crit ea

P O æqualis $\frac{1}{q}$, cùmque sit $dx = \frac{a p}{q} = \frac{1}{q}$

$\times d p$, erit (summando) $x = S. \frac{1}{q} \times d p$ sive
aequalis area $A C P Q$.

Denique cum sit $dy = p dx = \frac{p dp}{a} =$

$$\frac{p}{a} \times d p \text{ et summando } y = S. \frac{p}{a} \times d p \text{ ideò}$$

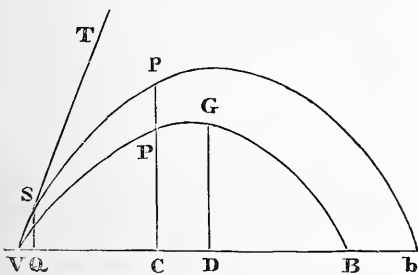
si e puncto P versus originem A sumatur P I
 æqualis unitati, ductaque I O, ducatur insi pa-

aequalis unitati, ductaque $1\ O$, ducatur ipsi parallela $A\ Q$ ab origine curvæ quæ secet $P\ O$

productam in Q, erit $1 : P \ O \ (\text{sive } \frac{1}{q}) = \Lambda \ P$

(sive p) : $PQ = \frac{p}{q}$, itaque area curvæ APQ

scribantur b et c ut æquatio sit $y = bx - cx^2 - ex^3$. Ut jam determinantur coefficientes b , c , e , capiuntur æquationis fluxiones, prima, secunda et tertia, factâ dx constate, erunt illæ $dy = bdx - 2cxdx - 3ex^2dx$; $d^2y = -2cdx^2 - 6exdx^2$, $d^3y = -6edx^3$. Coincidentibus punctis V et C , fit $x = 0$, et ideò $dy = bdx$, $d^2y = -2cdx^2$ et $d^3y = -6edx^3$. Ex æquatione $dy = bdx$, deducitur proportio $dx : dy = 1 : b$; et coincidente C cum V , dx est ad dy ut sinus totus VQ ad tangentem QS , anguli projectionis $T V Q$; quare si sinus totus dicatur 1 , erit b tangens anguli projectionis, et ideò dato hoc angulo datur b . Si velocitas cum quâ corpus e



loco V projicitur sit v , et f , altitudo ex quâ corpus urgente vi constante g , in spatio non resistente cadendo acquirit velocitatem illam v , erit $2gf = v^2$ (18. 19. 20. hujusce Lib.) sed (30)

$$v^2 = -\frac{gds^2}{ddy}, \text{ ideòque } 2gf = -\frac{gds^2}{ddy}, \text{ et}$$

$$2f = -\frac{ds^2}{ddy}; \text{ est autem } ds^2 = dx^2 + dy^2 \\ = dx^2 + b^2 bdx^2, \text{ et } ddy = -2cdx^2 \\ \text{in loco } V, \text{ (ex dem.)}. \text{ Quare erit } 2f = \frac{1+bb}{-2c},$$

$$\text{et hinc } c = \frac{1+bb}{4f}. \text{ Cùm igitur quantitates } b,$$

et f , datæ sint, data erit c . Invenietur quantitas tertia e , per æquationem $ad^3y = ds^2ddy$ (129) et per æquationes suprâ repertas $ds = dx\sqrt{1+bb}$, $ddy = -2cdx^2$, et $d^3y = -6edx^3$; ex quibus eruitur $-6aedx^3 = -2cdx^3\sqrt{1+bb}$, et hinc $e = \frac{c\sqrt{1+bb}}{3a}$

$$= \frac{1+bb \times \sqrt{1+bb}}{12af}. \text{ Tota igitur æqua-}$$

tio assumpta $y = bx - cx^2 - ex^3$ fit $y =$

$$bx - x^2 \times \left(\frac{1+bb}{4f}\right) - x^3 \times \left(\frac{1+bb\sqrt{1+bb}}{12af}\right)$$

in quâ datâ velocitate terminali datur a , (130). Poterit etiam linea a , per experimentum reperiri; nam si loco V sub angulo dato $T V B$ datâ cum velocitate projiciatur corpus in medio supposito et observetur amplitudo jactûs $V B$,

quæ dicatur A , in æquatione ad trajectoryam $V P B$, loco x , scribatur A , et loco y , scribatur o , quia ordinata $C P$, seu y evanescit in B invenietur $o = bA - A \times \left(\frac{1+bb}{4f}\right) - A^3 \times$

$$\frac{(1+bb)^{\frac{5}{2}}}{12af}; \text{ undè deducitur } a = A \times \frac{(1+bb)^{\frac{5}{2}}}{12af}.$$

152. Corol. 5. Jactûs amplitudo $V B$, invenitur, factâ $y = 0$, undè eruitur $x \times$

$$\frac{(1+bb)^{\frac{5}{2}}}{12af} + x \times \left(\frac{1+bb}{4f}\right) = b, \text{ et } V B =$$

$$x = -\frac{3a}{2\sqrt{1+bb}} + \sqrt{\left(\frac{9a^2}{4+4bb} + \frac{(1+bb)^{\frac{5}{2}}}{12afb}\right)}.$$

133. Corol. 6. Maxima jactûs altitudo $D G$ reperitur, sumptâ æquationis ad trajectoryam $V P B$, fluxione et factâ $dy = 0$ (48); fit enim $o = bdx - 2x^2dx \times$

$$\frac{1+bb}{4f} - 3x^2dx \times \frac{(1+bb)^{\frac{5}{2}}}{12af} \text{ undè}$$

$$\text{deducitur } V D = x = -\frac{a}{\sqrt{1+bb}} +$$

$$\sqrt{\frac{aa}{1+bb} + \frac{4afb}{(1+bb)^{\frac{5}{2}}}}. \text{ Quo valore loco } x,$$

in æquatione ad trajectoryam substituto, obtinebitur y , seu maxima altitudo $D G$.

134. Corol. 7. Ut determinetur tangens anguli $T V B$, sub quo corpus datâ celeritate projectum, per datum punctum P transit, loco x et y in æquatione ad trajectoryam scribantur datæ $V C$ et $V P$, atque hinc eruatur valor tangentis b ; dicatur $V C = p$, $C P = q$, et erit

$$q = bp - p \times \frac{\sqrt{1+bb}}{af} - p^3 \times$$

$$\frac{1+bb\sqrt{1+bb}}{12af}. \text{ Si mediî densitas infinitè parva}$$

esset, altitudo a foret infinita (130), et idcirco

$$q = bp - p \times \frac{1+bb}{4f}. \text{ Inveniat per}$$

hanc æquationem valor tangentis b qui dicatur k , et in æquatione superiori loco $(1+bb)^{\frac{5}{2}}$,

$$\text{scribatur } (1+bb) \times \sqrt{2+kk} \text{ et illa in}$$

$$\text{hanc abibit } q = bp - p \times \frac{(1+bb)}{af} - p^3 \times$$

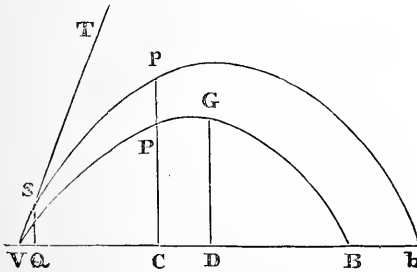
$$\frac{1+bb \times \sqrt{1+kk}}{12af}, \text{ quæ cum sit duarum}$$

dimensionum facilè suppeditabit valorem ipsius b , quamproximè.

135. Corol. 8. Datâ celeritate jactûs, invenitur angulus maximæ omnium amplitudini conveniens, si in æquatione Corollarii 5. in quâ x

exponit quamlibet amplitudinem V B, sumatur tangens b variabilis et sumptis fluxionibus ponatur $dx = o$ (48). Calculo enim inito invenietur $4f \times (1 - 2bb)^2 = 5ab \times (1 - bb) \times \sqrt{1 + bb}$. Quoniam verò tangens anguli projectionis est b, sinus totus 1, et proinde secans $\sqrt{1 + bb}$; si ejusdem anguli sinus dicatur s, erit $\sqrt{1 + bb} : b = 1 : s$, adeoque $1 + bb : bb = 1 : ss$, et dividendo $1 : bb = 1 - ss$; s s, atque ita $b = \frac{s}{1 - ss}$, et $b = \frac{s}{\sqrt{1 - ss}}$.

Loco b substituat $\frac{s}{\sqrt{1 - ss}}$ in æquatione modo inventâ et illa in hanc mutabitur, $4f \times \frac{(1 - 3ss)^2}{(1 - ss)^2} = 5as \times \frac{(1 - 2ss)}{(1 - ss)^2}$, hoc est, $4f \times (1 - 3ss)^2 = 5as \times (1 - 2ss)$. Ex quâ æquatione, si eruatur valor sinûs s dabitur angulus quæsitus. Per approximationem ita potest obtineri. Scribatur in æquatione $3as = 5a\sqrt{\frac{1}{2}}$; nam si trajectory in medio non resistente describeretur, angulus TVB



foret semirectus, et proinde sinus ejus $\sqrt{\frac{1}{2}}$, cum sit sinus totus $= 1$; et ideò in medio valde raro est ferè $s = \sqrt{\frac{1}{2}}$; æquatio igitur erit $4f \times (1 - 3ss)^2 = (1 - 2ss) \times 5a\sqrt{\frac{1}{2}}$; quæ facillimè resolvetur ad instar æquationis duarum dimensionum. Hinc autem invenitur s paulò minor quam $\sqrt{\frac{1}{2}}$; adeoque angulus projectionis semirecto paulò minor.

136. Corol. 9. Si medium esset paulò densius, assumenda foret æquatio ad trajectoryam, $y = bx - x \times \frac{(1 + bb)}{4f} - x^3 \times \frac{(1 + bbb)}{12af} - hx^4$; aut etiam alia plurium terminorum. In illâ autem ita determinatur valor coefficientish.

Pro coefficientibus datis $\frac{1 + bb}{4f}$, $\frac{(1 + bbb)}{12af}$, scribantur c, e, ut sit æquatio $y = bx - cx^2 - ex^3 - hx^4$, et sumptis ut suprâ (131) fluxionibus primis, secundis et tertiis, factâ dx , constante, invenietur (129) $\frac{ad^3y}{d^3s d^2y} = 1 = \frac{6ae + 24ahx}{(2c + 6ex + 12hx^2)} \times$

$\frac{1}{\sqrt{1 + bb - 4bcx + 4ccx^2 - 6bex^2, \&c.}}$
 $= \frac{6ae + 24ahx}{2c + 6ex \times \sqrt{1 + bb - 2bcx} \times \sqrt{1 + bb}}$
 neglectis terminis ubi x^2 occurrit et extracta radice per formulam Newtonianam. Ut autem hæc quantitas constans sit et æqualis unitati, termini homologi in numeratore $6ae + 24ahx$, et denominatore $2c\sqrt{1 + bb} + 6ex\sqrt{1 + bb} - \frac{4bccx}{\sqrt{1 + bb}}$ ponendi sunt æquales, id est, $6ae = 2c\sqrt{1 + bb}$, et $24ahx = \frac{4bccx}{\sqrt{1 + bb}}$. Ex his suppositionibus eruitur $e = \frac{c\sqrt{1 + bb}}{3a} =$

$\frac{(1 + b)^{\frac{5}{2}}}{12af}$, et $h = e \frac{\sqrt{1 + bb}}{4f} - \frac{bcc}{6a\sqrt{1 + bb}}$
 $= \frac{(1 + b)^2}{48a^2f} - \frac{b \times (1 + b)^{\frac{5}{2}}}{96aff}$. Quare æquatio assumpta erit $y = bx - x^2 \times$

$\frac{(1 + b)}{af} - x^3 \times \frac{(1 + b)^{\frac{5}{2}}}{12af} - x^4 \times$

$\frac{(1 + b)^2}{48a^2f} + x + b \times \frac{(1 + b)^{\frac{5}{2}}}{96aff}$.

Et eodem modo determinarentur coefficientes in æquationibus plurium terminorum seu ad parabolas superiorum generum.

137. Corol. 10. Si resistentia medii uniformis, partim constans supponeretur et partim velocitatis quadrato proportionalis, posset etiam trajectory VPB quamproximè definiri. Sit enim resistentiæ pars uniformis $= \frac{1}{2} kg$, et resistentia tota $r = \frac{kg}{2} + \frac{v^2}{2a}$, et

erit (28) $gd y + \frac{kg ds}{2} + \frac{v^2 ds}{2a} = -v dv$

et (30) $v^2 = -\frac{g ds^2}{d dy}$, adeoque (127) $v dv = -g dy + \frac{g ds^2 d^3 y}{2 d dy^2}$, his valoribus loco

v^2 et $v dv$, in priori æquatione substitutis sit

$g dy + \frac{kg ds}{2} - \frac{g ds^3}{2 addy} = g dy - \frac{g ds^2 d^3 y}{2 d d v^2}$,

ideoque $k = \frac{ds^2}{addy} - \frac{ds d^3 y}{d dy^2}$. Jam si resistentia tota r, exigua fuerit, ponatur æquatio ad trajectoryam VPB, $y = bx - cx^2 - ex^3$, et factâ dx , constante, capiantur fluxiones primæ, secundæ et tertiæ quæ coincidunt puncto C, cum V, erunt $dy = b dx$, $d dy = -2c dx^2$, et $d^3 y = -6e dx^3$ (131); undè invenitur ut (in Corol. 4. 131.) b, tangens anguli projectionis, existente sinu toto 1, et $c = \frac{1 + bb}{4f}$,

ubi f est altitudo ex quâ corpus urgente vi constante g cadendo in spatio non resistente acquirit jactûs velocitatem. Quantitas e determinabitur

per æquationem $k = \frac{ds^2}{a d d y} - \frac{ds d^3 y}{d d y^2}$. Nam

si in illâ loco ds , $d d y$, $d^3 y$, substituantur ipsorum valores $dx \times (1 + bb)^{\frac{1}{2}}$, $2cdx$, et

$-6edx^3$, erit $k = -\frac{(1+bb)}{2ac} + \frac{3e \times (1+bb)^{\frac{1}{2}}}{2cc}$;

undè eruitur $e = -\frac{2kcc}{3 \times (1+bb)^{\frac{1}{2}}} + \frac{c \times (1+bb)^{\frac{1}{2}}}{3a}$

$= \frac{k \times (1 + bb)^{\frac{3}{2}}}{24 ff} + \frac{(1 + bb)^{\frac{3}{2}}}{12 a f}$. Qua-

propter æquatio assumpta in hanc abit $y = bx$

$-\frac{xx \times (1 + bb)}{4 f^2} - x^3 \times \frac{(1 + bb)^{\frac{3}{2}}}{12 a f^2}$,

$-x^3 k \times \frac{(1 + bb)^{\frac{3}{2}}}{24 ff}$, et quantitates a et k ,

ex phænomenis poterunt determinari ut suprâ (131.)

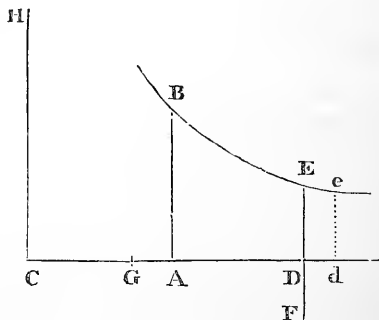
SECTIO III.

De motu corporum quibus resistitur partim in ratione velocitatis, partim in ejusdem ratione duplicatâ.

PROPOSITIO XI. THEOREMA VIII.

Si corpori resistitur partim in ratione velocitatis, partim in velocitatis ratione duplicatâ, et idem solâ vi insitâ in medio similiari movetur: sumantur autem tempora in progressionem arithmeticâ; quantitates velocitatibus reciproce proportionales, datâ quâdam quantitate auctæ, erunt in progressionem geometricâ.

Centro C, asymptotis rectangulis C A D d et C H, describatur hyperbola B E e, et asymptoto C H parallelæ sint A B, D E, d e. In asymptoto C D dentur puncta A, G: et si tempus exponatur per aream hyperbolicam A B E D uniformiter crescentem; dico quod velocitas exponi potest per longitudinem D F, cujus reciproca G D unâ cum datâ C G componat longitudinem C D in progressionem geometricâ crescentem.



Sit enim areola D E e d datum temporis incrementum quàm minimum, ^(a) et erit D d reciproce ut

D E, ideóque directè ut C D. Ipsius autem $\frac{1}{G D}$ decrementum, quod

^(b) (per hujus Lem. II.) est $\frac{D d}{G D q}$, erit ut $\frac{C D}{G D q}$ seu $\frac{C G + G D}{G D q}$, id

est, ut $\frac{1}{G D} + \frac{C G}{G D q}$. Igitur tempore A B E D per additionem data-

^(a) * Et erit D d reciproce ut D E. Est enim areola evanescens D E e d æqualis rectangulo D E × D d, quod, ob datum temporis incrementum, erit ut quantitas data, et ideò D d, est ut quantitas data divisa per D E, id est, reci-

procè ut D E; sed (per Theor. IV. de Hyperb.) datum est rectangulum C D × D E, proinde C D, est reciproce ut D E; quare erit D d directè ut C D.

^(b) * Per hujus Lemma II. Cas. 4.

rum particularum $E D$ de uniformiter crescente, decrescit $\frac{1}{G D}$ in eâdem ratione cum velocitate. ^(c) Nam decrementum velocitatis est ut resistentia, hoc est (per Hypothesin) ut summa duarum quantitatum, quarum una est ut velocitas, altera ut quadratum velocitatis; et ipsius $\frac{1}{G D}$ decrementum est ut summa quantitatum $\frac{1}{G D}$ et $\frac{C G}{G D q}$, quarum prior est ipsa $\frac{1}{G D}$, et posterior $\frac{C G}{G D q}$ est ut $\frac{1}{G D q}$: proinde ^(d) $\frac{1}{G D}$, ob analogum decrementum, est ut velocitas. Et si quantitas $G D$, ipsi $\frac{1}{G D}$ reciprocè proportionalis, quantitate datâ $C G$ augeatur; summa $C D$, tempore $A B E D$ uniformiter crescente, ^(e) crescet in progressionem geometricâ. Q. e. d.

Corol. 1. Igitur si, datis punctis A, G , exponatur tempus per aream hyperbolicam $A B E D$, ^(f) exponi potest velocitas per ipsius $G D$ reciprocâ $\frac{1}{G D}$.

^(g) *Corol. 2.* Sumendo autem $G A$ ad $G D$ ut velocitatis reciproca sub initio, ad velocitatis reciprocâ in fine temporis cujusvis $A B E D$, invenietur punctum G . Eo autem invento, velocitas ex dato quovis alio tempore inveniri potest.

^(c) Nam decrementum velocitatis, dato temporis momento, est ut resistentia (15).

^(d) * $\frac{1}{G D}$, ob analogum decrementum, est ut velocitas. Si enim duarum quantitatum fluentium incrementa vel decremента dato tempusculo producta analogâ sint, eorum incrementorum vel decrementorum summæ seu fluentes ipsæ ab eodem initio sumptæ, sunt analogæ (per Cor. Lem. IV. Lib. I.).

^(e) * Crescet in progressionem geometricâ (580. Lib. I.)

^(f) * Exponi potest velocitas per ipsius $G D$ reciprocâ $\frac{1}{G D}$. Undè patet velocitatem non nisi tempore infinito extingui posse, * erit enim

$\frac{1}{G D} = 0$, sive velocitas nulla ubi $G D$ erit infinita, tunc autem area $B A D E$ quæ tempus exprimit infinita etiam est, ex naturâ hyperbolæ.

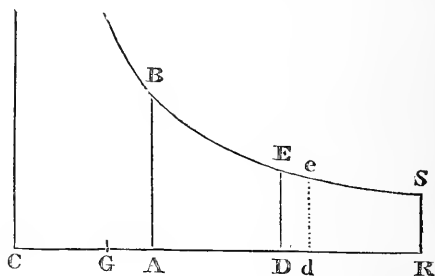
^(g) * *Corol. 2.* Punctum A ad arbitrium assumitur in asymptoto $C R$ et assumpto etiam quovis puncto D ut area $A B E D$ tempus datum exponat, itâ determinandum est punctum G , ut sit $G A$ ad $G D$, ut velocitatis reciproca sub initio ad velocitatis reciprocâ in fine temporis cujusvis $A B E D$, quod per Corol. 1. liquet. Invento autem puncto G , ex dato quovis alio tempore quod v. gr. sit ad tempus primò datum ut area $A B S R$, ad aream $A B E D$, dabitur velocitas quæ erit reciprocè ut $G R$, seu quæ erit ad velocitatem sub initio in A , ut $G A$ ad $G R$ datam.

PROPOSITIO XII. THEOREMA IX.

Isdem positis, dico quòd si spatia descripta sumantur in progressionem arithmeticâ, velocitates datâ quâdam quantitate auctæ erunt in progressionem geometricâ.

In asymptoto CD detur punctum R , et erecto perpendiculo RS ; quod occurrat hyperbolæ in S , exponatur descriptum spatium per aream hyperbolicam $RSED$; et velocitas erit ut longitudo GD , quæ cum datâ CG componit longitudinem CD in progressionem geometricâ decrescentem, interea dum spatium $RSED$ augetur in arithmeticâ.

(^h) Etenim ob datum spatii incrementum ED d e , lineola Dd , quæ decrementum est ipsius GD , erit reciprocè ut ED , ideóque directè ut CD , hoc est, ut summa ejusdem GD et longitudinis datæ CG . Sed velocitatis decrementum, tempore sibi reciprocè proportionali, quo data spatii particula



Dd e E describitur, (ⁱ) est ut resistentia et tempus conjunctim, id est directè ut summa duarum quantitatum, quarum una est ut velocitas, altera ut velocitatis quadratum, et inversè ut velocitas; ideóque directè ut summa duarum quantitatum, quarum una datur, altera est ut velocitas. Decrementum igitur tam velocitatis quam lineæ GD , est ut quantitas data et quantitas decrescens conjunctim, et propter analogâ decrementa, (^k) analogæ semper erunt quantitates decrescentes; nimirum velocitas et linea GD . Q. e. d.

Corol. 1. Si velocitas exponatur per longitudinem GD , spatium descriptum erit ut area hyperbolica DES .

Corol. 2. Et si utcumque assumatur punctum R , inveniatur punctum G capiendi GR ad GD , ut est velocitas sub initio ad velocitatem post spa-

(^h) * Etenim ob datum spatii incrementum, per hypothesim quâ spatia supponuntur in arithmeticâ progressionem crescere.

(ⁱ) * Est ut resistentia et tempus conjunctim. Velocitatis decrementum est ut resistentia et tempus conjunctim (15), tempus verò est ut incrementum spatii directè et velocitas inversè,

adeóque dato spatii incremento ut velocitas inversè. Quare dato spatii incremento, velocitatis decrementum est ut resistentia directè et velocitas inversè, id est, directè ut summa duarum quantitatum, &c.

(^k) * Analogæ semper erunt, &c. (Per Cor. Lem. IV. Lib. I.).

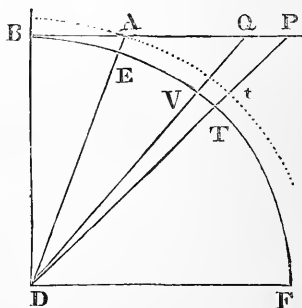
tium quodvis R S E D descriptum. (1) Invento autem puncto G, datur spatium ex datâ velocitate, et contra.

Corol. 3. Unde cùm (per Prop. XI.) detur velocitas ex dato tempore, et per hanc Propositionem detur spatium ex datâ velocitate; dabitur spatium ex dato tempore: et contra.

PROPOSITIO XIII. THEOREMA X.

Pocito quod corpus ab uniformi gravitate deorsum attractum rectâ ascendit vel descendit; et quod eidem resistitur partim in ratione velocitatis, partim in ejusdem ratione duplicatâ: dico quod, si circuli et hyperbolæ diametris parallelæ rectæ per conjugatarum diametrorum terminos ducantur, et velocitates sint ut segmenta quædam parallelarum a dato puncto ducta; tempora erunt ut arearum sectores, rectis a centro ad segmentorum terminos ductis abscissi: et contra.

Cas. 1. Ponamus primo quòd corpus ascendit, centroque D et semi-diametro quovis DB describatur circuli quadrans B E T F, et per semi-diametri DB terminum B agatur infinita B A P, semi-diametro D F parallela. In eâ detur punctum A, et capiatur segmentum A P velocitati proportionale. Et cùm resistantiæ pars altera sit ut velocitas, et pars altera ut velocitatis quadratum; sit resistentia



24) * *Invento autem puncto G, &c.* Si enim
 velocitas data, sit ad velocitatem sub initio ut
 G ad G R, dabitur punctum A , et hinc da-
 bitur area $A B S R$, seu spatium descriptum.
 Et contrà dato spatio, sive datà areâ $A B S R$,
 dabitur punctum A , et inde velocitas G A. Ex
 his autem patet spatium finitum infinito tem-
 pore describi; ubi enim punctum D coincidit
 cum puncto G , velocitas omnis extinguitur, et
 spatium descriptum exponitur per aream finitam
 quam ordinata R S abscondit cum alterâ ordina-
 tâ per G ductâ; velocitas verò nonnisi infinito
 tempore potest evanescere (per Cor. 1. P. 29.
 XI.).

138. *Schol.* Eadem per analysim facillè inveniuntur. Dicantur resistentia r , celeritas initialis c , spatium descriptum s , tempus t , velocitas residua v , ponaturque $r = \frac{a v + v v}{b}$, erit (16, 17)

$$r \, d s = - v \, d v, \text{ seu } a v \, d s + v \, v \, d s = -$$

$b v d v$, et hinc $d \frac{s}{a+v} = -\frac{b d v}{a+v}$, atque adde
 $s = Q - b \times L. \frac{a}{a+v}$; quia verò ubi $s = 0$
 fit $v = c$, invenitur constans $Q = b \times L. \frac{a}{a+c}$,
 et ideò $s = b \times L. \frac{a}{a+v} - \frac{a+c}{a+v}$. Sit $L. h = 1$, et
 erit $\frac{s \times L. h}{b} = L. \frac{a}{a+v} - \frac{a+c}{a+v}$, ac $h \frac{s}{b} = \frac{a+c}{a+v}$;
 undè eruitur $v = \frac{a+c}{h \frac{s}{b}} - a$; quare dato spa-

tio datur velocitas et contrà. Cùm autem sit

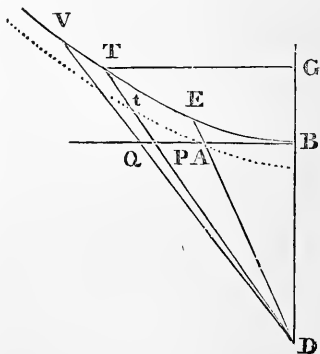
$$(15) \quad dt = \frac{ds}{v} = -\frac{b \, dv}{a v + v^2} = \frac{b}{a} \times \frac{dv}{a+v} - \frac{b}{a} \times \frac{dv}{v}, \text{ erit } t = Q + \frac{b}{a} \times L. \frac{a+v}{a+v} - \frac{b}{a} \times L. v = Q + \frac{b}{a} \times L. \frac{a+v}{v}, \text{ et po-}$$

D F ipsi D B perpendicularis et æqualis, et per verticem F describatur hyperbola F T V E, cujus semi-diametri conjugatæ sint D B et D F, quæque secet D A in E, et D P, D Q in T et V; et erit tempus ascensus totius ut hyperbolæ sector T D E.

Nam velocitatis decrementum PQ , in datâ temporis particulâ factum, est ut summa resistantiæ $APq + 2BA P$ et gravitatis $ABq - BDq$, ⁽⁴⁾ id est, ut $BPq - BDq$. Est autem area DTV ad aream DPQ ut DTq ad DPq ; ideóque, si ad DF demittatur perpendicularum GT , ut GTq seu $GDq - DFq$ ad BDq , utque GDq ad BPq , et divisim ut DFq ad $BPq - BDq$. Quare cum area DPQ sit ut PQ , id est, ut $BPq - BDq$; erit area DTV ut datum DFq . Decrescit igitur area EDT uniformiter singulis temporis particulis æqualibus, per subductionem particularum totidem datarum DTV , et propterea tempori proportionalis est. Q. e. d.

Cas. 3. Sit A P velocitas in descensu corporis, et A P q + 2 B A P resistentia, et B D q — A B q vis gravitatis, existente angulo D B A recto. Et si centro D, vertice principali B, describatur hyperbola rectangularia B E T V secans productas D A, D P et D Q in E, T et V; erit hyperbolæ hujus sector D E T ut tempus totum descensûs.

Nam velocitatis incrementum PQ , eique proportionalis area DPQ , est ut excessus gravitatis supra resistantiam, id est, ut $BDq - ABq - 2BAP - APq$ seu $BDq - BPq$. Et area DTV est ad aream DPQ ut DTq ad DPq , ideóque (^r) ut GTq seu $GDq - BDq$ ad BPq , utque GDq ad BDq , et divisim ut BDq ad $BDq - BPq$. Quare cum area DPQ sit ut $BDq - BPq$, erit area DTV ut datum BDq . Crescit igitur area EDT uniformiter singulis temporis particulis æqualibus, per additionem totidem datarum particularum DTV , et propterea temporis descensus proportionalis est. Q. e. d.

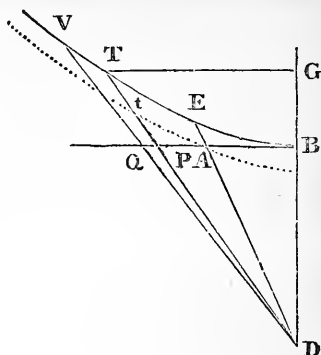


ut area $D P Q$ ad $D P^2$. Cùm igitur (ex dem.) area $D P Q$ sit ut $D P^2$, erit etiam area $D T V$ ut $D T^2$, seu ut datum quadratum $D B^2$; ergo, tempore dato, data est area $D T V$, et ideo temporibus æqualibus *æqualiter* decrescit area $E D T$, ad modum temporis futu-

(q) * Id est ut $B P q - B D q$. Est enim
 $A P q + 2 B A P + A B q = B P q$.

(^r) *Ut G T q*. Nam ob similitudinem triangulorum D G T, P B D est D T q ad D P q ut G T q = G D q — B D q (ex conic. vid. not. in Cas. 2. Prop. IX.) ad B D q, *utque G D q ad B D q, et divisim, &c.*

Corol. Si centro D semi-diametro DA per verticem A ducatur arcus $A t$ similis arcui ET , et similiter subtendens angulum ADT : velocitas AP erit ad velocitatem, quam corpus tempore EDT , in spatio non resistente, ascendendo amittere vel descendendo acquirere posset, ut area trianguli DAP ad aream sectoris $DA t$; ideóque ex dato tempore datur. ^(s) Nam velocitas, in medio non resistente, tempori, atque ideó sectori huic proportionalis est; in medio resistente est ut triangulum; et in medio utroque, ubi quàm minima est, accedit ad rationem æqualitatis, pro more sectoris et trianguli.

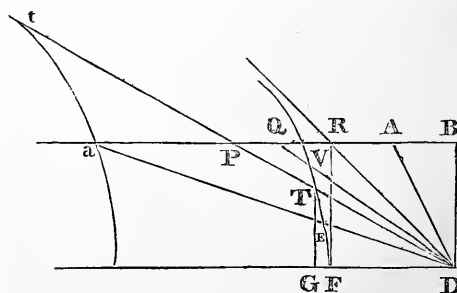


^(s) * Nam velocitas in medio non resistente (25. Lib I.) tempori atque adeó sectori EDT , et proinde sectori $DA t$, proportionalis est; in medio resistente est ut AP , seu ob datam BD ut $\frac{1}{2} BD \times AP$; sivè ut triangulum DAP ; et in medio utroque ubi quàm minima est, nempe initio descensus et quiete vel in fine ascensus accedit ad rationem æqualitatis ob resistantiam evanescentem, evanescente velocitate, pro more sectoris $DA t$ et trianguli DAP cõiuntibus punctis t et P cum puncto A .

139. Quoniam ubi in corporis descensu BP fit $= BD$, angulus BDP semi-rectus evadit, et recta DP asymptotus hyperbolæ æquilatæræ BET ; manifestum est quod corpus e quiete cadendo nonnisi finitam velocitatem infinito tempore possit acquirere. Erit enim velocitas tempore infinito acquisita $BD - AB$. Si verò corpus verticaliter deorsum datâ cum velocitate projiciatur, vel illa velocitas maximæ seu terminali $BD - AB$ æqualis est, et in hoc casu corpus motu uniformi descendit ob resistantiam gravitatis æqualem; vel terminali minor est, et corporis cadentis motus perpetuò acceleratur, donec infinito tempore velocitatem maximam acquirat; vel tandem terminali major est, tumque corporis motus perpetuò retardatur, donec infinito tempore elapso ad velocitatem terminalem reducatur; hoc autem casu sic absolvitur constructio.

Sit A a velocitas datæ projectionis terminali major, AP velocitas perpetuò decrescens, $AP^2 + 2 BAP$ presentia, et $BD^2 - AB^2$ vis gravitatis; existente angulo DBA recto; et si capiatur $BR = BD$, compleaturque quadratum $DBRF$, ac centro D et vertice principali F describatur hyperbola rectangula $FETV$, secans rectas Da , DP et DQ , in E , T , V ; tempus descensus ab initio usquequò residua

corpori velocitas sit AP , erit ut sector hyperbolicus $D E T$; nam velocitatis decrementum PQ , in datâ temporis particulâ factum eique proportionalis area DPQ est ut excessus resistantiæ suprâ gravitatem (18), id est, ut $AP^2 + 2 BAP + AB^2 - BD^2$, seu $BP^2 - BD^2$; et area DTV est ad aream DPQ , ut DT^2 ad DP^2 , ideóque ut GT^2 , (seu $GD^2 - BD^2$) ad BD^2 , et ut GD^2 ad BP^2 , et divisim, ut BD^2 ad $BP^2 - BD^2$. Quare cum area DPQ , sit ut $BP^2 - BD^2$, erit area DTV ut datum BD^2 . Crescit igitur area EDT , uniformiter singulis temporis particulis æqualibus per additionem totidem datarum particularum DTV , et propterea tempori



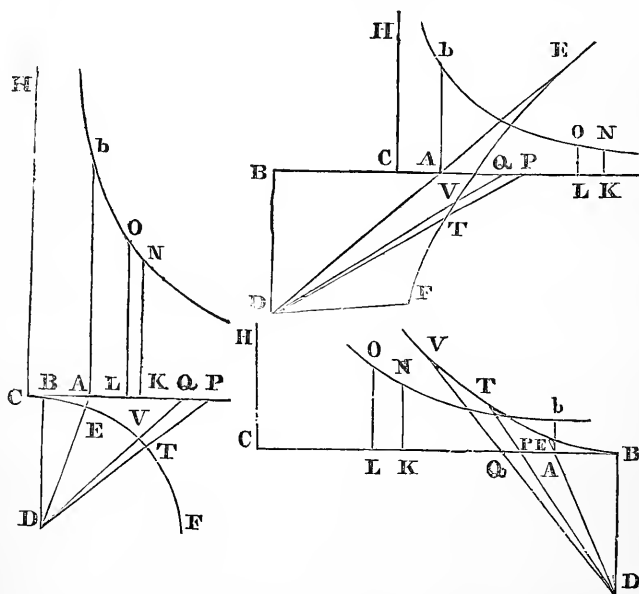
descensus proportionalis est. Coincidente verò puncto P , cum R , et ideó rectâ DP , cum asymptoto DR , velocitas AP terminali AR seu $BD - AB$ æqualis evadit, et sector DET infinitus, proindeque tempus etiam infinitum fit. Q. e. d.

140. Hinc etiam si centro D , semi-diametro Da , per verticem a , ducatur arcus hyperbolicus $a t$ similis arcui ET , et similiter subtendens

PROPOSITIO XIV. THEOREMA XI.

Iisdem positis, dico quod spatium ascensu vel descensu descriptum, est ut differentia areae per quam tempus exponitur, et areae cujusdam alterius quæ augetur vel diminuitur in progressionem arithmeticâ; si vires ex resistentiâ et gravitate compositæ sumantur in progressionem geometricâ.

Capiatur A C in (fig. tribus ultimis) gravitati, et A K resistentiæ proportionalis. Capiantur autem ad easdem partes puncti A si corpus descei-



dit, aliter ad contrarias. Erigatur A b, quæ sit ad D B ut D B q ad 4 B A C: et descriptâ ad asymptotos rectangulas C K, C H hyperbolâ b N, erectaque K N ad C K perpendiculari, ^(t) area A b N K augebitur vel diminuetur in progressionem arithmeticâ, ^(u) dum vires C K in pro-

$\frac{-dx}{xx + bb}$, pendet a quadraturâ sectoris circula-

ris (107), fluens quantitatis $\frac{-dx}{xx - bb}$, a quadraturâ sectoris hyperbolici; atquæ hi sunt tres casus pro corporis ascensu; pro descensu verò est (19) $g dt - 2av dt - v^2 dt = dv$, et

ideò $dt = \frac{dv}{g - 2av - v^2} = \frac{dx}{g + aa - xx}$

$= \frac{dx}{bb - xx}$, ponendo $v + a = x$ et $g + aa =$

bb , fluens autem quantitatis $\frac{dx}{bb - xx}$, pendet a quadraturâ hyperbolæ.

^(t) * Area A b N K augebitur vel, &c. (380. Lib. 1.).

^(u) * Dum vires C K, &c. Sunt enim vires acceleratrices vel retardatrices ut C K, siquidem

gressione geometricâ sumuntur. ^(x) Dico igitur quòd distantia corporis ab ejus altitudine maximâ sit ut excessus areae $A b N K$ supra aream $D E T$.

Nam cùm $A K$ sit ut resistentia, id est, ut $A P q + 2 B A P$; assumatur data quævis quantitas Z , et ponatur $A K$ æqualis $\frac{A P q + 2 B A P}{Z}$;

et (per hujus Lemma II.) erit ipsius $A K$ momentum $K L$ æquale $\frac{2 A P Q + 2 B A \times P Q}{Z}$ seu $\frac{2 B P Q}{Z}$, et areae $A b N K$ momentum

$K L O N$ æquale $\frac{2 B P Q \times L O}{Z}$ ^(z) seu $\frac{B P Q \times B D \text{ cub.}}{2 Z \times C K \times A B}$.

Cas. 1. Jam si corpus ascendit, ^(a) sitque gravitas ut $A B q + B D q$ existente $B E T$ circulo (in figurâ primâ) ^(b) linea $A C$, quæ gravitati proportionalis est, erit $\frac{A B q + B D q}{Z}$, ^(c) et $D P q$ seu $A P q + 2 B A P + A B q + B D q$ erit $A K \times Z + A C \times Z$ seu $C K \times Z$; ^(d) ideóque area $D T V$ erit ad aream $D P Q$ ut $D T q$ vel $D B q$ ad $C K \times Z$.

Cas. 2. Sin corpus ascendit, et gravitas sit ut $A B q - B D q$, ^(e) linea $A C$ (in figurâ secundâ) erit $\frac{A B q - B D q}{Z}$, ^(f) et $D T q$ erit ad $D P q$ ut $D F q$ seu $D B q$ ad $B P q - B D q$ seu $A P q + 2 B A P + A B q - B D q$, id est, ad $A K \times Z + A C \times Z$ seu $C K \times Z$.

in corporis ascensu vis retardatrix est $A C + A K$, seu summa virium gravitatis et resistentiæ, et in descensu vis acceleratrix est $A C - A K = C K$ seu excessus vis gravitatis supra resistentiam (18).

^(x) * Dico igitur quod distantia corporis ascendentis ab ejus altitudine maximâ et distantia descendentis a puncto quietis et quo decidit sit ut excessus, &c.

^(z) * Seu, &c. Nam (per Theor. IV. de Hyp.) est $L O : A b = C A : C K$, et (per constr.) $A b : D B = D B^2 : 4 B A \times A C$, ideóque (ex æquo) $L O : D B = D B^2 : 4 B A \times C K$, et hinc $L O = \frac{D B^3}{4 C K \times B A}$. Quare momentum $K L O N = L O \times K L = \frac{2 B P Q \times L O}{Z} = \frac{B P Q \times B D^3}{2 Z \times C K \times A B}$.

⁽³⁾ * Sitque gravitas, &c. In Cas. 1^o. Prop. XIII. gravitas erat ut $D A^2 = A B^2 + B D^2$.

^(b) * Linea $A C$, &c. Est enim in Cas. 1^o. Prop. XIII. gravitas ad resistentiam ut $A B^2$

+ $B D^2$ ad $A P^2 + 2 B A P$, et (per Hyp.) ut $A C$ ad $A K$, seu $\frac{A P^2 + 2 B A P}{Z}$. Quare erit $A B^2 + B D^2$ ad $A P^2 + 2 B A P$ ut $A C$ ad $\frac{A P^2 + 2 B A P}{Z}$, et hinc habetur $A C = \frac{A B^2 + B D^2}{Z}$, et $A C \times Z = A B^2 + B D^2$.

^(c) * Et $D P q$, &c. Ob angulum $D B P$ rectum, et quia $A K \times Z = A P^2 + 2 B A P$, atque $A C \times Z = A B^2 + B D^2$, ut ex superioribus patet.

^(d) * Ideóque area $D T V$, &c. Nam (ex dem. in 1^o. Casu Prop. XIII.) area $D T V$ est ad aream $D P Q$, ut $D T^2$ vel $D B^2$ ad $D P^2$, et est $D P^2 = C K \times Z$.

^(e) * Linea $A C$, &c. Patet ut in primo casu hujus.

^(f) * Et $D T q$ erit ad $D P q$. Patet (ex dem. in Cas. 2^o. Prop. XIII.)

feratur areæ D E T momentum D T V seu B D \times m, et restabit $\frac{A P \times B D \times m}{A B}$. Est igitur differentia momentorum, id est, momen-

tum differentiæ arearum, æqualis $\frac{A P \times B D \times m}{A B}$; et propterea ob da-

tum $\frac{B D \times m}{A B}$ ut velocitas A P, ^(k) id est, ut momentum spatii quod cor-

pus ascendendo vel descendendo describit. Ideoque differentia arearum et spatium illud proportionalibus momentis crescentia vel decrescentia et simul incipientia vel simul evanescentia, ^(l) sunt proportionalia. Q. e. d.

Corol. Si longitudo, quæ oritur applicando aream D E T ad lineam B D, dicatur M; et longitudo alia V sumatur in eâ ratione ad longitudinem M, quam habet linea D A ad lineam D E: spatium, quod corpus ascensu vel descensu toto in medio resistente describit, erit ad spatium in medio non resistente e quiete cadendo eodem tempore describere potest, ut arearum prædictarum differentia ad $\frac{B D \times V^2}{A B}$: ideoque ex dato

tempore datur. Nam spatium in medio non resistente est in duplicatâ ratione temporis, ^(m) sive ut V^2 ; et ob datas B D et A B ut $\frac{B D \times V^2}{A B}$.

⁽ⁿ⁾ Hæc area æqualis est areæ $\frac{D A q \times B D \times M^2}{D E q \times A B}$, ^(o) et ipsius M momentum est m; et propterea hujus areæ momentum est $\frac{D A q \times B D \times 2 M \times m}{D E q \times A B}$.

Hoc autem momentum est ad momentum differentiæ arearum prædictarum D E T et A b N K, viz. ad $\frac{A P \times B D \times m}{A B}$, ut $\frac{D A q \times B D \times M}{D E q}$

ad $\frac{1}{2} B D \times A P$, ^(p) sive ut $\frac{D A q}{D E q}$ in D E T ad D A P, ideoque, ubi

^(k) * *Id est ut momentum spatii.* Nam dato temporis momento, momentum spatii est ut velocitas (11.).

^(l) * *Sunt proportionalia.* (Per Corol. Lem. IV. Lib. I.) Dum autem evanescit A P, seu velocitas, evanescit quoque resistentia A K, cum areâ A b N K, et tempore D T E.

^(m) * *Sivè ut V^2 .* Nam ob datas B D, D A, D E, longitudo quæ æquatur D E T $\times \frac{D A}{B D \times D E}$ (per Hyp.) est ut area D E T, seu ut tempus. Spatium autem in medio non resistente est in duplicatâ ratione temporis (27. Lib. I.) ideoque ut V^2 .

⁽ⁿ⁾ * *Hæc area.* Quoniam (per Hyp.) V: M = D A: D E, erit V = $\frac{D A \times M}{D E}$ et

Vol. I.

$$V^2 = \frac{D A^2 \times M^2}{D E^2}, \text{ adeoque } \frac{B D \times V^2}{A B} = \frac{D A^2 \times B D \times M^2}{D E^2 \times A B}.$$

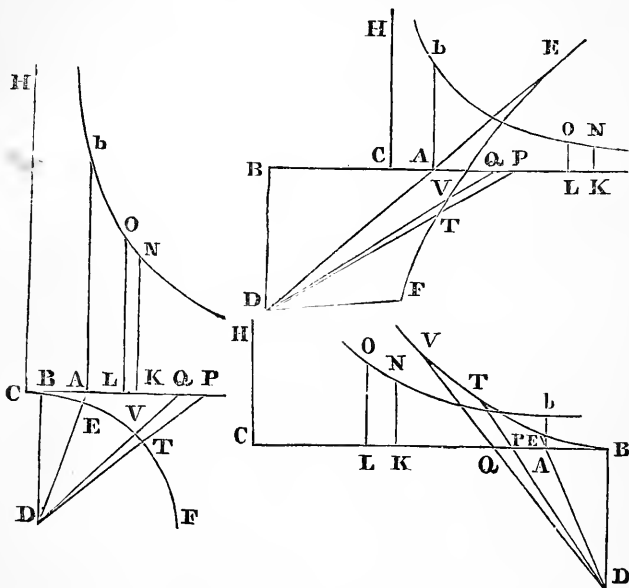
^(o) * *Et ipsius M momentum est m.* Cùm enim sit (per Hyp.) M = $\frac{D E T}{B D}$, momentum

ipsius M, erit $\frac{D T V}{B D}$, sed superius supposebatur D T V = B D \times m; quare momentum ipsius M, est m; et ideò momentum quadrati M^2 est 2 M \times m (per Cas. 3. Lem. hujus) et propterea ob datas D A, B D, D E et A B, hujus areæ momentum, &c.

^(p) * *Sivè ut $\frac{D A q}{D E q}$ in D E T, &c.* Ob

L 1

areae $DE T$ et $DA P$ quam minimæ sunt, ^(q) in ratione æqualitatis. Area igitur $\frac{BD \times V^2}{AB}$, et differentia arearum $DE T$ et $Ab N K$, quan-



do omnes hæ areae quam minimæ sunt, æqualia habent momenta; ^(r) ideóque sunt æquales. Unde cum velocitatès, et propterea etiam spatia in medio utroque in principio descensûs vel fine ascensûs simul descripta ^(s) accedant ad æqualitatem; ideóque tunc sint ad invicem ut area $\frac{BD \times V^2}{AB}$, et arearum $DE T$ et $Ab N K$ differentia; et præterea cùm

$M = \frac{DE T}{BD}$, ideóque $M \times BD = DE T$,
et $\frac{1}{2} BD \times AP = DAP$.

^(q) * In ratione æqualitatis. Ubi enim areae $DE T$ et $DA P$ quam minimæ sunt, fit $DE T : DAP = DE^2 : DA^2$, ideóque $\frac{DE^2}{DA^2} \times DE T = DAP$.

^(r) Ideóque sunt æquales. Quandò sunt quam minimæ.

^(s) Accedant ad æqualitatem. Ob resistantiam cum velocitate nascentem vel evanescentem, manente gravitate.

144. Constructione Casûs 3ⁱ. Propositionis hujus 14^æ uti possumus ad determinandum motum corporis verticaliter deorsum projecti cum

velocitate quæ terminali minor est. Nam si æqualis ipsi fuerit, motus est æquabilis; si verò celeritas projectionis terminali major sit, paulò mutanda erit Casûs tertii constructio. Iisdem enim positis in not. 139. capiatur AC gravitati et AK resistantiæ proportionalis, ità ut sit C inter A et K , quod resistantia gravitate major supponatur. Sit A a velocitas projectionis terminali major; erigatur perpendicularis ab , quæ sit ad DB , ut DB^2 , ad $4AB \times Ca$, et descripta ad asymptotos rectangulas CK , CH hyperbolâ bN , erectâque KN ad CK , perpendiculari, area $ab N K$ augebitur in progressionem arithmeticâ, dum vires CK in progressionem geometricâ minuuntur. Spatium autem tempore $DE T$ descriptum erit ut excessus areae $ab N K$, suprâ aream $DE T$; nam ponatur, (ut in de-

spatium in medio non resistente sit perpetuò ut $\frac{B D \times V^2}{A B}$, et spatium in

medio resistente sit perpetuò ut arearum D E T et A b N K differentia: necesse est, ut spatia in medio utroque, in æqualibus quibuscunque tem-

poribus descripta, sint ad invicem ut area illa $\frac{B D \times V^2}{A B}$, et arearum

DET et AbNK differentia. Q. e. d.

monstrazione Prop. XIV.) $AK = \frac{AP^2 + 2BAP}{Z}$,

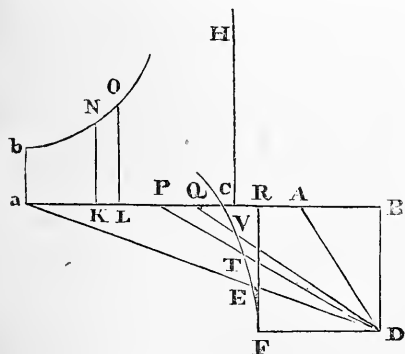
et ideò $K L = \frac{2 B P Q}{Z}$, atque areæ a b N K

$$\text{momentum K L O N,} = \frac{2 \text{ B P Q} \times \text{L O}}{Z} =$$

$\frac{B P Q \times D B^3}{2 Z \times A B \times C K}.$ Cum gravitas sit ut

$$BD^2 - AB^2, \text{ erit } AC = \frac{BD^2 - AB^2}{Z},$$

et area D T V ad aream D P Q ut $\bar{B} D^2$ ad
 $B P^2 - B D^2$ (136) sive $A P^2 + 2 B A P$



$\frac{+AB^2 - BD^2}{AB}$, sive $AK \times Z - AC \times Z$,
 vel $CK \times Z$. Si itaque pro aræ constante
 $D T V$, scribatur $BD \times m$, erit aræ $D P Q$,
 id est, $\frac{1}{2} BD \times P Q$ ad $BD \times m$, ut CK
 $\times Z$ ad BD^2 , atque inde fit $P Q \times B D^2 =$
 $= 2 B D \times m \times CK \times Z$, et aræ $a b N K$
 momentum $K L O N$ superius inventum fit
 $\frac{B P \times B D \times m}{AB}$ auferatur aræ $D E T$

momentum $\frac{D T V}{A B \times B D \times m}$ seu $\frac{B D \times m}{A B}$ et restabit

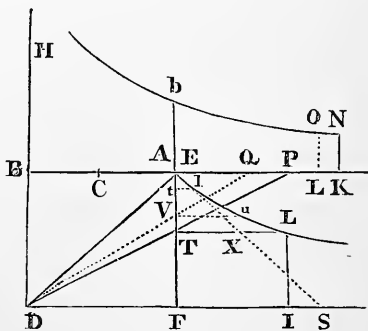
mentorum, id est, momentum differentiae arearum ut velocitas A P, id est, ut momentum spatii quod corpus describit, ideóque differentia arearum ut spatium descriptum.

145. Hinc spatium tempore $D E T$, velocitate uniformi A a descriptum est ad spatium eo-

dem tempore descriptum in medio resistente ut factum $A a \times D E T$ ad arearum $a b N K$ et $D E T$ differentiam in $A B$ ductam. Nam spatium tempore $D E T$, velocitate uniformi $A a$ descriptum, est ut $A a \times D E T$ (5. Lib. I.) et spatii hujus momentum est ut $A a \times D T V$; momentum autem spatii in medio resistente descripti est ut $A P \times D T V$, seu ut velocitas in momentum temporis ducta (12) et quia evanescente $D E T$, fit $A P = A a$, hæc momenta $A a \times D T V$, $A P \times D T V$, initio temporis æqualia sunt, sicut et spatia initio descripta. Sed $A P \times D T V = A P \times B D \times m$ et momentum differentie arearum $a b N K$ et $D E T$; est $\frac{A P \times B D \times m}{\Delta B}$ (144). Ergo

A P \times D T V æquale est momento differentiae
arearum a b N K et D E T per A B ducto,
unde manifestum est propositum.

146. Si corporis ascendens velocitas exponatur per longitudinem A P, et resistētia per A K quæ ponatur esse ut $A P^2 + 2 B A P$, ita ut assumptâ datâ quâvis quantitate Z, sit $A K = \frac{A P^2 + 2 B A P}{Z}$; vis autem gravitatis exponatur per A C, quæ sit semper ut $A B^2$, ita ut



sit $A C = \frac{A B^2}{Z}$ eademque constructio fiat
 quæ (not. 141.) * et in A erigatur perpendicu-
 lum $A b = \frac{A B^2}{4 C A}$. Denique erecto perpendi-

partem illam, quæ oritur ex densitate fluidi, diximus esse in duplicata ratione velocitatis; pars altera, quæ oritur ex tenacitate fluidi, est uniformis, sive ut momentum temporis: ideóque jam pergere liceret ad motum corporum, quibus resistitur partim vi uniformi seu in ratione momentorum temporis, et partim in ratione duplicatâ velocitatis. Sed sufficit aditum patefecisse ad hanc speculationem in Propositionibus VIII. et IX. quæ præcedunt, et eorum Corollariis. ^(u) In iisdem utique pro corporis ascendentis resistentiâ uniformi, quæ ex ejus gravitate oritur, substitui potest resistentia uniformis, quæ oritur ex tenacitate medii, quando corpus solâ vi insitâ movetur; et corpore rectâ ascendente addere licet hanc uniformem resistentiam vi gravitatis; eandemque subducere, quando corpus rectâ descendit. Pergere etiam liceret ad motum corporum, quibus resistitur partim uniformiter, partim in ratione velocitatis, et partim in ratione duplicatâ velocitatis. Et viam aperui in Propositionibus præcedentibus XIII. et XIV. ^(x) in quibus etiam resistentia uniformis, quæ oritur ex tenacitate medii pro vi gravitatis, substitui potest, vel cum eâdem, ut prius, componi. Sed propero ad alia.

^(u) * *In iisdem utique* (105).

^(x) * *In quibus etiam resistentia uniformis*, hoc est, si corpus solâ vi insitâ feratur, in constructionibus Prop. XIII. et XIV., quæ sunt pro corporis ascensu, loco gravitatis substituenda est resistentia uniformis quæ oritur ex tenacitate medii; si corpus ascendens vi gravitatis etiam urgeatur, quantitas illa quæ solam gravitatem

exponebat, summam gravitatis et resistentiæ uniformis in prædictis constructionibus exponet. Tandem si corpus vi gravitatis descendat, eadem quantitas quæ solam gravitatem exponebat, excessum gravitatis supra resistentiam uniformem in constructionibus quæ sunt pro descensu representabit (cæteris manentibus.)

SECTIO IV.

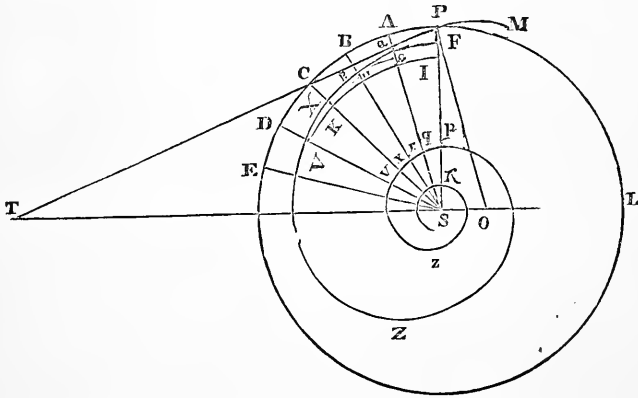
De corporum circulari motu in mediis resistentibus ().*

(*) Newtonus in hac sectione præcipuas supponit logarithmicæ spiralis proprietates, postulat igitur instituti nostri ratio ut de illâ curvâ aliquid præmittamus.

147. Circulus $PAEL$, centro S , et radio quovis SP descriptus divisus sit in arcus quotlibet æquales PA , AB , BC , CD , &c., sintque radiorum PS , AS , BS , CS , &c., partes PS , QS , RS , XS , &c. in continuâ progressionem geometricâ, puncta P , Q , R , X , &c., erunt in spirali logarithmicâ in quâ proindè si radii Q S ,

fiunt propter latera circâ æquales ad centrum angulos proportionalia (147) et ideò alii anguli homologi SPQ , SQR , SRX , &c., et PQS , QRS , RXS , æquales sunt.

150. Quoniam itaque spira quælibet $PQRZp$, $pqrz\pi$, &c., totidem triangulis PQS et pqs , QRS et qrs , &c. similibus similiterque positis divisa est, spiræ omnes quæ a radio positione dato SP , ad eundem radium ductæ sunt, inter se similes radiisque correspondentibus proportionales erunt, id est $PS : p = PQRZp$



R S , X S , &c., sint numeri, arcus circuli PA , PB , PC , &c., sicut et anguli PSQ , PSR , PSX , &c., erunt ut illorum numerorum logarithmi, prorsus ut in vulgari logarithmicâ axis partes sunt ut logarithmi ordinarum correspondentium.

148. Quoniam autem progressio geometrica in infinitum decrescere et crescere potest, manifestum est spiralem logarithmicam utrinquè tam ad centrum S accedendo quàm ab eodem versùs M recedendo per gyros infinitos continuari posse, continuatâ progressionem radiorum decrescentium vel crescentium circâ centrum S , ad quod idcirco curva decrescentibus radiis proportionalibus, magis magisque accedit, licet numquam illud possit attingere, sive ut loqui amant, licet illud centrum non attingat nisi post infinitas revolutiones.

149. Angulus SQR , quem radius quilibet SQ , cum curvâ ad easdem partes constituit constans est; si quidem evanescentibus arcubus æqualibus PA , AB , BC , &c., triangula evanescunt PSQ , QSR , RSX , &c., similia

$pqrz\pi$, &c. Atquè hinc sequitur (147) tam spiras omnes quàm radios ipsis correspondentes ad centrum usque in progressionem geometricâ decrescere, sunt enim PS , pS , πS , &c. progressionis geometricæ termini æquidistantes ob æqualem angulorum æqualium PSQ , QSR , pSq , qSr , &c. numerum in singulis spiris comprehensum, undè radiorum quoque differentia Pp , $p\pi$, &c. in eadem geometricâ progressionem decrescent.

151. Ductâ rectâ PT spiralem tangentem in P , et rectâ PO ad eandem perpendiculari, per centrum S erigatur ad radium SP perpendiculum TSO rectis PT et PO occurrens in T et O , longitudo spiralis $PZp\pi S$, ad centrum usque S , æquabitur tangenti PT , eritque proindè ad radium SP in datâ ratione PT ad SP , vel OP ad OS . Nam centro S , radiis SQ , SR , SX , SV , &c. infinitè propinquis descripti sint arcus circulares QF , RG , XH , VK , &c., et ob angulos QFP , RGQ , XHR rectos, angulosque QPF , RQG , XRH , &c. æqua-

les (149), triangula evanescentia $P F Q$, $Q G R$, $R H X$, &c. similia sunt triangulo $P S T$, est igitur $P T : P S = P Q : P F = Q R : Q G = R X : R H$, &c. et composite $P T : P S = P Q + Q R + R X$, &c. : $P F + Q G + R H$, &c. id est, ut longitudo spiralis ad totum radium $P S$. Quare longitudo spiralis æquatur tangenti $P T$. Est autem ubique tangens $P T$ ad radium correspondentem $P S$, in ratione datâ, ob triangulum $P T S$ specie datum (149) et ob triacula $T P S$, $P O S$, (per constr.) similia, est etiam $O P : O S = P T : P S$, seu ut longitudo spiralis ad radium.

152. Hinc quoque patet quòd si centro S et radio quovis $V S$ describatur circulus secans spiralem in V et radium $P S$, in I , pars spiralis $P V$ erit ad partem $P I$ radii $P S$, ut tangens $P T$ ad totum radium $P S$. Quare si, manentibus circuloꝝ radiis $S P$, $S I$, mutetur utcumque angulus $T P S$, quem spiralis seu ipsius tangens continet cum radio $P S$, longitudo spiralis tota ad centrum usquè S , sicut et longitudo inter duos circulos radiis $S P$, et $S I$ descriptis comprehensa, erit ut spiralis tangens $P T$, seu ut secans anguli $T P S$. Ostendimus (151) longitudinem spiralis æqualem esse tangenti $P T$, et partem spiralis $P V$, inter prædictos circulos contentam, esse ad tangentem $P T$, in ratione $P I$ ad $P S$, quæ (per Hyp.) data est; manente autem radio seu sinu toto $P S$, est $P T$ secans anguli $P T S$.

153. Dicantur radius constans $P S = a$, subtangens $S T = b$, arcus quilibet circuli $P C$ vel $P C L P + P C$, vel $2 P C L P + P C = x$, correspondens spiralis radius $S X = y$, qui crescente arcu x decrescit, erit ob triangulorum $X K V$, $P S T$ similitudinem $P S : S T = X K : V K$, et ob sectores $S V K$, $S D C$ similes, $S K$ sive $S X : S C$ seu $P S = V K : D C$, ideòque ex æquo $S X : S T = X K : D C$; id est, $y : b = -d y$;

$d x = -\frac{b d y}{y}$, hinc sumptis fluentibus $x = Q - b L. y$, et quia ubi $x = 0$, fit $y = a$, erit $Q = b L. a$, et ideò $x = b L. a - b L. y = b L. \frac{a}{y}$; si itaque datus fuerit radius y cum arcu circulari x , seu angulo $P S C$ dabitur b subtangens anguli spiralis, est enim $b = \frac{x}{\frac{a}{y}}$. Si verò

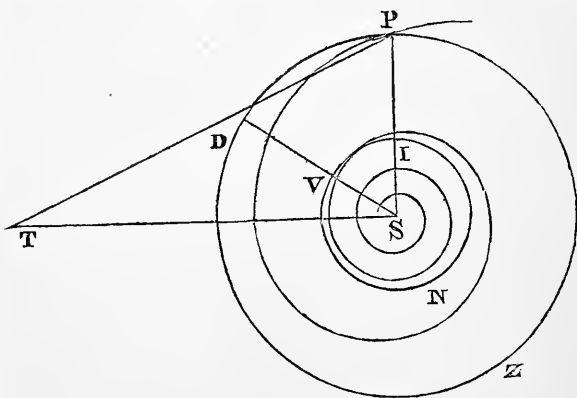
datus sit tum arcus x tum subtangens b dabitur radius y ; ponatur enim $L. h = 1$ et erit $\frac{x}{b} \times$

$$L. h = L. \frac{a}{y}, \text{ adeòque } h \frac{x}{b} = \frac{a}{y}; y = \frac{a}{h \frac{x}{b}},$$

et hinc aitem $a = y \times h \frac{x}{b}$.

154. Hinc si manentibus radiis $S P$ seu a , et $S V$ vel $S I$ seu y , adeòque et $L. \frac{a}{y}$, mutetur utcumque angulus $T P S$, quem spiralis cum radio continet, arcus circularis $P D$ vel x , comprehensus inter radios $S P$ et $S V D$, erit semper ut subtangens spiralis $S T$, seu b , quæ, manente radio seu sinu toto $P S$, est ut anguli $T P S$ tangens.

155. Iisdem positis, hoc est, manentibus radiis $S P$ sive a , et $S I$ sive y , et utcumque mutato angulo $T P S$, numerus revolutionum spiralis inter circulos $P D Z P$, et $I V N I$ centro S et radiis datis $S P$, $S V$ vel $S I$ descriptos est ut tangens $S T$ anguli $T P S$, quem spiralis cum radio continet. Sit enim c circumferentia circuli $P D Z P$, et n numerus integer vel fractus revolutionum spiralis a puncto P ad punctum V inter circulos $P D Z P$, et $I V N I$, erit (153) $n c = x = b L. \frac{a}{y}$; et hinc $n = \frac{b}{c} \times L. \frac{a}{y}$. Quare ob datas c , a et y , (per Hyp.) erit n ut b , id est numerus revolutionum inter circulos datos ut subtangens spiralis $S T$, seu ut tangens anguli $T P S$, quem spiralis cum radio continet.

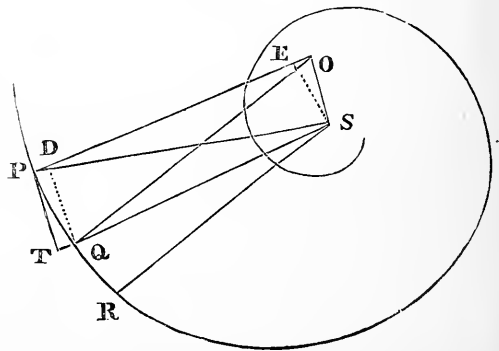


156. Spiralis post infinitos sibi super-impositos gyros comprehendit cum radio $P S$ spatium duplum trianguli $P S T$. Iisdem enim positis quæ num. 153. cum sit (fig. pag. præced.) $P S (a) : S T (b) = X K (-d y) : V K = -\frac{b d y}{a}$, erit sector $S V K$ seu $S V X = -\frac{y b d y}{2 a}$, et sumptis fluentibus, sector $S P V = Q - \frac{b y^2}{4 a}$; quia verò evanescente sectore $S P V$, fit

LEMMA III.

Sit P Q R spiralis quæ secet radios omnes S P, S Q, S R, &c. in æqualibus angulis. Agatur recta P T quæ tangat eandem in puncto quovis P, secetque radium S Q in T; et ad spiralem erectis perpendicularis P O, Q O concurrentibus in O, jungatur S O. Dico quod si puncta P et Q accedant ad invicem et coëant, angulus P S O evadet rectus, et ultima ratio rectanguli T Q \times 2 P S ad P Q quad. erit ratio æqualitatis.

Etenim de angulis rectis O P Q, O Q R subducantur anguli æquales S P Q, S Q R, et manebunt anguli æquales O P S, O Q S. Ergo circulus qui transit per puncta O, S, P ^(y) transibit etiam per punctum Q. Coëant puncta P et Q, et hic circulus in loco coitûs P Q tanget spiralem, ^(z) ideôque perpendiculariter secabit rectam O P. Fiet igitur O P diameter circuli hujus, et angulus O S P in semicirculo rectus. Q. e. d.



Ad O P demittantur perpendicularia Q D, S E, ^(a) et linearum rationes ultimæ erunt hujusmodi: T Q ad P D ut T S vel P S ad P E, seu 2 P O ad 2 P S; item P D ad P Q ut P Q ad 2 P O; et ex æquo perturbatè T Q ad P Q ut P Q ad 2 P S. Unde fit P Q q æquale T Q \times 2 P S. Q. e. d.

$y = a$, erit $Q = \frac{b a^2}{4 a}$, et hinc $S P V = \frac{b a a - b y y}{4 a}$. Quarè ubi radius $y = o$, fiet area $S P V = \frac{b a}{4} = \frac{P S \times S T}{4} = \frac{1}{2}$ triang. P S T.

^(y) * Transibit etiam per punctum Q. (Per Prop. XXI. Lib. III. Elem.)

^(z) Ideôque perpendiculariter secabit rectam O P, quæ (per Hyp.) perpendicularis est ad arcum Q P, fiet igitur O P diameter circuli hujus (per Prop. XIX. Lib. III. Elem.) et angulus O S P in semi-circulo rectus (per Prop. XXI. Lib. III. Elem.).

^(a) * Et linearum rationes ultimæ. Quoniam lineæ P T, D Q, E S ad P O normales, sunt parallele, erit (per Prop. X. Lib. VI. Elem.) T Q : P D = T S vel P S : P E, et ob similitudinem triangulorum P S O, P E S, P S : P E = P O : P S, seu 2 P O : 2 P S, ideôque T Q : P D = 2 P O : 2 P S. Quia verò radii O P, O Q sunt ad arcum evanescentem P Q perpendiculares, punctum O est centrum, P O radius et 2 P O diameter circuli spiralem osculantis in P (121. Lib. I.) et (per Lem. VII. Lib. I.) P Q hujus circuli arcus vel chordæ; atque adeò (ex naturâ circuli) abscissa P D est ad chordam P Q ut P Q ad diametrum 2 P O. Quarè ex æquo perturbatè, &c.

Si medii densitas in locis singulis sit reciprocè ut distantia locorum a centro immobili, sitque vis centripeta in duplicatâ ratione densitatis; dico quod corpus gyrari potest in spirali, quæ radios omnes a centro illo ductos intersectat in angulo dato.

seu $2 Q q = R v - r v = R r$, et ideò $Q q = \frac{1}{2} R r$. Itaque eodem tempore quo resistentia generat decrementum $Q q$, seu $\frac{1}{2} R r$, vis

centripeta quâ corpus a tangente P T (vid. fig. ext.) ad punctum Q arcus P Q retrahitur, generat decrementum T Q, et ideo vis resistentialis est ad vim centripetam ut $\frac{1}{2}$ R a et T Q, (per Cor. 4. Lem. X.) atque hæc omnia generaliter obtinent, quæcumque fuerit tum curva P Q R, cuius proprietates nondum adhibuimus, tum vis centripeta, tum resistentialis, tum velocitas corporis.

ad arcum Rr ut SQ ad $SP - \sqrt{SP \times SQ}$, seu $\frac{1}{2} VQ$. Nam punctis P et Q coëuntibus, ratio ultima $SP - \sqrt{SP \times SQ}$, ad $\frac{1}{2} VQ$ (^m) est æqualitatis. Quoniam decrementum arcûs PQ , ex resistantiâ oriundum, sive hujus duplum Rr , (ⁿ) est ut resistantia et quadratum temporis conjunctim; (^o) erit resistantia ut $\frac{Rr}{PQq \times SP}$. Erat autem PQ

ad Rr , ut SQ ad $\frac{1}{2} VQ$, et inde $\frac{Rr}{PQq \times SP}$ fit ut $\frac{\frac{1}{2} VQ}{PQ \times SP \times SQ}$

sive ut $\frac{\frac{1}{2} OS}{OP \times SPq}$. Namque punctis P et Q coëuntibus, SP et SQ

coincidunt, et angulus PVQ fit rectus; (^p) et ob similia triangula PVQ ,

PSO , fit PQ ad $\frac{1}{2} VQ$ ut OP ad $\frac{1}{2} OS$. Est igitur $\frac{OS}{OP \times SPq}$

ut resistantia, (^p) id est, in ratione densitatis medii in P et ratione duplicatâ velocitatis conjunctim. Auferatur duplicata ratio velocitatis, nempe

ratio $\frac{1}{SP}$, et manebit medii densitas in P ut $\frac{OS}{OP \times SP}$. Detur spiralis,

(^r) et ob datam rationem OS ad OP , densitas medii in P erit ut $\frac{1}{SP}$.

In medio igitur cujus densitas est reciproce ut distantia a centro SP , corpus gyrrari potest in hâc spirali. Q. e. d.

Corol. 1. (^s) Velocitas in loco quovis P ea semper est, quâcum corpus in medio non resistente eâdem vi centripetâ gyrrari potest in circulo, ad eandem a centro distantiam SP .

Corol. 2. Medii densitas, si datur distantia SP , est ut $\frac{OS}{OP}$, sin distan-

$\sqrt{SP \times SQ}$, et $PQ : SQ = Qr : SP$, erit etiam $Qr : SP = QR : \sqrt{SP \times SQ}$, unde erit $PQ : SQ = Qr - QR$ seu $Rr : SP - \sqrt{SP \times SQ}$, et hinc $PQ : Rr = SQ : SP - \sqrt{SP \times SQ}$.

(^m) * Est æqualitatis. Est enim $SQ = SP - VQ$, et proinde $SP \times SQ = SP^2 - SP \times VQ$, ideôque extrahendo radicem quadratam (per formulam Lib. I. 551.) fit $\sqrt{SP \times SQ} = SP - \frac{1}{2} VQ - \frac{VQ^2}{8SP}$, &c., in infinitum; cæteri verò termini post secundum negligi possunt, quia coëuntibus P et Q , evanescent respectu VQ , et ideò erit $\sqrt{SP \times SQ} = SP - \frac{1}{2} VQ$, ac proinde $\frac{1}{2} VQ = SP - \sqrt{SP \times SQ}$.

(ⁿ) * Est ut resistantia et quadratum temporis conjunctim. (Per Cor. 3. Lem X Lib. I.)

(^o) Erit resistantia, &c. Nam tempus est ut $PQ \times \sqrt{SP}$ (ex dem.).

(^p) * Et ob similia triangula PVQ , PSO , angulus PSO (per Lemma novissimum) rectus est et ideò æqualis angulo etiam recto PVQ , et præterea si ex angulis rectis QPO et VPS subducatur communis angulus QPS , remanent æquales VPQ et SPQ ; quare triangula PVQ et PSO sunt similia.

(^q) * Id est in ratione, &c. (per Hyp.)

(^r) * Ob datam rationem OS ad OP . Datâ spirali datur angulus QPS et hinc in triangulo SPQ datur angulus SPQ cum isto QPS rectum faciens, datur etiam rectus PSO (per Lem. III.) atque ideò trianguli POS anguli omnes datur, et proinde datur ratio OS ad OP .

(^s) * Velocitas in loco quovis P , &c. * Gyrratur corpus in medio non resistente in circulo

Corol. 4. Corpus itaque gyrari nequit in hac spirali, ⁽²⁾ nisi ubi vis resistentiæ minor est quàm

(a) Fiat resistentia æqualis

scribentis velocitas in eodem loco P æqualis est
velocitati quâcum corpus in medio non resis-
tente gyriari potest in circulo ad integrum dis-
tantiam S P. Sed velocitates corporum diversos
circulos describentium (in hypothesi quòd
vires centripetæ sunt reciprocè ut quadrata ra-
diorum) sunt inter se reciprocè in radiorum ra-
tione subduplicata (pro convers. Cor. 6. Prop.
IV. Lib. I.) adeoque velocitas in circulo cuius
radius S P est ad velocitatem in circulo cujus
radius $\frac{1}{2}$ S P, ut $\sqrt{\frac{1}{2}}$ ad $\sqrt{1}$, sive ut 1 ad
 $\sqrt{2}$, erit ergo velocitas corporis in medio resis-
tente per rectam P S descendentis ad veloci-
tatem descendentis in medio non resistente per
rectam eandem et in eodem loco P existentis, ut
1 ad $\sqrt{2}$. Q. e. d.

* Observandum verò quòd velocitates initiales utrinque debent esse secundùm legem quæ in reliquo motu obtinet, hoc est velocitas initialis in medio resistente esse debet æqualis celeritati quâ corpus ad eandem a centro distantiã in medio non resistente circumulum describeret, et velocitas initialis in medio non resistente æqualis esse debet velocitati quâ corpus ad dimidiã a centro distantiã in medio non resistente in circumulo revolveretur.

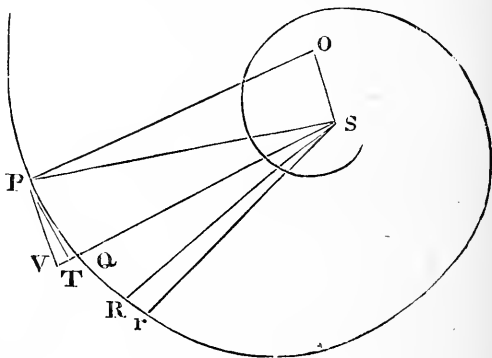
Quoniam itaque velocitas corporis in medio non resistente descendentis datur (per Theor. X. Lib. I.) dabitur etiam velocitas in medio resistente descendentis.

(c) * *Et tempora descensûs, hic erunt reciproce
ut velociates, atquè idè dantur. Nam momenta*

Corol. 5. Et quoniam in æqualibus a centro distantiiis velocitas ^(d) eadem est in spirali P Q R atque in rectâ S P, et longitudo spiralis ad longitudinem rectæ P S est in datâ ratione, ^(e) nempe in ratione O P ad O S; tempus descensûs in spirali erit ad tempus descensûs in rectâ S P ^(f) in eâdem illâ datâ ratione, proindeque datur.

Corol. 6. Si centro S intervallis duobus quibuscunque datis describantur duo circuli; et manentibus hisce circulis, mutetur utcunque angulus quem spiralis continet cum radio

P S: numerus revolutionum quas corpus intra circulorum circumferentias, pergendo in spirali a circumferentiâ ad circumferentiam, complere potest, ^(g) est ut $\frac{P S}{O S}$, sive ut tangens anguli illius quem spiralis continet cum radio P S; ^(h) tempus verò revolutionum earundem ut $\frac{O P}{O S}$, id est, ut secans anguli ejusdem, vel etiam reciproce ut medii densitas.



temporis quibus corpora duo in medio resistente et in eodem non resistente describunt spatium idem quam minimum R v, sunt ut corporum velocitates reciproce (12) id est ut $\sqrt{2}$ et 1 directè (per modò demonstrata) adeoque in datâ ratione. Quare (per Cor. Lem. IV. Lib. I.) tempora tota quibus corpora illa idem spatium quodvis P R describunt, sunt etiam in eâdem datâ ratione $\sqrt{2}$ ad 1, seu ut velocitates reciproce. Cum igitur (per Prop. XXXVI. et XXXVII. Lib. I.) detur tempus quo corpus in medio non resistente cadendo spatium quodlibet describit, dabitur quoque tempus quo corpus in medio resistente spatium quodvis datum cadendo percurrit.

^(d) *Eadem est in spirali.* (Per Cor. 1. hujus.)

^(e) * *Nempe in ratione O P ad O S* (151).

^(f) * 157. *In eâdem illâ ratione.* Spatia enim velocitatibus æqualibus et uniformibus descripta sunt ut tempora quibus describuntur; undè si spiralis P Q R et recta P S, divisæ intelligantur in partes quam minimas totis proportionales, quod fit dum puncta divisionum in spirali et in radio P S a centro S æquidistant (152) tempora

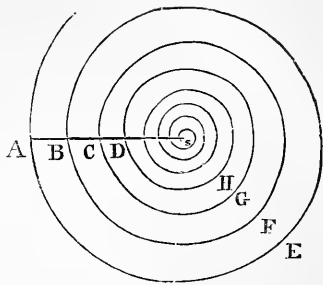
quibus partes illæ quam minimæ in spirali et in rectâ P S homologæ describuntur, erunt ut eadem partes, seu in datâ ratione, siquidem velocitas in spirali et in recta P S in iis punctis a centro æquidistantibus sunt æquales eidem, nempe celeritati corporis circa idem centrum ad eandem distantiam in circulo revolventis; ideoque (per Cor. Lem. IV. Lib. I.) totum tempus descensûs in spirali erit ad totum tempus descensûs in rectâ P S per spatia nomologa in datâ illâ ratione longitudinis nempe spiralis ad longitudinem P S, seu in ratione O P ad O S.

^(g) * *Est ut $\frac{P S}{O S}$ sive ut tangens anguli, &c.*

(155). Si autem sinus totus sit 1, cum sit O S, ad P S, ut sinus totus ad tangentem anguli P O S, seu anguli æqualis Q P S, erit tangens illa $\frac{P S}{O S}$.

^(h) * *Tempus verò revolutionum earundem ut $\frac{O P}{O S}$, id est, ut secans, &c.* Est enim tempus illud revolutionum inter circulos duos datos, ad tempus descensûs per partem datam rectæ P S inter circulos contentam ut longitudo revolu-

Corol. 7. Si corpus in medio, cujus densitas est reciprocè ut distantia locorum a centro, revolutionem in curvâ quâcunque A E B circa centrum illud fecerit, et radium primum A S in eodem angulo secuerit in B quo prius in A, idque cum velocitate quæ fuerit ad velocitatem suam primam in A reciprocè in subduplicatâ ratione distantiarum a centro (id est, ut A S ad mediam proportionalem inter A S et B S) ⁽¹⁾ corpus illud perget innumeras consimiles revolutiones B F C, C G D, &c. facere, et intersectioni-



tionum illarum ad partem hanc rectæ P S, circulis duobus interceptam (157); sed mutato utcumque angulo quem spiralis continet cum radio P S longitudo revolutionum inter duos circulos datos comprehensa est ut secans anguli illius (152). Quare cùm datum sit tempus descensus per partem datam rectæ P S inter circulos datos contentam, erit tempus revolutionum inter circulos ut secans anguli quem spiralis

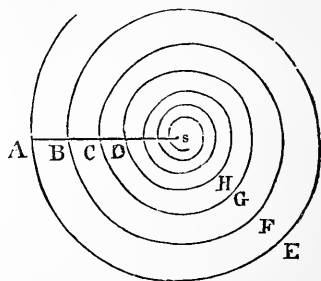
continet cum radio P S seu ut $\frac{O P}{O S}$; si enim sinus totus sit 1, erit O S ad O P ut 1 ad secantem anguli P O S seu Q P S, et ideò secans est $\frac{O P}{O S}$. Porro datâ rectâ P S, densitas est ut $\frac{O P}{O S}$ reciprocè (per Cor. 2. hujus). Ergò, &c.

per quod punctum transit etiam spiralis logarithmica, eodem modo determinatur ad æmulandum motum corporis P secundam suam revolutionem absolventis, quo determinatum fuerat in loco A ut æmuleretur motum corporis ejusdem P primam suam revolutionem perficientis; cùm (per dem.) omnia paria sint in locis B et A videlicet mediorum densitates, corporum velocitates, directiones, viresque centripetæ. Quoniam igitur secunda spiralis logarithmicæ revolutio a puncto B ad punctum C priori a puncto A ad punctum B absolutæ similis est (150), necessum est ut secunda quoque curvæ revolutio B F C priori A E B sit similis; et simili modo ostendetur revolutiones omnes B F C, C G D, &c. et motus corporis Q eas absolventis esse inter se similes. Erunt igitur revolutiones A E B, B F C, C G D, &c. ut radii A S, B S, C S, &c. id est, continuè proportionales, et ob similitudinem motuum in similibus revolutionibus A E B, B F C, &c. si ex centro S ductus intelligatur radius revolutiones illas secans in E, F, G, &c. quæ erunt in revolutionibus A E B, B F C, &c. loca homologa, erit velocitas corporis Q in loco E ad velocitatem ejus in loco A ut velocitas in F ad velocitatem in B, et proinde velocitas in E ad velocitatem in B, ut velocitas in A ad velocitatem in B, id est, (per Hyp. Cor.

hujus) ut $B S^{\frac{1}{2}}$ ad $A S^{\frac{1}{2}}$; sed tempora quibus spatia homologa quam minima in locis E et F describuntur sunt ut spatia illa directè et velocitates inversè (12); quare cum spatia homologa in locis E et F sint ut radii A S et B S, et velocitates ibidem ut $A S^{\frac{1}{2}}$ et $B S^{\frac{1}{2}}$ inversè (ex dem.) tempus quo spatium minimum revolutionis A E B describitur est ad tempus quo describitur spatium homologum revolutionis similis B F C ut $A S \times A S^{\frac{1}{2}}$ ad $B S \times B S^{\frac{1}{2}}$, id est, ut $A S^{\frac{3}{2}}$ ad $B S^{\frac{3}{2}}$, ideòque in datâ ratione. Undè (per Cor. Lem. IV. Lib. I.) tempus totum quo corpus Q primam suam revolutionem A E B absolvit est ad tempus quo secundam revolutionem B F C, perficit in eadem ratione

(i) * *Corpus illud perget, &c.* Centro S et radio dato S A descripta intelligatur spiralis logarithmica quæ primâ revolutione absolutâ, transeat per punctum B datum in radio S A (155.) et spiralis illa suis semper similibus revolutionibus distinguet radium A S in partes A S, B S, C S, D S, &c. continuè proportionales (150). Fingamus etiam quòd iisdem positis quæ (in Prop. XV.) corpus aliquod P in medio justæ densitatis spiralem illam logarithmicam describat, dum corpus aliud Q in alio medio describit curvam A E B F C S et in iisdem a centro S distantis densitates duorum mediorum erunt in datâ ratione, cum in utroque medio sit (per Hyp. Cor. hujus et per Prop. XV.) densitas in loco A ad densitatem in loco B, ut S B ad A S. Simili modo velocitates corporum P et Q in loco B, erunt in eorundem velocitates in loco A, (per Prop. XV. et Hyp. Corol. hujus) ideòque in datâ ratione; vires autem centripetæ quibus corpora P et Q urgentur, sunt in utroque medio iisdem in locis eadem (per Hyp.), et tandem ob angulos datos quos tam spiralis logarithmica, quam curva A E B continet cum radio A S, directiones motuum in utrâque curvâ pares sunt in locis A et B; quare postquam corpus Q primâ revolutione A E B absolutâ, pervenit in B,

bus distinguet radium AS in partes AS , BS , CS , DS , &c. continuè proportionales. Revolutionum verò tempora erunt ut perimetri orbitarum AEB , BFC , CGD , &c. directè, et velocitates in principiis A , B , C , inversè; id est, ut $AS^{\frac{5}{2}}$, $BS^{\frac{5}{2}}$, $CS^{\frac{5}{2}}$. Atque tempus totum, quo corpus perveniet ad centrum, erit ad tempus revolutionis primæ, ut summa omnium continuè proportionalium $AS^{\frac{5}{2}}$, $BS^{\frac{5}{2}}$, $CS^{\frac{5}{2}}$, pergentium in infinitum, ad terminum primum $AS^{\frac{5}{2}}$; id est, ut terminus ille primus $AS^{\frac{5}{2}}$ ad differentiam duorum primorum $AS^{\frac{5}{2}} - BS^{\frac{5}{2}}$, sive ut $\frac{1}{3} AS$ ad AB quam proximè. Unde tempus illud totum expeditè invenitur.



Corol. 8. Ex his etiam præter propositum colligere licet motus corporum in mediis, quorum densitas aut uniformis est, aut aliam quamcunque legem assignatam observat. Centro S , intervallis continuè proportionalibus SA , SB , SC , &c. describe circulos quoscunque, et statue tempus revolutionum inter perimetros duorum quorumvis ex his circulis, ^(k) in medio de quo egimus, esse ad tempus revolutionum inter eosdem in medio pro-

$AS^{\frac{5}{2}}$ ad $BS^{\frac{5}{2}}$. Et simili argumento liquet tempora revolutionum BFC , CGD , &c. esse inter se ut sunt $BS^{\frac{5}{2}}$, $CS^{\frac{5}{2}}$, &c. Cum igitur revolutionum tempora sicut quantitates $AS^{\frac{5}{2}}$, $BS^{\frac{5}{2}}$, $CS^{\frac{5}{2}}$, $DS^{\frac{5}{2}}$, &c. progressionem geometricam in infinitum decrescentem constituent, tempus totum quo corpus Q , perveniet ad centrum S erit ad tempus revolutionis primæ AEB ut summa omnium continuè proportionalium $AS^{\frac{5}{2}}$, $BS^{\frac{5}{2}}$, $DS^{\frac{5}{2}}$, &c. pergentium, in infinitum, ad terminum primum $AS^{\frac{5}{2}}$; porro summa illa est ad terminum primum $AS^{\frac{5}{2}}$ ut hic terminus primus ad differentiam duorum priorum, nempe $AS^{\frac{5}{2}} - BS^{\frac{5}{2}}$. Nam scribatur sic terminorum series, $AS^{\frac{5}{2}} : BS^{\frac{5}{2}} = BS^{\frac{5}{2}} : CS^{\frac{5}{2}} = CS^{\frac{5}{2}} : DS^{\frac{5}{2}}$, &c. in infinitum, et ultimo progressionis termino evanescente, erit summa antecedentium, id est, summa omnium terminorum quæ dicatur S ad summam consequentium, seu summam omnium terminorum

rum dempto primo, ut primus ad secundum, hoc est $S : S - AS^{\frac{5}{2}} = AS^{\frac{5}{2}} : BS^{\frac{5}{2}}$; undè habetur dividendo $S : AS^{\frac{5}{2}} = AS^{\frac{5}{2}} : AS^{\frac{5}{2}} - BS^{\frac{5}{2}}$; est autem $BS = AS - AB$, et ideo $BS^{\frac{5}{2}} = (AS - AB)^{\frac{5}{2}} = AS^{\frac{5}{2}} - \frac{5}{2} AS^{\frac{3}{2}} \times AB + \frac{5}{8} \times \frac{AB^2}{AS^{\frac{1}{2}}}$, &c. in infinitum (551. Lib. I.). Quapropter si distantia AB minima fuerit, respectu radii AS , fiet $BS^{\frac{5}{2}} = AS^{\frac{5}{2}} - \frac{5}{2} AS^{\frac{3}{2}} \times AB$, quàm proximè, neglectis nimirum cæteris terminis ferè evanescentibus; erit igitur $S : AS^{\frac{5}{2}} = AS^{\frac{5}{2}} : \frac{5}{2} AS^{\frac{3}{2}} \times AB = \frac{2}{5} AS : AB$ quam proximè; et hinc dato tempore revolutionis primæ AEB , tempus totum quo corpus pervenit ad centrum expeditè invenitur. Sit, exempli causâ, AS ad AB ut 500000 ad 1, et tempus primæ revolutionis = 1, erit tempus totum = 2000000, quàm proximè.

^(k) * *In medio de quo egimus.* (In Prop. XV. et Cor. ejus, cujus nimirum densitas est reciproce ut distantia locorum a centro.

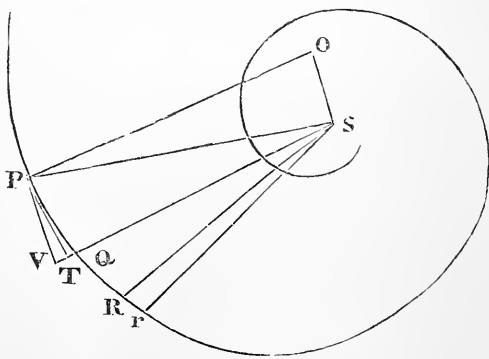
posito, ⁽¹⁾ ut medii propositi densitas mediocris inter hos circulos ad medii, de quo egimus, densitatem mediocrem inter eosdem quàm proximè: sed et in eadem quoque ratione esse secantem anguli quo spiralis præfinita, in medio de quo egimus, secat radium A S, ad secantem anguli quo spiralis nova secat radium eundem in medio proposito: ^(m) atque etiam ut sunt eorundem angulorum tangentes ita esse numeros revolutionum omnium inter circulos eosdem duos quam proximè. ⁽ⁿ⁾ Si hæc fiant passim inter circulos binos, continuabitur motus per circulos omnes. Atque hoc pacto haud difficulter imaginari possumus quibus modis ac temporibus corpora in medio quocunque regulari gyrari debebunt.

Corol. 9. Et quamvis motus excentrici in spiralibus ^(o) ad formam ovalium accedentibus peragantur; tamen concipiendo spiraliū illarum singulas revolutiones iisdem ab invicem intervallis distare, iisdemque gradibus ad centrum accedere cum spirali superius descriptâ, ^(p) intelligemus etiam quomodo motus corporum in huiusmodi spiralibus peragantur.

PROPOSITIO XVI. THEOREMA XIII.

Si medii densitas in locis singulis sit reciproce ut distantia locorum a centro immobili, sitque vis centripeta reciproce ut dignitas quælibet ejusdem distantie: dico quod corpus gyrari potest in spirali quæ radios omnes a centro illo ductos intersecat in angulo dato.

Demonstratur eâdem methodo cum Propositione superiore. Nam si vis centripeta in P sit reciproce ut distantie S P, dignitas quælibet SP^{n+1} cujus index est $n+1$: ^(q) colligitur ut supra, quòd tempus, quo corpus describit arcum quemvis P Q; erit ut $PQ \times PS^{\frac{1}{2}n}$; et resis-



⁽¹⁾ * Ut medii propositi densitas (per Cor. 6. hujus) supponendo spirales logarithmicas, per puncta A, B, C, D, in utroque medio descriptas.

^(m) * Atque etiam ut sunt, &c. Per Cor. 6. hujus.

⁽ⁿ⁾ * Si hæc fiant passim inter circulos binos, invenietur in medio regulari lex quâ motus continuabitur per circulos omnes, seu, inter circulos omnes, quemadmodum inventis prioribus seriei regularis terminis, cognoscitur lex quâ illa progreditur, atque hoc pacto, &c.

Vol. I.

^(o) * Ad formam ovalium accedentibus, &c. Sunt enim spirales quarum revolutiones singulæ ferè concentricæ sunt et ad formam circulorum accedunt; aliarum revolutiones accedunt ad formam ovalium centro spiralis pro ellipsos vel ovalis foco accepto.

^(p) * Intelligemus etiam (ut in Cor. 8.) quomodo, &c.

^(q) * Colligitur ut supra, &c. Quæcumque enim sit vis centripeta, illa est ad vim resistent-

Corol. 2. Si vis centripeta sit reciproce ut SP cub. ^(s) erit $1 - \frac{1}{2}n = 0$; ideoque resistentia et densitas medii nulla erit, ut in Propositione nonâ Libri primi.

Corol. 3. Si vis centripeta sit reciproce ut dignitas aliqua radii SP cujus index est major numero 3, resistentia affirmativa ^(t) in negativam mutabitur.

Scholium.

Cæterum hæc Propositio et superiores, quæ ad media inæqualiter densa spectant, intelligendæ sunt de motu corporum adeò parvorum, ut medii ex uno corporis latere major densitas quàm ex altero non consideranda veniat. Resistentiam quoque cæteris paribus densitati proportionalem esse suppono. Unde in mediis, quorum vis resistendi non est ut densitas, debet densitas eo usque augeri vel diminui, ut resistentiæ vel tollatur excessus vel defectus supplatur.

vires illæ sunt ad invicem ut $\frac{1}{2} Rr$ et TQ , sive ut $\frac{(1 - \frac{1}{2}n) VQ \times PQ}{2SQ}$ et $\frac{PQ^2}{2SP}$, hoc est, ut $(1 - \frac{1}{2}n) VQ$ et PQ , seu $(1 - \frac{1}{2}n) OS$ et OP

^(s) * Erit $1 - \frac{1}{2}n = 0$. Cùm enim (per Hyp.) sit $n + 1 = 3$; erit $n = 2$, $\frac{1}{2}n = 1$ et $1 - \frac{1}{2}n = 0$.

^(t) * In negativam mutabitur. Tum enim $n + 1$, erit numerus ternario major, et ideò n binario major, et hinc $1 - \frac{1}{2}n$, numerus negativus.

Corol. 4. Medii densitas, si datur distantia SP , est ut $\frac{(1 - \frac{1}{2}n) OS}{OP}$; sin distantia illa

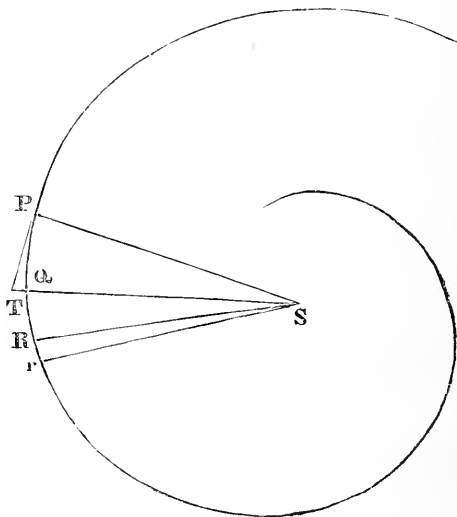
non datur ut $\frac{(1 - \frac{1}{2}n) OS}{OP \times SP}$, seu ob datum numerum $1 - \frac{1}{2}n$, ut $\frac{OS}{OP}$, vel $\frac{OS}{OP \times SP}$.

Corol. 5. Quoniam (per Cor. 1. Prop. XV.) mutato utcumque spiralis angulo, ita ut etiam evanescat, et spiralis cum radio conveniat, velocitas corporis in loco quovis P ea semper est quacum corpus in medio non resistente eadem vi centripetâ gyrari potest in circulo ad eandem a centro distantiam SP (per const. 1. Cor. 7. Prop. IV. Lib. I.) liquet (per Cor. 6. Prop. XV. et 152.) tempora descensûs a puncto dato P ad centrum usque S , fore etiam (in Hyp. Prop. XVI.) ut spiralium variarum longitudines; quod observavit Joannes Bernoullius in Actis Eruditorum Lips. an. 1713. ubi hanc materiam eleganter tractat.

PROPOSITIO XVII. PROBLEMA IV.

Invenire et vim centripetam et medii resistantiam, quâ corpus in datâ spirali, datâ velocitatis lege, revolvi potest.

Sit spiralis illa P Q R. Ex velocitate, quâ corpus percurrit arcum quàm minimum P Q, dabitur tempus, et ex altitudine T Q, quæ est ut vis centripeta et quadratum temporis, dabitur vis. Deinde ex earum, æqualibus temporum particulis confectarum P S Q et Q S R, differentia R S r, dabitur corporis retardatio, et ex retardatione inveniatur resistantia ^(u) ac densitas medii.



PROPOSITIO XVIII. PROBLEMA V.

Datâ lege vis centripetæ, invenire medii densitatem in locis singulis, quâ corpus datam spiralem describet.

Ex vi centripetâ invenienda est velocitas in locis singulis, deinde ex velocitatis retardatione quærenda medii densitas; ^(x) ut in Propositione superiore.

^(u) * *Ac densitas medii.* Sit, exempli causâ, curva P Q R spiralis logarithmica et velocitas in loco quovis P ut $\frac{1}{S P^m}$, erit tempus quo describitur arcus P Q, ut $P Q \times S P^m$ (12); vis autem centripeta quæ (per Cor. 4. Lem. X. Lib. I.) est ut lineola T Q directè et quadratum temporis inversè erit ut $\frac{T Q}{Q P^2 \times S P^{2m}}$

id est; (per Lem. III. hujus) ut $\frac{1}{S P^{2m+1}}$. Invenitis tempore et velocitate, inveniatur (ut in not. ad Prop. XVI.) resistantia ut

$\frac{(1-m) V Q}{S Q \times P Q \times S P^{2m}}$, sive ut $\frac{(1-m) O S}{O P \times S P^{2m+1}}$, et auferendo duplicatam velocitatis rationem $\frac{1}{S P^{2m}}$ erit densitas ut $\frac{(1-m) O S}{O P \times S P}$, sive ut $\frac{1}{S P}$.

^(x) * *Ut in Propositione superiore.* Sit vis centripeta in P ut $\frac{1}{S P^{n+1}}$ et quoniam T Q est ut vis centripeta et quadratum temporis quo describitur arcus P Q, erit $T Q \times S P^{n+1}$, id est, (per Lem. III.) $P Q^2 \times S P^n$ ut qua-

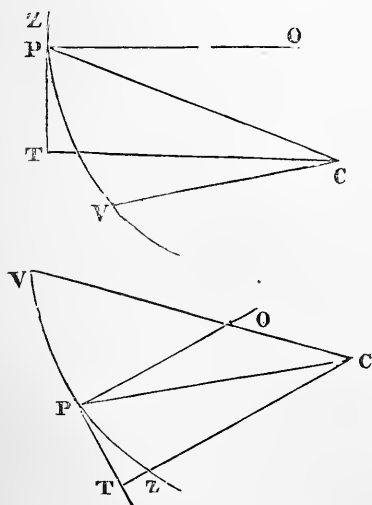
Methodum verò tractandi hæc Problemata aperui in hujus Propositione decimâ, et Lemmate secundo; et lectorem in hujusmodi perplexis disquisitionibus diutius detinere nolo. Addenda jam sunt aliqua de viribus corporum ad progrediendum, deque densitate et resistentiâ mediorum, in quibus motus hactenus expositi et his affines peraguntur.

datum temporis, ideóque tempus ut $PQ \times SP^{\frac{1}{2}n}$, et corporis velocitas quâ arcum PQ illo tempore describit ut $\frac{1}{SP^{\frac{1}{2}n}}$ (11); determinatis autem tempore et velocitate, invenietur resistentia et densitas ut in notâ superiore.

PROBLEMA.

Vis centripeta tendens ad datum punctum C sit in loco quovis P ut distantie CP dignitas CP^n reciproce, et medii densitas sit ut medii densitas et velocitatis dignitas quælibet conjunctim; requiritur tum medii densitas in locis singulis quæ faciat ut corpus in datâ quâvis lineâ curvâ $V P Z$ moveatur, tum corporis velocitas et medii resistentia in locis singulis.

158. Dicantur vis centripeta in loco P , g , resistentia r , medii densitas k , velocitas corporis v , distantia PC , y , radius PO circuli curvam



osculantis in P , R , arcus VP , s ; perpendicularum CT in tangentem PT ductum p , et a, b, n, m , quantitates datæ, erit (per Hyp.) $g = \frac{a}{y^n}$ et

$$r = \frac{k v^m}{b}, \text{ sed est semper (27) } v v = \frac{R p g}{y} = \frac{a R p}{y^{n+1}} = \frac{a p d y}{y^n d p}. \text{ Velocitas igitur per alteru-}$$

$$\text{tram ex his æquationibus dabitur. Porro (26.)}$$

$$r = \frac{-v d v - g d y}{d s} = \frac{-v d v}{d s} - \frac{a d y}{y^n d s},$$

$$\text{vel etiam (ibid.) } + r = \frac{-v d v \times \sqrt{y y - p p} - g d y \times \sqrt{y y - p p}}{y d y} = \frac{-v d v \times \sqrt{y y - p p}}{y d y} - \frac{a \sqrt{y y - p p}}{y^{n+1}}.$$

Quare si in alterutrâ harum æquationum loco $v d v$ scribatur ipsius valor, qui reperitur capiendò fluxionem æquationis $v v = \frac{a R p}{y^{n+1}} = \frac{a p d y}{y^n d p}$, obtinebitur resistentia r , seu $\frac{k v^m}{b}$, (jusque va-

lido diviso per $\frac{v^m}{b}$ quod datum est inventâ velocitate v , dabitur medii densitas k . Q. e. i.

159. Exemplo sit spiralis logarithmica. In illâ ob datum angulum TPC datur ratio PC ad CT seu y ad p ; sit ergò $c : a = y : p$, et id è $p = \frac{a y}{c}$; atque $d p = \frac{a d y}{c}$, et erit $v v =$

$$\frac{a p d y}{y^n d p} = \frac{p c}{y^n} = \frac{a}{y^n}. \text{ Ex his verò habetur}$$

$$\sqrt{y y - p p} = \frac{y \sqrt{c c - a a}}{c}, \text{ et } v d v = \frac{(1-n) a d y}{2 y^n}, \text{ undè pro corporis descensu inve-}$$

nitur $r = \frac{(5-n) a \sqrt{c c - a a}}{a c y^n}$; et pro ascensu $r = \frac{(n-5) a \sqrt{c c - a a}}{2 c y^n}$, ideóque resistentia est reciproce ut y^n . Cum autem (per

Hyp.) sit $r = \frac{k v^m}{b} = \frac{k a^{\frac{m}{2}}}{b y^{\frac{m n - m}{2}}}$, erit densi-

tas k ut $r y^{\frac{m n - m}{2}}$, seu ut $\frac{y^{\frac{m n - m}{2}}}{y^{\frac{m n - m}{2}}} = y^{\frac{m n - m - 2 n}{2}}$, et hinc si ponatur $m = 2$,

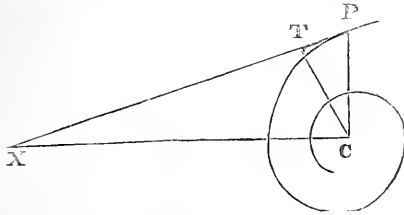
erit densitas k , ut y^{-1} , seu ut $\frac{1}{y}$, prorsus ut (in Prop. XVI.) demonstratum est.

160. Corol. 1. Per superiores æquationes

(158.) ex datâ corporis velocitate invenitur tum vis centripeta, tum resistentia et medii densitas.

Est enim $g = \frac{v \cdot y}{R \cdot p} = \frac{v \cdot d \cdot p}{p \cdot d \cdot y}$; undè habetur vis centripeta g ; datis autem vi centripetâ et celeritate, invenitur tum resistentia r , tum medii densitas k , ut supra (158).

161. Exemplum sit in spirali hyperbolicâ cuius hæc est proprietas ut si per centrum C erigatur ad radium $C P$, perpendicularis $C X$ tangenti $P X$ per P ductæ occurrens in X sit subtangens illa $C X$ constans. Velocitas sit ut



tangens $P X$, et resistentia r ut densitas medii et quadratum velocitatis conjunctim, hoc est $r = \frac{k v^2}{b}$,

dicaturque $C X$, c , et ideò $P X = \sqrt{y y + c c}$, atque (per Hyp.) $v = \frac{e \sqrt{y y + c c}}{c}$, et e ,

quantitas data. Erit ob trianguia $C P T$, $X P C$ similia, $P X (\sqrt{y y + c c}) : C X (c) = P C (y) : C T (p)$, et ideò $p = \frac{c y}{\sqrt{y y + c c}}$, $d p = \frac{c^3 d y}{y y + c c^2}$, et $\sqrt{y y - p p}$

$= \frac{y y}{\sqrt{y y + c c}}$. Quarè fiet (160) $g = \frac{v \cdot d \cdot p}{p \cdot d \cdot y} = \frac{e^2}{y}$; id est, vis centripeta ut distantia $P C$ reciprocè.

Quia verò $v = \frac{e}{c} \times (y y + c c)$ erit $v \cdot d \cdot v = \frac{e e y d y}{c c}$ et propterea pro corporis descensu $r = \frac{v \cdot d \cdot v \cdot \sqrt{y y - p p}}{y \cdot d \cdot y} + \frac{g \cdot \sqrt{y y - p p}}{y} =$

$\frac{e e y y}{c c \sqrt{y y + c c}} + \frac{e^2}{\sqrt{y y + c c}} = \frac{e^2 \times y y + c c}{c c \sqrt{y y + c c}} = \frac{e^2}{c^2} \times \sqrt{y y + c c}$, adeoque resistentia ut tangens $P X$, seu ut velocitas. Cum igitur sit

$r = k v^2 = \frac{k e^2}{c c} \times (y y + c c) = \frac{e^2}{c c} \times \sqrt{y y + c c}$, erit densitas medii $k = \frac{e^2}{\sqrt{y y + c c}}$, seu reciprocè ut tangens $P X$

sive reciprocè ut velocitas.

162. Corol. 2. Datâ medii densitate et concessis figurarum quadraturis, dabitur vis centripeta et corporis velocitas. Est enim (27. et 160)

$$v \cdot d \cdot v + \frac{v \cdot d \cdot p}{p} = -r \cdot d s = \frac{k v^m d s}{b} \quad (158)$$

et dividendo per v^m , et multiplicando per p^{2-m} , fit $p^{2-m} v^{1-m} d v + v^{2-m} p^{1-m} d p = -\frac{k p^{2-m} d s}{b}$, et sumptis utrinque fluentibus

$$\text{habetur, } \frac{1}{b} \times p^{2-m} \times v^{2-m} = -S. \frac{k p^{2-m} d s}{b}, \text{ ideòque } v^{2-m} = (m-2) \times$$

$S. \frac{k p^{2-m} d s}{b} \times p^{2-m}$. Quare si densitas medii k , sit ut functio quævis distantiae $P C$ a centro C , inveniri poterit fluens $S. \frac{k p^{2-m} d s}{b}$ aut algebraicè aut per figurarum quadraturas, et loco

$d s$, scribi potest $\pm \frac{y d y}{\sqrt{y y - p p}}$ (26). Inventâ autem velocitate v , obtinetur vis centripeta g per æquationem $g = \frac{v \cdot d \cdot p}{p \cdot d \cdot y} = \frac{v \cdot v \cdot y}{R \cdot p}$ (160).

163. Corol. 3. Si in superiori Corollario sit $m = 2$, id est, resistentia ut densitas et quadratum velocitatis conjunctim, erit $2 - m = 0$, et æquatio $p^{2-m} v^{1-m} d v + v^{2-m} p^{1-m} d p = -\frac{k p^{2-m} d s}{b}$, in hanc mutabitur $\frac{d v}{v} + \frac{d p}{p} = -\frac{k d s}{b}$, undè sumptis fluentibus,

$$\text{habetur } L. v + L. p = -S. \frac{k d s}{b}, \text{ et } L. v = -S. \frac{k d s}{b} - L. p, \text{ ex quâ æquatione invenitur,}$$

v , et hinc habetur g ut suprâ.

164. Corol. 4. Sit in hypothesi Corol. 3. densitas medii k uniformis, velocitas corporis in loco dato $v = c$, et perpendicularis p in eodem loco $= q$ datæ, erit $L. v = -\frac{k s}{b} - L. p + Q$, et

quia in loco V , fit $s = 0$, $v = c$, $p = q$, erit $Q = L. c + L. q = L. c q$. Et hinc $L. v = L. \frac{c q}{p} - \frac{k s}{b}$. Ponatur $L. h = 1$, ut sit $L. v =$

$$L. \frac{c q}{p} - \frac{k s}{b} \times L. h = L. \frac{c q}{\frac{p h b}{c^2 q^2}}. \text{ Undè de-}$$

$$\text{ducitur } v = \frac{c q}{k s}, v \cdot v = \frac{c^2 q^2}{2 k s}, \text{ et hinc}$$

$$g = \frac{v \cdot v \cdot y}{R \cdot p} = \frac{c^2 q^2 y}{2 k s R p^3 h \frac{b}{c^2 q^2}}, \text{ vel } g = \frac{v \cdot d \cdot p}{p \cdot d \cdot y} = \frac{c^2 q^2 d p}{2 k s}$$

$$p^3 h \frac{b}{c^2 q^2} d y$$

165. Corol. 5. In his autem omnibus inveniri potest tempus per æquationem $d t = \frac{d s}{v}$,

$$\text{seu } t = S. \frac{d s}{v} \quad (13).$$

166. *Corol. 6.* Datâ vi centripetâ et resistentiâ ac densitate medii, inveniri potest æquatio ad trajectoriam $Z P V$ quam corpus projectile circa centrum virium C describit. Sit, exempli gratiâ, medium uniforme, resistentia ut quadratum velocitatis et vis centripeta $= \frac{a}{y^n}$ et (164.) erit

$$\frac{a}{y^n} = \frac{c^2 q^2 d p}{\frac{2 k s}{b}}, \text{ ideoque } h \frac{\frac{2 k s}{b}}{p^3 d y} = \frac{c^2 q^2 y^n d p}{a p^3 d y},$$

$$\text{et } L. h \frac{\frac{2 k s}{b}}{b} = \frac{2 k s}{b} = L. \frac{c^2 q^2 y^n d p}{a p^3 d y};$$

capiantur utrinque fluxiones, factâ $d y$ constante,

$$\text{et fiet (26)} \quad \frac{\frac{2 k s}{b}}{b} (= \pm \frac{2 k y d y}{b \sqrt{y y - p p}})$$

$$= \frac{n d y}{y} + \frac{d d p}{d p} - \frac{3 d p}{p} \quad (\text{notum supponimus (40), quantitatis cujusvis logarithmicæ } L. z \text{ fluxionem esse } \frac{d z}{z}).$$

$$\text{Hinc verò habetur } \frac{\frac{2 k s}{b}}{b} = L. y^n + L. d p - 3 L. p - L. \frac{d y}{Q}, \text{ ubi } \frac{d y}{Q},$$

$$\text{est quantitas constans, ideoque sit } \frac{\frac{2 k s}{b}}{b} = L. y^n$$

$$+ L. \frac{Q d p}{d y} - L. p^3 = L. \frac{Q y^n d p}{p^3 d y}, \text{ et hinc}$$

$$h \frac{\frac{2 k s}{b}}{b} = \frac{Q y^n d p}{p^3 d y}, \text{ æquatio ad trajectoriam.}$$

167. *Schol.* Si curva $V P Z$ sit sectio conica cujus umbilicus C axis major c semiaxis minor e , erit (276. Lib. I.) pro ellipsi $p p = \frac{e e y}{c - y}$, pro

hyperbolâ $p p = \frac{e e y}{c + y}$, et pro parabolâ, si latus

rectum axis dicatur $4 e$, erit (per Lem. XIV. Lib. I.) $p p = e y$. Undè facile est superioris

Problematis solutiones ad sectiones conicas transferre. Sit $V P Z$ parabola, vis centripeta $g = \frac{a}{y^n}$, resistentia $r = \frac{k v^2}{b}$, et quaeratur tum cor-

poris velocitas tum resistentia et medii densitas in loco quovis P . Quoniam $p p = e y$, erit $2 p d p = e d y$, $d p = \frac{e d y}{2 p}$, $\frac{p}{d p} = \frac{2 p p}{e d y} = \frac{2 y}{d y}$;

$$\text{undè fit (158)} \quad v v = \frac{a p d y}{y^n d p} = \frac{2 a}{y^{n-1}}; \text{ hinc}$$

$$\text{verò habetur } v d v = \frac{(1-n) a d y}{y^n}, \text{ atque ideo}$$

$$\text{pro corporis descensu (158)} \quad r = \frac{v d v \sqrt{y y - p p}}{y d y}$$

$$+ \frac{a \sqrt{y y - p p}}{y^{n+1}} = \frac{(2a-n a) \sqrt{y y - e y}}{y^{n+1}};$$

$$\text{et pro ascensu } r = \frac{(n a - 2 a) \sqrt{y y - e y}}{y^{n+1}};$$

$$\text{resistentia igitur est semper ut } \frac{P T}{P C^{n+1}}; \text{ porrò}$$

$$\text{est (per Hyp.) } r = \frac{k v^2}{b} = \frac{2 a k}{b y^{n+1}} = (2 a - n a) \times$$

$$\frac{\sqrt{y y - e y}}{y^{n+1}}, \text{ vel } = (n a - 2 a) \frac{\sqrt{y y - e y}}{y^{n+1}};$$

$$\text{quarè erit medii densitas } k, \text{ ut } \frac{\sqrt{y y - e y}}{y^2},$$

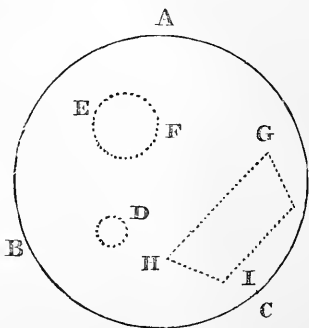
$$\text{seu ut } \frac{P T}{P C^2}. \text{ Et simili modo in ellipsi et hy-}$$

$$\text{perbolâ invenitur medii densitas ut } \frac{P T}{P C^2}. \text{ At}$$

in circulo fit $P T = 0$, ideoque medii densitas et resistentia nulla. Evanescit quoque resistentia, si $n = 2$, id est, si vis centripeta sit ut quadratum distantiae reciproce, quo casu sectiones conicæ, ut Lib. I. demonstratum est, in medio non resistente describuntur. Si n est numerus binario minor, sectiones conicæ per descensum describi possunt; per ascensum verò si n , binario major. Tandem ubi est $n = 1$, hoc est, vis centripeta distantiae $P C$, reciproce proportionalis, velocitas in parabolâ sicut et in spirali logarithmicâ uniformis est.

simul moveantur; atque hoc ideò quia similis et æqualis est omnium pressio, et motus omnis exclusus supponitur, nisi qui a pressione illâ oriatur. Atqui non possunt omnes ad centrum propius accedere, nisi fluidum ad centrum condensetur; contra hypothesin. Non possunt longiùs ab eo recedere, nisi fluidum ad circumferentiam condensetur; etiam contra hypothesin. Non possunt servatâ suâ a centro distantîâ moveri in plagam quamcunque, quia pari ratione movebuntur in plagam contrariam; in plagas autem contrarias non potest pars eadem, eodem tempore, moveri. Ergo fluidi pars nulla de loco suo movebitur. Q. e. d.

Cas. 2. Dico jam, quòd fluidi hujus partes omnes sphæricæ æqualiter premuntur undique. Sit enim E F pars sphærica fluidi, et si hæc undique non premitur æqualiter, augeatur pressio minor, usque dum ipsa undique prematur æqualiter; et partes ejus, per Casum primum, permanebunt in locis suis. Sed ante auctam pressionem permanebant in locis suis, per Casum eundem primum, et additione pressionis novæ movebuntur de locis suis, per Definitionem Fluidi. Quæ duo repugnant. Ergo falsò dicebatur quòd sphæra E F non undique premebatur æqualiter. Q. e. d.



Cas. 3. Dico præterea quòd diversarum partium sphæricarum æqualis sit pressio. Nam partes sphæricæ contiguæ se mutuo premunt æqualiter in puncto contactus, per motûs Legem tertiam. Sed et, per Casum secundum, undique premuntur eâdem vi. Partes igitur duæ quævis sphæricæ non contiguæ, ^(a) quia pars sphærica intermedia tangere potest utramque, premuntur eâdem vi. Q. e. d.

Cas. 4. Dico jam quòd fluidi partes omnes ubique premuntur æqualiter. Nam partes duæ quævis tangi possunt a partibus sphæricis in punctis quibuscunque, et ibi partes illas sphæricas æqualiter premunt, per Casum tertium et vicissim ab illis æqualiter premuntur, per motûs Legem tertiam. Q. e. d.

Cas. 5. Cùm igitur fluidi pars quælibet G H I in fluido reliquo tanquam in vase claudatur, et undique prematur æqualiter, partes autem ejus se mutuò æqualiter premant et quiescant inter se; manifestum est quòd

^(a) * Quia pars sphærica intermedia tangere potest utramque. Nam pars illa intermedia duas alias partes sphæricas in punctis contactûs premet; atque ab illis premetur æqualiter, (ex dem.)

fluidi cujuscunque G H I, quod undique premitur æqualiter, partes omnes se mutuò premunt æqualiter, et quiescunt inter se. Q. e. d.

Cas. 6. Igitur si fluidum illud in vase non rigido claudatur, et undique non prematur æqualiter; cedit idem pressioni fortiori, per Definitionem Fluiditatis.

Cas. 7. Ideoque in vase rigido fluidum non sustinebit pressionem fortio-
riorem ex uno latere quàm ex alio, sed eidem cedit, idque in momento
temporis, quia latus vasis rigidum non persequitur liquorem cedentem.
Cedendo autem urgebit latus oppositum, et sic pressio undique ad æqua-
litem verget. Et quoniam fluidum, quàm primum a parte magis pressâ
recedere conatur, inhibetur per resistentiam vasis ad latus oppositum; re-
ducetur pressio undique ad æqualitatem, in momento temporis, sine motu
locali: et subinde partes fluidi, per Casum quintum, se mutuò prement
æqualiter, et quiescent inter se. Q. e. d.

Corol. Unde nec motus partium fluidi inter se, per pressionem fluido
ubivis in externâ superficie illatam, mutari possunt, nisi quâtenus aut figu-
ra superficiæ alicubi mutatur, aut omnes fluidi partes intensius vel remis-
sius sese premendo difficilius vel facilius labuntur inter se.

PROPOSITIO XX. THEOREMA XV.

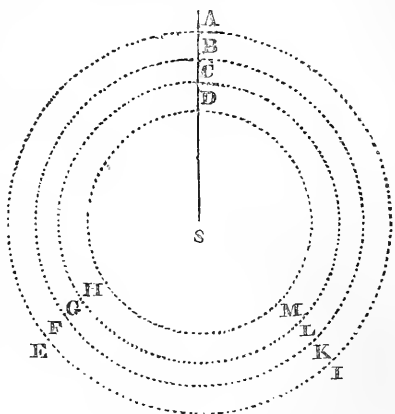
(^b) *Si fluidi sphaerici, et in æqualibus a centro distantis homogenei, fundo
sphaerico concentrico incumbentis partes singulæ versus centrum totius gra-
vitent; sustinet fundum pondus cylindri, cujus basis æqualis est superfici
fundi, et altitudo eadem quæ fluidi incumbentis.*

Sit D H M superficies fundi, et A E I superficies superior fluidi.
Superficiebus sphaericis innumeris B F K, C G L distinguatur fluidum
in orbes concentricos æqualiter crassos; et concipe vim gravitatis agere
solummodo in superficiem superiorem orbis cujusque, et æquales esse
actiones in æquales partes superficierum omnium. Premitur ergo super-
ficies suprema A E vi simplici gravitatis propriæ, quâ et omnes orbis su-

(^b) 172. *Si fluidi sphaerici, &c.* Fluidi quie-
scentis superficies ad gravitatis directionem per-
pendicularis est ubique, et ideò si vis gravitatis
ad centrum unum dirigatur, sphaerica est. Si
enim superficiæ fluidi pars aliqua ad gravitatis
directionem inclinata sit, resolvatur vis gravitatis
in duas vires quarum una directionem habeat
superficiæ fluidi perpendicularem, altera paral-

lelam et, (ex Definitione) fluidum secundum hanc
directionem movebitur, contra Hyp. Erit igitur
pars quælibet superficiæ ad gravitatis direc-
tionem perpendicularis: et quoniam nulla est alia
superficies, præter sphaericam, quæ hanc habeat
propriètatem, ut lineæ omnes ipsi perpendicula-
res ad centrum unum concurrant, superficies illa
fluidi sphaerica erit. Q. e. d.

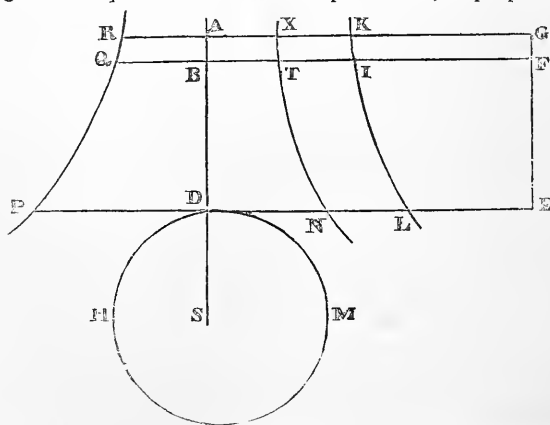
premi partes et superficies secunda B F K (per Prop. XIX.) (c) pro mensurâ suâ æqualiter premuntur. Premitur præterea superficies secunda B F K vi propriæ gravitatis, quæ addita vi priori facit pressionem duplicam. Hâc pressione, pro mensurâ suâ, et insuper vi propriæ gravitatis, id est, pressione triplâ urgetur superficies tertia C G L. Et similiter pressione quadruplâ urgetur superficies quarta, quintuplâ quinta, et sic deinceps. Pressio igitur quâ superficies unaquæque urgetur, non est ut quantitas solida fluidi incumbentis, sed ut numerus orbium ad usque summitatem fluidi; et æquatur gravitati orbis infimi multiplicatæ per numerum orbium: hoc est, gravitati solidi ejus ultima ratio ad cylindrum præfinitum (si modo orbium augeatur numerus et minuatur crassitudo in infinitum, sic ut actio gravitatis a superficie infimâ ad supremam continua reddatur) fiet ratio æqualitatis. Sustinet ergo superficies infima pondus cylindri præfiniti. Q. e. d. (d) Et simili argumentatione patet Propositio, ubi gravitas decrescit in ra-



(c) * *Pro mensurâ suâ æqualiter premuntur.* Singulæ, nimirum, superficiæ secundæ partes, semotâ partium illarum propriâ gravitate, æque premuntur ac partes æquales superficiæ supremæ; quod per Prop. XIX. manifestum fit, si spatium, quod illas superficies continet, tanquam vas aliquod consideretur quod fluidum æqualiter undique compressum complectitur.

(d) * *Et simili argumentatione, &c.* Patet ut in superiori demonstratione, quod pondus partium omnium æqualium D, C, B, A in totâ rectâ D A existentium sustineatur a parte D correspondente fundi sphaerici D H M. Hoc igitur fundum sustinet pondus cylindri, cujus basis æqualis est superficiæ fundi, et altitudo eadem quæ fluidi incumbentis D A; modo tamen in locis a fundo sphaerico D H M et a basi planâ cylindri æquidistantibus, eadem servetur fluidi densitas, eademque vis gravitatis quæ in basim cylindri perpendiculariter tendat ubique.

175. Designet D A G E prædictum cylindrum, cujus basis D E æqualis sit fundo sphaerico D H M. Per punctum D, et per puncta



B et A infinitè propinqua ductæ sint rectæ D E, B F et A G perpendiculares ad A S; in illis perpendicularibus capiantur D L, B I, A K densitatibus fluidi et D N, B T, A X viribus

tione quâvis assignatâ distantiae a centro, ut et ubi fluidum sursum rarius est, deorsum densius. Q. e. d.

Corol. 1. Igitur fundum non urgetur a toto fluidi incumbentis pondere, sed eam solummodo ponderis partem sustinet quæ in Propositione describitur; pondere reliquo a fluidi figurâ fornicatâ sustentato.

Corol. 2. In æqualibus autem a centro distantis eadem semper est pressionis quantitas, ^(e) sive superficies pressa sit horizonti parallela vel perpendicularis vel obliqua; ^(f) sive fluidum, a superficie pressâ sursum continuatum, surgat perpendiculariter secundum lineam rectam, vel serpit obliquè per tortas cavitates et canales, easque regulares vel maximè irre-

gravitatis acceleratricibus in locis D, B, A proportionales, sintque curvæ L I K et N T X loca punctorum L, I, K, et N, T, X. Producat R A in R, ut sit semper A R rectangulo A X \times A K proportionalis, et R Q P curva quam punctum R perpetuo tangit: et pressio fluidi in fundum sphericum D H M erit ut fundum D H M et area D A R P conjunctim. Nam pressio fluidi cylindrulo B A G F contenti in basim D E est ut quantitas materiæ in vim gra-

Si vis acceleratrix gravitatis constans sit, curva X T N in rectam lineam mutabitur axi A D parallelam, eritque proinde pressio fluidi in fundum D H M, ut fundum hoc et area D A K L conjunctim; in hac enim hypothesi, ob datam A K, area D A R P proportionalis est areae D A K L.

Si vis gravitatis et densitas fluidi constantes sint, curvæ X T N, K I L et R Q P in rectas lineas axi A D parallelas migrant; et ideo pres-

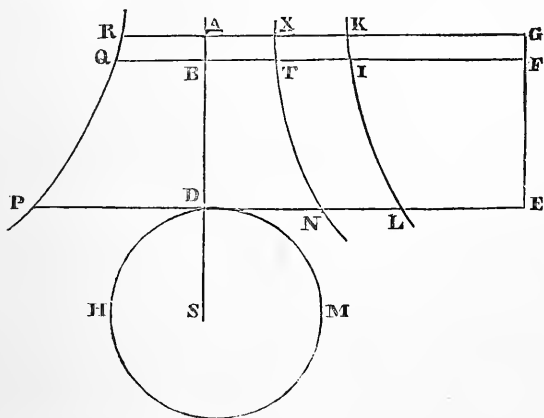
sio fluidi in fundum sphericum D H M, vel in basim cylindri D E, est ut fundum illud D H M, vel basis D E, et altitudo fluidi A D conjunctim. Si verò conferantur liquores in se homogenei, sed diversæ inter se densitatis, pressioness erunt in ratione compositâ basium, altitudinum et densitatum, modo gravitas acceleratrix constans, sit in utroque liquore æqualis; nam si inæqualis esset, pressioness forent in ratione compositâ basium, altitudinum, densitatum et virium gravitatis.

^(e) * Sive superficies pressa sit horizonti, &c. * Sumatur quævis particula inter duos orbes concentricos B F K.

C G L, illa particula per Casum 5. Prop. XIX. undique æqualiter premitur, ergo per motû Leg. 3. undique æqualiter premit, substituitur itaque loco particulæ cujusvis hanc contingens superficies quævis, sive horizontalis, sive perpendicularis, sive obliqua, æqualis erit in eam pressionis quantitas: ergo in æqualibus a centro distantis, &c.

^(f) * Sive fluidum a superficie pressâ, &c. Si fluidum vase utlibet irregulari E F G H d g f e contineatur, vasis fundum H d sustinebit pondus cylindri, cujus basis æqualis est superficiæ fundi H d, et altitudo D A eadem quæ fluidi in vase contenti. Iisdem enim positis, quæ in de-

vitatis singularum particularum ducta (per Definit. VIII. Lib. I.). Quantitas materiæ cylindro B A G F contenta est ut cylindrus B A G F et densitas conjunctim (2. Lib. I.), id est, ut basis cylindri D E et rectangulum A B \times A K. Quare pressio fluidi cylindro B A G F contenti est ut basis D E et solidum A B \times A K \times A X, seu ut basis D E et rectangulum A B \times A R conjunctim. Dividatur tota fluidi altitudo D A in partes innumeras ut A B, et erit pressio fluidi totius in basim cylindri D E vel in fundum sphericum D H M, ut basis D E vel fundum D H M et area D A R P conjunctim. Q. e. d.



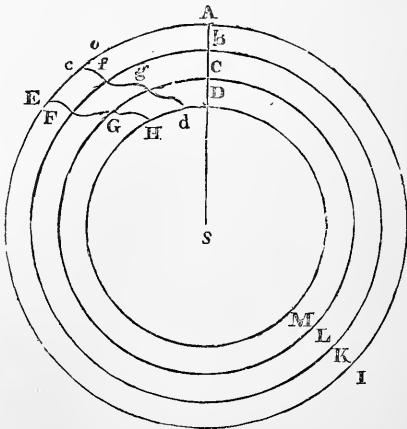
gulares, amplas vel angustissimas. Hisce circumstantiis pressionem nil mutari colligitur, applicando demonstrationem Theorematis hujus ad casus singulos fluidorum.

Corol. 3. Eâdem demonstratione colligitur etiam (per Prop. XIX.) quod fluidi gravis partes nullum, ex pressione ponderis incumbentis, acquirunt motum inter se; si modò excludatur motus qui ex condensatione oriatur.

Corol. 4. Et propterea si aliud ejusdem gravitatis specificæ corpus, quod sit condensationis experts, submergatur in hoc fluido, id ex pressione ponderis incumbentis nullum acquireret motum: non descenderet, non ascenderet, non coetur figuram suam mutare. Si sphæricum est, manebit sphæricum, non obstante pressione; si quadratum est, manebit quadratum: idque sive molle sit, sive fluidissimum; sive fluido liberè innatet, sive fundo incumbat. Habet enim fluidi pars quælibet interna rationem corporis submersi, et par est ratio omnium ejusdem magnitudinis, figuræ et gravitatis specificæ submersorum corporum. Si corpus submersum servato pondere liquesceret et indueret formam fluidi; hoc, si prius ascenderet, vel descenderet, vel ex pressione figuram novam indueret, etiam nunc ascenderet, vel descenderet, vel figuram novam induere cogeretur: id adeò quia gravitas ejus cæteræque motuum causæ permanent. Atqui (per Cas. 5. Prop. XIX.) jam quiesceret et figuram retineret. Ergo ut prius.

monstratione Propositionis hujus, premitur superficies suprema *E e* vi simplici gravitatis propriæ, quâ et superficies secunda *F f* pro mensura sua æqualiter premitur. Premitur præterea superficies secunda *F f* vi propriâ gravitatis, quæ addenda est vi priori. Hâc pressione, pro mensurâ suâ, et insuper vi propriæ gravitatis, urgetur superficies tertia *G g*; et sic deinceps. Quare patet, ut supra, pressionem quam superficies infima *H d* subit, æqualem esse ponderi cylindri cujus est altitudo *D A* et basis fundo *H d* æqualis.

Manente igitur tum basi *H d*, tum fluidi altitudine perpendiculari *D A*, manet fluidi in basim pressio, utcumque mutetur vasis fluidum continentis figura. Atque hinc in vasis communicantibus æquilibrium est, ubi perpendiculares fluidi altitudines supra fundum commune in utroque vase æquantur, dummodo in paribus a centro virium gravitatis *S* distantis tam fluidi densitas quàm vis gravitatis servetur eadem. Nam si, manente vi gravitatis acceleratrice, conferantur fluida in se homogenea, sed diversæ inter se densitatis, erit in vasis communicantibus æquilibrium, ubi fluidorum in utroque vase altitudines



perpendiculares erunt in ratione densitatum reciproca, quia in eo casu fluidorum in basim communem pressionès æquales sunt (173).

Corol. 5. Proinde corpus quod specificè gravius est quàm fluidum sibi contiguum, subsidebit, et quod specificè levius est ascendet, motumque et figuræ mutationem consequetur, quantum excessus ille vel defectus gravitatis efficere possit. Namque excessus ille vel defectus rationem habet impulsus, quo corpus, aliàs in æquilibrio cum fluidi partibus constitutum, urgetur; et comparari potest cum excessu vel defectu ponderis in lance alterutrâ libræ.

Corol. 6. Corporum igitur in fluidis constitutorum duplex est gravitas, altera vera et absoluta, altera apparens, vulgaris et comparativa. Gravitata absoluta est vis tota quâ corpus deorsum tendit: relativa et vulgaris est excessus gravitatis quo corpus magis tendit deorsum quam fluidum ambiens. Prioris generis gravitate partes fluidorum et corporum omnium gravitant in locis suis: ideóque conjunctis ponderibus componunt pondus totius. Nam totum omne grave est, ut in vasis liquorum plenis experiri licet; et pondus totius æquale est ponderibus omnium partium, ideóque ex iisdem componitur. Alterius generis gravitate corpora non gravitant in locis suis, id est, inter se collata non prægravant, sed mutuos ad descendendum conatus impediencia permanent in locis suis, perinde ac si gravia non essent. Quæ in aëre sunt et non prægravant, vulgus gravia non judicat. Quæ prægravant vulgus gravia judicat, quâtenus aëris pondere non sustententur. Pondera vulgi nihil aliud sunt quàm excessus verorum ponderum supra pondus aëris. Unde et vulgò dicuntur levia, quæ sunt minus gravia, aërique prægravanti cedendo superiora petunt. Comparativè levia sunt, non verè, quia descendunt in vacuo. Sic et in aquâ corpora, quæ ob majorem vel minorem gravitatem descendunt vel ascendant, sunt comparativè et apparenter gravia vel levia, et eorum gravitas vel levitas comparativa et apparens est excessus vel defectus quo vera eorum gravitas vel superat gravitatem aquæ, vel ab eâ superatur. Quæ verò nec prægravando descendunt, nec prægravanti cedendo ascendant, etiamsi veris suis ponderibus adaugeant pondus totius, comparativè tamen et in sensu vulgi non gravitant in aquâ. Nam similis est horum casuum demonstratio.

Corol. 7. Quæ de gravitate demonstrantur, obtinent in aliis quibuscunque viribus centripetis.

Corol. 8. Proinde si medium, in quo corpus aliquod movetur, urgeatur vel a gravitate propriâ, vel ab aliâ quâcunque vi centripetâ, et corpus ab eâdem vi urgeatur fortius; differentia virium est vis illa motrix, quam in præcedentibus Propositionibus ut vim centripetam consideravimus.

Sin corpus a vi illâ urgeatur levius, differentia virium pro vi centrifugâ haberi debet.

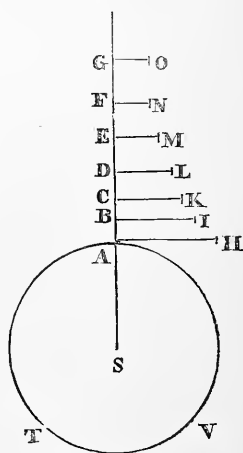
Corol. 9. Cùm autem fluida premendo corpora inclusa non mutant eorum figuras externas, patet insuper (per Corollarium Prop. XIX.) quod non mutabunt situm partium internarum inter se: proindeque, si animalia immergantur, et sensatio omnis a motu partium oriatur; nec lædent corpora immersa, nec sensationem ullam excitabunt, nisi quâtenus hæc corpora a compressione condensari possunt. Et par est ratio cujus-cunque corporum systematis fluido comprimente circumdati. Systematis partes omnes iisdem agitantur motibus, ac si in vacuo constituerentur, ac solam retinerent gravitatem suam comparativam, nisi quâtenus fluidum vel motibus earum nonnihil resistat, vel ad easdem compressione conglutinandas requiratur.

PROPOSITIO XXI. THEOREMA XVI.

Sit fluidi cujusdam densitas compressioni proportionalis, et partes ejus a vi centripetâ distantis suis a centro reciproce proportionali deorsum trahantur: dico quod, si distantie illæ sumantur continuè proportionales, densitates fluidi in iisdem distantis erunt etiam continuè proportionales.

Designet A T V fundum sphæricum cui fluidum incumbit, S centrum, S A, S B, S C, S D, S E, S F, &c. distantias continuè proportionales. Erigantur perpendiculara A H, B I, C K, D L, E M, F N, &c. quæ sint ut densitates medii in locis A, B, C, D, E, F; ^(g) et specificæ gravitates in iisdem locis erunt ut $\frac{A H}{A S}, \frac{B I}{B S}, \frac{C K}{C S}, \&c.$

^(b) vel, quod perinde est, ut $\frac{A H}{A B}, \frac{B I}{B C}, \frac{C K}{C D}, \&c.$ Finge primùm has gravitates uniformiter continuari ab A ad B, a B ad C, a C ad D, &c. factis per gradus decrementis in punctis B, C, D,



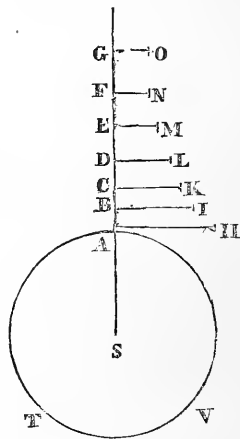
^(g) 174. *Et specificæ gravitates, &c.* Fluidi enim cujus singulæ particulæ vi gravitatis urgentur gravitas specifica est ut densitas et vis gravitatis acceleratrix conjunctim. Est enim gravitas specifica ut pondus directè et volumen inversè (170); sed pondus (per Defin. VIII. Lib. I.) est ut quantitas materiæ et vis gravita-

tis acceleratrix conjunctim; quantitas verò materiæ (2. Lib. I.) est ut densitas et volumen conjunctim. Quare, conjunctis his rationibus, gravitas specifica est ut densitas et vis gravitatis acceleratrix conjunctim. Q. e. d.

^(h) * *Vel quod perinde est, ut, &c.* Cùm enim (per Hyp.) distantie S A, S B, S C, S D

&c. ⁽ⁱ⁾ Et hæ gravitates ductæ in altitudines A B, B C, C D, &c. con-
ficient pressiones A H, B I, C K, &c. quibus fundum A T V (juxta
Theorema XV.) urgetur. Sustinet ergo particula A pressiones omnes
A H, B I, C K, D L, ^(k) pergendo in infinitum; et particula B pres-
siones omnes præter primam A H; et particula
C omnes præter duas primas A H, B I; et sic
deinceps: ideóque particulæ primæ A densitas
A H, est ad particulæ secundæ B densitatem
B I ut summa omnium A H + B I + C K +
D L, in infinitum, ad summam omnium B I +
C K + D L, &c. Et B I densitas secundæ B
est ad C K densitatem tertiæ C, ut summa om-
nium B I + C K + D L, &c. ad summam
omnium C K + D L, &c. Sunt igitur summæ
illæ differentiis suis A H, B I, C K, &c. pro-
portionales, atque ideò continuè proportionales
(per hujus Lem. I.) proindeque differentiæ A H,
B I, C K, &c. summis proportionales, sunt etiam
continuè proportionales. Quare cùm densitates
in locis A, B, C, &c. sint ut A H, B I, C K, &c. erunt etiam hæ conti-
nuè proportionales. Pergatur per saltum, et ex æquo in distantis S A,
S C, S E continuè proportionalibus, erunt densitates A H, C K, E M
continuè proportionales. Et eodem argumento, in distantis quibusvis
continuè proportionalibus S A, S D, S G, densitates A H, D L, G O
erunt continuè proportionales. Coëant jam puncta A, B, C, D, E, &c.
eo ut progressio gravitatum specificarum a fundo A ad summam fluidi
continua reddatur, et in distantis quibusvis continuè proportionalibus
S A, S D, S G, densitates A H, D L, G O, semper existentes continuè
proportionales, manebunt etiamnum continuè proportionales. Q. e. d.

Corol. Hinc si detur densitas fluidi in duobus locis, puta A et E, col-



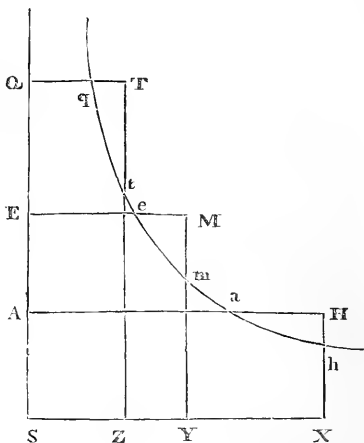
&c. sint continuè proportionales, earum diffe-
rentiæ A B, B C, C D, &c. ipsiis proportionales
erunt.

⁽ⁱ⁾ * Et hæ gravitates ductæ, &c. Nam si
pondus quod fundum sphaericum A T V susti-
net, exponatur per cylindrum cujus basis æqua-
lis sit superficiei A T V et altitudo eadem quæ
fluidi incumbentis, volumen fluidi cylindrici pro
altitudine A B erit A T V \times A B, ideóque ob
datam superficiem A T V, erit volumen illud ut
A B, multiplicetur illud per gravitatem specifi-
cam et factum erit ut pondus seu pressio; quare

cùm (ex demonst.) gravitas specifica sit ut $\frac{A H}{A B}$,
pressio fluidi cylindrici, cujus est altitudo A B,
erit ut A H, et ita de cæteris.

^(k) 175. * Pergendo in infinitum. Quoniam
enim (per Hyp.) densitas compressioni propor-
tionalis est, ubi compressio nulla evadit, eva-
nescit quoque densitas, seu, fluidum fit infinitè
rarum, ac proinde in infinitum expanditur; cùm
ratio voluminis ad materiæ quantitatem infinita
evadat (2. Lib. I.).

ligi potest ejus densitas in alio quovis loco Q . Centro S , asymptotis rectangulis SQ , SX describatur hyperbola secans perpendiculara AH , EM , QT in a , e , q , ut et perpendiculara HX , MY , TZ , ad asymptoton SX demissa, in h , m et t . Fiat area $YmtZ$ ad aream datam $YmhX$ ut area data $EeqQ$ ad aream datam $EeaA$; et linea Zt producta abscindet lineam QT densitati proportionalem. Namque si lineæ SA , SE , SQ sunt continuè proportionales, ⁽¹⁾ erunt areæ $EeqQ$, $EeaA$ æquales, et inde areæ his proportionales $YmtZ$, $XhmY$ etiam æquales, et lineæ SX , SY , SZ , id est, AH , EM , QT ^(m) continuè proportionales, ut oportet. Et si lineæ SA , SE , SQ obtinent alium quemvis ordinem in serie continuè proportionalium, lineæ AH , EM , QT , ab proportionales areas hyperbolicas, ⁽ⁿ⁾ obtinebunt eundem ordinem in aliâ serie quantitatum continuè proportionalium.



⁽¹⁾ * Erunt areæ $EeqQ$, $EeaA$ æquales, per not. 379. Lib. I.

^(m) * Continuè proportionales, (379. Lib. I.)

⁽ⁿ⁾ * Obtinebunt eundem ordinem, &c.

* Etenim areæ hyperbolicæ $EeaA$, $QqaA$ sunt logarithmi linearum SE , SQ , et pariter areæ $YmtZ$, $XhYZ$ sunt logarithmi linearum SY , SX , (379. 389. Lib. I.) sed cum areæ $YmtZ$, $XhYZ$ sint per constructionem

proportionales arcibus $EeaA$, $QqaA$, illæ areæ $YmtZ$, $XhYZ$ per doctrinam logarithmorum (n. 38.) poterunt esse logarithmi linearum SE , SQ ; cum ergo eadem quantitates possint esse logarithmi tam quantitatum SE , SQ , quam quantitatum SY , SX , oportet ut istæ quantitates SE , SY et SQ , SX correspondentia loca occupent in progressionibus geometricis ad quas pertinent.

PROPOSITIO XXII. THEOREMA XVII.

Sit fluidi cujusdam densitas compressioni proportionalis, et partes ejus a gravitate quadratis distantiarum suarum a centro reciproce proportionali deorsum trahantur: dico (^o) quòd, si distantiae sumantur in progressionem musicà, densitates fluidi in his distantiiis erunt in progressionem geometricà.

Designet S centrum, et S A, S B, S C, S D, S E distantias in progressionem geometricà. Erigantur perpendiculara A H, B I, C K, &c.

(^o) * Quòd, si distantiae sumantur in progressionem musicà, aut, quod idem est, si tales sumantur distantiae ut earum reciprocae sint in progressionem arithmeticà.

* Scilicet tres quantitates dicuntur esse in continuà proportionem musicà sive harmonicà, si prima sit ad tertiam ut differentia primae et secundae ad differentiam secundae et tertiae. Et si sit series plurium quantitatum talium ut terminus quivis sit ad subsequentem, ut differentia prioris a termino intermedio, ad differentiam hujus intermedii a posteriore termino, ea series dicitur *progressio musica*.

Corol. 1. *In progressionem musicà factum duorum priorum terminorum est ad factum duorum quorumvis immediatè sibi succedentium ut differentia inter duos primos terminos ad differentiam inter hos ultimos.* Nam sunt termini progressionis musicae A, B, C, D, E, F, &c. et differentiae inter singulos M, N, P, Q, R, &c. erit per definitionem hujus progressionis

$$A : C = M : N$$

$$B : D = N : P$$

$$C : E = P : Q$$

D : F = Q : R, unde ex compositione rationum patet quod est

$$A \times B : E \times F = M : R.$$

Corol. 2. *Differentia inter duos primos terminos est ad differentiam inter duos quosvis alios, ut secundus terminus, toties mulctatus differentia sua a primo quot sunt termini inter primum et ultimum, ad eum ultimum.*

Nam (iisdem litteris adhibitis quae in superiore Corollario) cum ex naturâ progr. sit A : C = M : N, sitque A = B - M; est B - M : C = M : N, ergo in hoc casu, differentia M inter duos primos terminos A et B est ad differentiam N inter B et C ut secundus terminus B semel mulctatus differentia sua a primo, cum sit unicus terminus inter primum A et ultimum C, ad eum ultimum C.

Cum ergo sit B - M : C = M : N, vicissim B - M : M = C : N, et dividendo B - 2 M : M = C - N : N; cumque sit C - N = B, est B - 2 M : M = B : N, sed, per defin. progress. est B : N = D : P ergo B - 2 M :

M = D : P et vicissim B - 2 M : D = M : P, sunt verò duo termini inter A et D, unde rursus in hoc casu constat Corollarii veritas.

Item cum sit B - 2 M : D = M : P et vicissim B - 2 M : M = D : P, erit dividendo B - 3 M : M = D - P : P, cumque sit D - P = C erit B - 3 M : M = C : P cumque per defin. progr. sit C : P = E : Q erit B - 3 M : M = E : Q et vicissim B - 3 M : E = M : Q, sunt verò inter A et E tres termini: cumque eadem recurat semper demonstratio si numerus terminorum progressionis inter primum et ultimum sit n; si secundus terminus dicatur B, differentia a primo M, ultimus terminus sit F, differentia a praecedente R erit, M : R = B - n M : F. Q. e. d.

Corol. 3. *In progressionem musicà secundus terminus toties mulctatus suâ differentia a primo quot sunt termini inter eum et ultimum est ad ultimum ut factum duorum primorum terminorum progressionis ad factum duorum postremorum.*

Liquet utique ex collatione quorum praecedentium Corollariorum; unde est semper, B - n M : F = A × B : E × F.

Theor. I. *Quilibet terminus progressionis musicae est aequalis facto duorum primorum terminorum diviso per secundum terminum toties mulctatum differentia sua a primo quot sunt termini a primo ad eum ultimum terminum.*

Primus terminus est $\frac{A \times B}{B}$, secundus termi-

nus $\frac{A \times B}{A}$ sed A = B - M ergo secundus ter-

minus est $\frac{A \times B}{B - M}$ Pro reliquis terminis habetur

semper per Corol. 3. B - n M : F = A × B : E × F divisus ergo consequentibus per F, erit B - n M : 1 = A × B : E unde est E

= $\frac{A \times B}{B - n M}$ sed cum n designaret numerum

terminorum inter A et F hic exprimit numerum terminorum a primo ad E hoc ultimo annumerato, unde patet Theor. veritas.

Theor. II. *Termini omnes progressionis mu-*

quæ sint ut fluidi densitates in locis A, B, C, D, E, &c. et ipsius (P) gravitates specificæ in iisdem locis erunt $\frac{A H}{S A q}$, $\frac{B I}{S B q}$, $\frac{C K}{S C q}$, &c. Finge

has gravitates uniformiter continuari, primam ab A ad B, secundam a B ad C, tertiam a C ad D,

&c. Et hæ ductæ in altitudines A B, B C, C D, D E, &c. vel, quod perinde est, in distantias S A, S B, S C, &c. altitudinibus illis proportionales, (q) conficiant exponentes pressionum $\frac{A H}{S A}$,

$\frac{B I}{S B}$, $\frac{C K}{S C}$, &c. Quare

cùm densitates sint ut harum pressionum summæ, differentiæ densitatum A H — B I, B I — C K, &c. erunt ut summarum differentiæ $\frac{A H}{S A}$,

$\frac{B I}{S B}$, $\frac{C K}{S C}$, &c. Centro S, asymptotis S A, S x describatur hyperbola

quævis, quæ secet perpendiculara A H, B I, C K, &c. in a, b, c, &c. ut et perpendiculara ad asymptoton S x demissa H t, I u, K w in h, i, k, et densitatum differentiæ t u, u w, &c. erunt ut $\frac{A H}{S A}$, $\frac{B I}{S B}$, &c. Et rectangula

t u × t h, u w × u i, &c. seu t p, u q, &c. ut $\frac{A H \times t h}{S A}$, $\frac{B I \times u i}{S B}$, &c.

id est, ut A a, B b, &c. Est enim, (r) ex naturâ hyperbolæ, S A ad A H vel S t, ut t h ad A a, ideóque $\frac{A H \times t h}{S A}$ æquale A a. Et simili

sicæ sunt inter se sicut quantitates quarum reciproca constituunt progressionem arithmeticam.

Nam per Theor. prius termini A. B. C. D. E, &c. prog. musicæ sunt $\frac{A \times B}{B}$, $\frac{A \times B}{B - M}$, $\frac{A \times B}{B - 2 M}$, $\frac{A \times B}{B - 3 M}$, &c. $\frac{A \times B}{B - n M}$. Divis itaque omnibus per 1 sunt ut

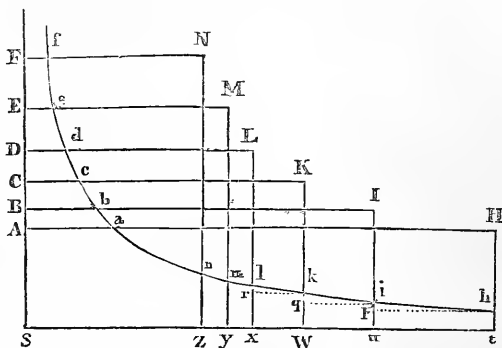
$\frac{B}{1}$, $\frac{B - M}{1}$, $\frac{B - 2 M}{1}$, $\frac{B - 3 M}{1}$, $\frac{B - n M}{1}$. Sed hæ sunt reciproca quantitatuum 3, B — M, B — 2 M, B — 3 M, B — n M quæ sunt in progressionem arithmeticâ; ergo, &c.

Scholium. Progressio musica potest esse decrescens et omnia ut prius procedent, mutatis signis negativis in positiva.

(P) * Gravitates specificæ in iisdem locis erunt, &c. (174.)

(Q) * Conficiant exponentes pressionum, seu quantitates pressionibus proportionales, &c. Quod patet ut in demonstratione Prop. XXI

(R) * Ex natura hyperbolæ, per Theor. IV. de Hyperbola.



argumento est $\frac{B I \times u i}{S B}$ æquale $B b$, &c. ^(s) Sunt autem $A a$, $B b$, $C c$,

&c. continuè proportionales, et propterea differentiis suis $A a - B b$, $B b - C c$, &c. proportionales; ideóque differentiis hisce proportionalia sunt rectangula $t p$, $u q$, &c. ut et summis differentiarum $A a - C c$ vel

$A a - D d$ summæ rectangulorum $t p + u q$ vel

$t p + u q + w r$. Sunt ejus-

modi termini quàm plu-

rimi, et summa omnium

differentiarum, puta $A a$

$- F f$, erit summæ om-

nium rectangulorum, puta

$z t h n$, proportionalis.

Augeatur numerus termi-

norum et minuantur dis-

tantiæ punctorum A , B ,

C , &c. in infinitum, ^(t) et rectangula illa evadent æqualia areae hyperbolicæ

$z t h n$, ideóque huic areae proportionalis est differentia $A a - F f$.

^(v) Sumantur jam distantiae quælibet, puta $S A$, $S D$, $S F$, in progres-

sione musicâ, et differentiae $A a - D d$, $D d - F f$ erunt æquales; et

propterea differentiis hisce proportionales areae $t h l x$, $x l n z$ æquales

erunt inter se, et densitates $S t$, $S x$, $S z$, id est, $A H$, $D L$, $F N$, ^(x) con-

tinuè proportionales. Q. e. d.

Corol. Hinc si dentur fluidi densitates duæ quævis, puta $A H$ et $B I$,

dabitur area $t h i u$, harum differentiae $t u$ respondens; et inde invenietur

densitas $F N$, in altitudine quâcunque $S F$, sumendo aream $t h n z$ ad

aream illam datam $t h i u$ ut est differentia $A a - F f$ ^(y) ad differentiam

$A a - B b$.

^(s) Sunt autem $A a$, $B b$, $C c$, &c. continuè proportionales. Nam (per Hyp.) $S A$, $S B$, $S C$ sunt continuè proportionales, et (per Theor. IV. de Hyp.) $A a$, $B b$, $C c$ sunt reciproce ut $S A$, $S B$, $S C$, ideóque etiam continuè proportionales.

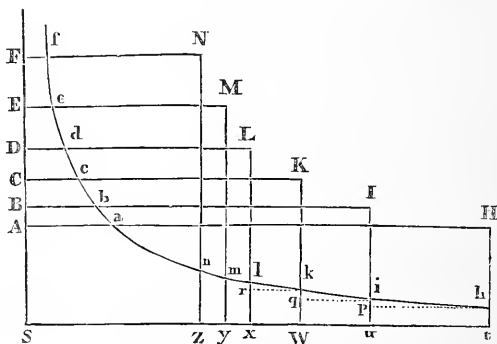
^(t) * Et rectangula evadent æqualia areae hyperbolicæ $z t h n$, per Lemma III. Lib. I.

^(v) * Sumantur jam distantiae quælibet, puta $S A$, $S D$, $S F$ in progressionem musicâ, et earum reciproca $A a$, $D d$, $F f$ erunt in progressionem arithmetica, ideóque differentiae $A a - D d$, $D d - F f$ æquales.

^(x) * Continuè proportionales. (379. Lib. I.)

^(y) 176. * Ad differentiam $A a - B b$. Quoniam verò area $t h i u$ est ad aream $t h n z$ ut logarithmus linearum $S t$ vel $A H$ ad logarithmum linearum $S z$ seu $F N$ (379 et 380 Lib. I.), densitas $F N$ per tabulas logarithmorum inveniri poterit. Et vice versâ, datâ densitate $F N$ invenietur altitudo $S F$: nam per Prop. superiorem dabitur $A a - F f$, et inde dabitur $F f$,

unde invenietur $F S = \frac{S A \times A a}{F f}$ (per Theor. IV. de Hyp.). Quia verò fluidi elasticitas, cæteris paribus, vi comprimenti, ideóque densitati (per Hyp.) proportionalis est, patet per hoc Corollarium ex datis altitudinibus inveniri posse elasticitates, et vice versâ.



Scholium.

(²) Simili argumentatione probari potest, quòd si gravitas particularum fluidi diminuatur in triplicatâ ratione distantiarum a centro, et quadrato-

(²) 177. * *Simili argumentatione probari potest, &c.* Sit vis centripeta particularum fluidi reciprocè ut distantia dignitas, cujus index est n ; designet S centrum, et S A, S B, S C, S D, S E distantias in progressionem geometricâ. Erigantur perpendiculara A H, B I, C K, &c. quæ sint ut fluidi densitates in locis A, B, C, D, E, &c. Et ipsius gravitates specificæ in iisdem locis erunt $\frac{A H}{S A^n}, \frac{B I}{S B^n}, \frac{C K}{S C^n}$, &c.

Finge has gravitates uniformiter continuari primam ab A ad B, secundam a B ad C, tertiam a C ad D, &c. Et hæ ductæ in altitudines A B, B C, C D, D E, &c. vel quod perinde est, in distantias S A, S B, S C, &c. altitudinibus illis proportionales, efficiunt exponentes pressionum $\frac{A H}{S A^{n-1}}, \frac{B I}{S B^{n-1}}, \frac{C K}{S C^{n-1}}$, &c.

Quare cum densitates sint ut harum pressionum summæ, differentia densitatum A H — B I, B I — C K, &c. erunt ut summarum differentiarum $\frac{A H}{S A^{n-1}}, \frac{B I}{S B^{n-1}}, \frac{C K}{S C^{n-1}}$, &c. fiat

eaem constructio, quæ supra in Prop. XXII, et densitatum differentia t v, u w, &c. erunt ut

$\frac{A H}{S A^{n-1}}, \frac{B I}{S B^{n-1}}$, &c. et rectangula t v \times t h, u w \times u i, &c., seu t p, u q, &c. ut $\frac{A H \times t h}{S A^{n-1}}, \frac{B I \times u i}{S B^{n-1}}$, &c. id est, ut A aⁿ⁻¹, B bⁿ⁻¹, &c.

Est enim (per Theor. IV. de Hyp.) A H \times t h æquale S A \times A a, et A a reciprocè ut S A, seu directè ut $\frac{1}{S A}$, ideòque $\frac{A H \times t h}{S A^{n-1}}$

ut S A \times A a \times A aⁿ⁻¹, sive ut A aⁿ⁻¹ cum sit S A \times A a = 1, et simili argumento est $\frac{B I \times u i}{S B^{n-1}}$ ut B bⁿ⁻¹, &c. sunt autem A a,

B b, C c, &c. ideòque A aⁿ⁻¹, B bⁿ⁻¹, C cⁿ⁻¹, &c. continuè proportionales, et propterea differentiiis suis A aⁿ⁻¹ — B bⁿ⁻¹, B bⁿ⁻¹ — C cⁿ⁻¹, &c. proportionales, ideòque differentiiis hisce proportionalia sunt rectangula t p, u q, &c. ut et summis differentiarum A aⁿ⁻¹ — C cⁿ⁻¹, vel A aⁿ⁻¹ — D dⁿ⁻¹ summæ rectangulorum t p + u q, vel t p + u q + w r. Sunt ejusmodi termini quàm plurimi, et summa omnium differentiarum; puta A aⁿ⁻¹ — F fⁿ⁻¹, erit summæ omnium rectangulorum, puta z t h n, proportionalis. Augeatur numerus terminorum et minuatur distantia punctorum A, B, C, &c. in infinitum, et rectangula illa evadent æqualia aræ hy-

perbolicae z t h n, ideòque huic aræ proportionalis est differentia A aⁿ⁻¹ — F fⁿ⁻¹.

Sumantur jam distantiarum quarumlibet, puta S A, S D, S F dignitates S Aⁿ⁻¹, S Dⁿ⁻¹, S Fⁿ⁻¹ in progressionem musicâ, ideòque ea-

rum reciprocæ $\frac{1}{S A^{n-1}}, \frac{1}{S D^{n-1}}, \frac{1}{S F^{n-1}}$,

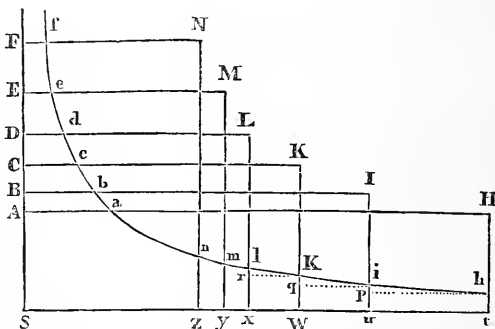
seu A aⁿ⁻¹, D dⁿ⁻¹, F fⁿ⁻¹ in progressionem arithmeticâ, et differentia A aⁿ⁻¹ — D dⁿ⁻¹, D dⁿ⁻¹ — F fⁿ⁻¹ erunt æquales; et propterea differentiiis hisce proportionales aræ t h l x, x l n z æquales erunt inter se, et densitas S t, S x, S z, id est, A I, D L, F N continuè proportionales. Quare si gravitas particularum fluidi diminuatur in ratione quâcumque multiplicatâ distantiarum, cujus exponens sit n, et dignitatum S Aⁿ⁻¹, S Bⁿ⁻¹, S Cⁿ⁻¹, &c. reciproca (nempe $\frac{S A^n}{S A^{n-1}}$,

$\frac{S A^n}{S B^{n-1}}, \frac{S A^n}{S C^{n-1}}$, &c. in quibus S A data est) sumantur in progressionem arithmeticâ; densitates A H, B I, C K, &c. erunt in progressionem geometricâ.

Si itaque loco n scribantur numeri 3, 4, 5, 6, &c. in infinitum; et rursus scribantur 0, — 1, — 2, — 3, &c. in infinitum, patet veritas scholii in hypothesi densitatis vi comprimenti proportionalis. Quando autem n = 0, seu quando gravitas particularum fluidi in omnibus distantiiis eadem est, est $\frac{S A^n}{S A^{n-1}} = S A, \frac{S A^n}{S B^{n-1}} =$

S B, ideòque si distantia sumantur in progressionem arithmeticâ, densitates erunt in progressionem geometricâ, ideòque distantia sunt ut densitatum logarithmi, quia crescentibus distantiiis in progressionem arithmeticâ, decrescunt densitates in progressionem geometricâ. Quia verò per experientia constat, quod densitas aëris, cæteris paribus ac potissimum manente eodem caloris gradu, sit ut vis comprimens vel accuratè vel saltem quam proximè in aëre quem experimentis possumus subijcere, vis autem aërem inferiorem comprimens, cæteris etiam paribus, æqualis sit ponderi aëris totius incumbitis, ideòque proportionalis altitudini mercurii in barometro, et præterea particularum aëris gravitas, in minoribus saltem a telluris superficie distantiiis, constans censi possit, patet, quod, cæteris paribus, aëris densitatem, ad hujusmodi distantias minores, metiri possimus per logarithmos. Sed de his plura videre est in Elementis Aërometriæ clar. Wolfii, in Libro II. Phoronomiæ, et in sectione 10. Hydrodynamice clar. Danielis Bernoulli.

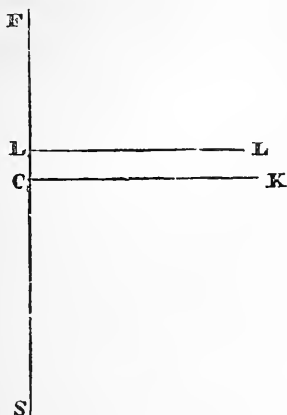
rum distantiarum S A, S B, S C, &c. reciproca (nempe $\frac{S A \text{ cub.}}{S A q}$, $\frac{S A \text{ cub.}}{S B q}$, $\frac{S A \text{ cub.}}{S C q}$) sumantur in progressionem arithmeticâ; densitates A H, B I, C K, &c. erunt in progressionem geometricâ. Et si gravitas diminuatur in quadruplicatâ ratione distantiarum, et cuborum distantiarum reciproca (puta $\frac{S A q q}{S A \text{ cub.}}$, $\frac{S A q q}{S B \text{ cub.}}$, $\frac{S A q q}{S C \text{ cub.}}$, &c.) sumantur in progressionem arithmeticâ; densitates A H, B I, C K, &c. erunt in progressionem geometricâ. Et sic in infinitum.



Rursus si gravitas particularum fluidi in omnibus distantiiis eadem sit, et distantiae sint in progressionem arithmeticâ densitates erunt in progressionem geometricâ, uti vir claris. Edmundus Halleius invenit. Si gravitas sit ut distantia, et quadrata distantiarum sint in progressionem arithmeticâ, densitates erunt in progressionem geometricâ. Et sic in infinitum. Hæc ita se habent ubi fluidi compressione condensati densitas est ut vis compressionis, vel, quod perinde est, spatium a fluido occupatum reciprocè ut hæc vis. Fingi possunt aliæ condensationis leges, ut quòd cubus vis comprimantis sit ut quadrato-quadratum densitatis, seu triplicata ratio vis eadem cum quadruplicatâ ratione densitatis. Quo in casu, si gravitas est reciprocè ut quadratum distantiae a centro, densitas erit reciprocè ut cubus distantiae. Fingatur quòd cubus vis comprimantis sit ut quadrato-cubus densitatis, et si gravitas est reciprocè ut quadratum distantiae, densitas erit reciprocè in sesquuplicatâ ratione distantiae. Fingatur quòd vis comprimens sit in duplicatâ ratione densitatis, et gravitas reciprocè in ratione duplicatâ distantiae, et densitas erit reciprocè ut distantia. (*) Casus omnes percurrere longum esset. Cæterum per experimenta constat quòd densitas aëris sit ut vis comprimens vel accuratè, vel saltem quàm proximè: et propterea densitas aëris in atmosphærâ Terræ est ut pondus aëris totius incumbentis, id est, ut altitudo mercurii in barometro.

(*) 178. * Casus omnes percurrere longum esset; satius erit generalem formulam tradere, ex quâ singuli casus pro lubitu eruantur, lis- dem igitur, quæ supra, positæ, sit distantia varia-

bilis $SC = x$, altitudo $CD = d x$, densitas $CK = y$, vis tota comprimens in loco $C = v$, vis gravitatis ibidem $= g$; et erit gravitas specifica in eodem loco ut $g y$ (174), et hæc ducta



in altitudinem evanescentem CD seu $d x$ conficiunt momentum pressiois $g y d x = -d v$. Sumitur autem fluxio $d v$ negativè, quod crescente distantia x , pondus incumbens v decrescat.

Sit gravitas g ut $\frac{1}{x^m}$, densitas y ut vis comprimentis dignitas v^n , ideòque $y^{\frac{1}{n}}$ ut v , et sumptis fluxionibus $\frac{1}{n} y^{\frac{1-n}{n}} d y$ ut $d v$. Loco g et $d v$ substituantur hi valores in æquatione $g y d x = -d v$, et fiet $\frac{y d x}{x^m} = -\frac{1}{n} y^{\frac{1-n}{n}} d y$ seu $-\frac{d x}{x^m} = \frac{1}{n} y^{\frac{1-2n}{n}} d y$. His verò æquationibus non æqualitates, sed proportionales tantum exponimus, et ideò cœfficientes datas negligimus.

Si in ultimâ æquatione ponatur $n = 1$, id est, densitas vi comprimenti proportionalis, erit $\frac{d y}{y} = -\frac{d x}{x^m}$. Sumantur quantitates $\frac{1}{x^{m-1}}$ in progressionem arithmeticâ; et earum fluxiones, seu differentie nascentes $-\frac{(m-1) d x}{x^m}$, ideòque et $-\frac{d x}{x^m}$ constantes erunt, et propterea quantitates $\frac{d y}{y}$ etiam datæ; ac proinde densitates y suis differentiis $d y$ proportionales, erunt continuè proportionales, (per Lem. II. Lib. II.). Si in eadem hypothesi ponatur $m = 1$, fit $\frac{d y}{y} = -\frac{d x}{x}$; unde si capiantur quantitates $\frac{d y}{y}$

constantes, seu distantie x in progressionem geometricâ, erunt etiam quantitates $\frac{d y}{y}$ constantes,

et ideò densitates y in progressionem geometricâ. Prorsus ut in Prop. XXI., XXII. et initio scholii hujus demonstratum est. Sumptis fluen-

tibus, æquatio $\frac{1}{n} y^{\frac{1-2n}{n}} d y = -\frac{d x}{x^m}$ hanc

abit $\frac{1}{1-n} y^{\frac{1-n}{n}} = -\frac{1}{m-1} x^{1-m} + Q$.

const. in quâ non potest esse $m = 1$, nec $n = 1$, neque $n = 0$, ut patet. Ut autem determinetur valor constantis Q , primum definienda est altitudo SF , ubi densitas y evanescit. Nam si altitudo illa finita est et dicatur $= a$, positâ $y = 0$, habebitur $Q = -\frac{1}{m-1} a^{1-m}$, et hinc $\frac{1}{1-n} x^{\frac{1-n}{n}} = -\frac{1}{m-1} x^{1-m} - \frac{1}{m-1} a^{1-m} x^{\frac{1-n}{n}}$.

in qua æquatione debet esse $\frac{1-n}{n}$ numerus positivus, seu n numerus positivus unitate minor, ut crescentibus distantis x , decrescant densitates y , et contra. Si altitudo SF ad quam densitas y evanescit, infinita supponatur, erit constans $Q = 0$, ac proinde æquatio $\frac{1}{1-n} y^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{m-1} x^{1-m}$. Nam si in æquatione $\frac{1}{1-n} x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{m-1} x^{1-m} - \frac{1}{m-1} a^{1-m} x^{\frac{1-n}{n}}$, ponatur y nulla

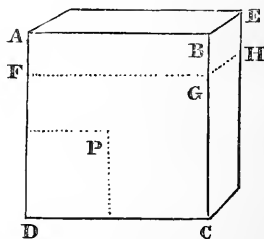
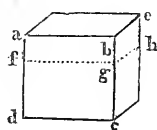
et x infinita, quantitas constans a erit infinita, contra hypothesin.

Jam vero si gravitas est reciprocè ut quadratum distantie, id est si $m = 2$, æquatio $\frac{1}{1-n} x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{m-1} x^{1-m}$ in hanc migrat $\frac{1}{1-n} x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{m-1} x^{1-m}$ unde est y ut $x^{\frac{1}{1-n}}$ reciprocè. Fingatur quod cubus vis comprimentis sit ut quadrato-quadratum densitatis, seu y^4 ut v^3 , ideòque y ut $v^{\frac{3}{4}}$, et hinc $n = \frac{3}{4}$; et erit $x^{\frac{1}{1-n}} = x^3$, ac proinde densitas y ut x^3 reciprocè, seu densitas, reciprocè ut cubus distantie. Fingatur quod cubus vis comprimentis sit ut quadrato-cubus densitatis, hoc est, y^5 ut v^3 , adeòque y ut $v^{\frac{3}{5}}$, et hinc $n = \frac{3}{5}$; et erit y ut $x^{\frac{5}{2}}$ reciprocè, id est, densitas reciprocè ut distantia. Quæ Newtonus in scholio dixerat. Vide Monumenta Academicæ Regiæ Scientiarum anni 1716, ubi hanc materiam tractat Varignonius, quem hic sumus sequuti.

PROPOSITIO XXIII. THEOREMA XVIII.

Si fluidi ex particulis se mutuo fugientibus compositi densitas sit ut compressio, vires centrifugæ particularum sunt reciproçè proportionales distantiiis centrorum suorum. Et vice versâ, particulæ viribus quæ sunt reciproçè proportionales distantiiis centrorum suorum se mutuo fugientes componunt fluidum elasticum, cujus densitas est compressioni proportionalis.

Includi intelligatur fluidum in spatio cubico A C E, dein compressione redigi in spatium cubicum minus a c e; et particularum, similem situm inter se in utroque spatio obtinentium, ^(b) distantiae erunt ut cuborum latera A B, a b; ^(c) et mediorum densitates reciproçè ut spatia continentia A B cub. et a b cub. In cubi majoris latere plano A B C D capiatur quadratum D P æquale lateri plano cubi minoris d b; et ex hypothesi, pressio, quâ quadratum D P urget fluidum inclusum, erit ad pressionem, quâ illud quadratum d b urget fluidum inclusum, ut medii densitates ad invicem, hoc est, ut a b cub. ad A B cub.



Sed pressio, quâ quadratum D B urget fluidum inclusum, est ad pressionem, quâ quadratum D P urget idem fluidum, ut quadratum D B ad quadratum D P, hoc est, ut A B quad. ad a b quad. Ergo, ex æquo, pressio quâ quadratum D B urget fluidum, est ad pressionem quâ quadratum d b urget fluidum, ut a b ad A B. Planis F G H, f g h, per media cuborum ductis, distinguatur fluidum in duas partes, ^(d) et hæ se mutuo prement iisdem viribus, quibus premuntur a planis A C, a c, hoc est, in proportionem a b ad A B: ideóque vires centrifugæ, quibus hæ pressiones sustententur, sunt in eâdem ratione. Ob eundem particularum numerum similemque situm in utroque cubo, vires quas particulæ omnes secundum plana F G H, f g h exercent in omnes, sunt ut vires quas singulæ exer-

^(b) * Distantiæ erunt ut cuborum latera A B, a b, per Lemma V. Lib. I.

^(c) * Et mediorum densitates, ut, &c. ob datam in utroque spatio fluidi massam (2. Lib. I.).

^(d) * Et hæ se mutuo prement iisdem viribus,

&c. Pressiones enim in unoquoque spatio sunt ubique æquales; nam cum fluidum uniformæ supponatur, si pressio minor esset in uno loco quàm in alio, statim cederet fluidum magis pressum, atque ita pressio ad æqualitatem restituere-tur, ut in Casu 6. Prop. XIX.

cent in singulas. Ergo vires, quas singulæ exercent in singulas secundum planum F G H in cubo majore, sunt ad vires, quas singulæ exercent, in singulas secundum planum f g h in cubo minore, ut a b ad A B, hoc est, reciprocè ut distantiae particularum ad invicem. Q. e. d.

Et vice versâ, si vires particularum singularum sunt reciprocè ut distantiae, id est, reciprocè ut cuborum latera A B, a b; summæ virium erunt in eâdem ratione, et pressiones laterum D B, d b ut summæ virium; et pressio quadrati D P ad pressionem lateris D B ut a b quad. ad A B quad. Et, ex æquo, pressio quadrati D P ad pressionem lateris d b ut a b cub. ad A B cub. id est, vis compressionis ad vim compressionis ut densitas ad densitatem. Q. e. d.

Scholium.

() Simili argumento, si particularum vires centrifugæ sint reciprocè in duplicatâ ratione distantiarum inter centra, cubi virium comprimentium erunt ut quadrato-quadrata densitatum. Si vires centrifugæ sint reciprocè in triplicatâ vel quadruplicatâ ratione distantiarum, cubi virium comprimentium erunt ut quadrato-cubi vel cubo-cubi densitatum. Et universaliter, si D ponatur pro distantia, et E pro densitate fluidi compressi, et vires centrifugæ sint reciprocè ut distantiae dignitas quælibet D^n , cujus index est numerus n; vires comprimentes erunt ut latera cubica dignitatis E^{n+2} , cujus index est numerus $n + 2$: et contra. Intelligenda vero sunt hæc omnia de particularum viribus centrifugis quæ terminantur in particulis proximis, aut non longè ultra diffunduntur

(*) * *Simili argumento, &c.* Sunto D et d particularum distantiae in spatiis cubicis A C E et a c e quæ sunt ut A B et a b, earumdem vires centrifugæ ut D^n et d^n reciprocè, fluidi densitates E et e, et vires comprimentes erunt ut $E^{\frac{n+2}{3}}$ et $e^{\frac{n+2}{3}}$.

Nam cum summæ virium quas omnes simul particulæ exercent in latera D B, d b, sint ut singularum particularum vires erunt istæ summæ virium ut D^n et d^n reciprocè, seu ut a b^n et $A B^n$ directè; et pressio quadrati D P ad pressionem quadrati D B ut a b^2 ad $A B^2$; unde ex æquo pressio quadrati D P ad pressionem quadrati d b, hoc est, vis comprimens in spatio A C E ad vim comprimentem in spatio a c e, ut a b^{n+2} ad $A B^{n+2}$. Sunt autem densitates, sive est E ad e, ut a b^3 ad $A B^3$, et ideo $E^{\frac{n+2}{3}}$ ad $e^{\frac{n+2}{3}}$ ut a b^{n+2} ad $A B^{n+2}$.

Quare vires comprimentes sunt ut $E^{\frac{n+2}{3}}$ et $e^{\frac{n+2}{3}}$. Q. e. d.

Et vice versâ, si vires comprimentes sunt ut densitatum dignitates $E^{\frac{n+2}{3}}$, $e^{\frac{n+2}{3}}$, seu ut a b^{n+2} , $A B^{n+2}$; erit pressio quadrati D P ad pressionem quadrati d b in eâdem ratione, et pressio quadrati D B est ad pressionem quadrati D P, ut $A B^2$ ad a b^2 ; et, ex æquo, pressio quadrati D B ad pressionem quadrati d b, ut a b^n ad $A B^n$, seu ut d^n ad D^n . Sunt autem vires particularum singularum ut summæ virium, hoc est, ut pressiones laterum D B, d b; quare vires particularum centrifugæ sunt reciprocè ut distantiarum dignitates D^n , d^n . Q. e. d.

Jam si loco n scribantur numeri 2, 3, &c., patet veritas eorum quæ initio scholii dixit Newtonus.

Exemplum habemus in corporibus magneticis. Horum virtus attractiva terminatur ferè in sui generis corporibus sibi proximis. Magnetis virtus per interpositam laminam ferri contrahitur, et in laminâ ferè terminatur. Nam corpora ulteriora non tam a magnete quam a laminâ trahuntur. Ad eundem modum si particulæ fugant alias suis generis particulas sibi proximas, in particulas autem remotiores virtutem nullam exerceant, ex hujusmodi particulis componentur fluida de quibus actum est in hâc Propositione. Quod si particulæ cujusque virtus in infinitum propagetur, (f) opus erit vi majori ad æqualem condensationem majoris quantitatis fluidi. An vero fluida elastica ex particulis se mutuo fugantibus constent, quæstio physica est. Nos proprietatem fluidorum ex ejusmodi particulis constantium mathematicè demonstravimus, ut philosophis ansam præbeamus quæstionem illam tractandi.

(f) * *Opus erit vi majori, &c.* Non enim solum vincenda erit per compressionem vis centrifuga particularum proximarum, sed et remotio-

rum vis erit superanda quæ (ex Hyp.) in infinitum propagatur.

SECTIO VI.

De motu et resistentiâ corporum funependulorum.

(5) PROPOSITIO XXIV. THEOREMA XIX.

Quantitates materiæ in corporibus funependulis, quorum centra oscillationum a centro suspensionis æqualiter distant, sunt in ratione compositâ ex ratione ponderum et ratione duplicatâ temporum oscillationum in vacuo.

Nam velocitas, quam data vis in datâ materiâ, dato tempore generare potest, est ut vis et tempus directè, et materia inversè. Quo major est vis vel majus tempus vel minor materia, eo major generabitur velocitas. Id quod per motus Legem secundam manifestum est. ^(h) Jam verò si pendula ejusdem sint longitudinis, vires motrices in locis a perpendicularo æqualiter distantibus sunt ut pondera: ideóque si corpora duo oscillando describant arcus æquales, et arcus illi dividantur in partes æquales; ⁽ⁱ⁾ cùm tempora quibus corpora describant singulas arcuum partes corres-

(5) * *Propositio XXIV.* In hâc Propositione et ejus Corollaris supponitur corpora funependula, quæ comparantur, in cycloidibus aut saltem in exiguis magni circuli arcubus oscillari. * Pondera autem corporum hic duplici de causâ a materiâ ipsorum distinguuntur; primo, quod nondum assumi possit gravitatem agere secundum rationem massarum, cum id ipsum ex isto Theoremate postea deducatur, Cor. 7.; et secundo, in diversis locis gravitas diversa esse potest (ut quidem ex experimentis constat) ideóque corporum duorum in diversis iis locis spectatorum ratio materiæ eadem manebit, non verò ratio ponderum.

^(h) Jam verò si pendula ejusdem sint longitudinis, vires motrices in locis a perpendicularo æqualiter distantibus sunt ut pondera.

* Nam si pendula ejusdem sint longitudinis, cycloides plane similes et æquales describent: in unaquâque autem cycloide, vires quibus corpora in locis quibusvis D, (vid. fig. pag. seq.) vel d accelerantur, sunt ad totum singuli corporis pondus in locis altissimis, ut arcus cycloidis inter loca proposita D, d et puncta infima C, c, ad totas semi-cycloides (Cor. Prop. LII. Lib. I.) Ergo si semi-cycloides sint æquales et loca D et d a perpendicularo æqualiter distent, arcus D C et d c erunt æquales, ideóque vis quâ cor-

pus acceleratur in primâ cycloide in puncto D, erit ad totum ejus corporis pondus, ut vis quâ corpus acceleratur in alterâ cycloide in puncto d, ad totum ejus corporis pondus. Unde vicissim, vis quâ acceleratur primum corpus in puncto D, est ad vim quâ alterum acceleratur in puncto d, ut totum prioris corporis pondus, ad pondus alterius corporis, ideóque si pendula sint ejusdem longitudinis vires motrices, &c. Q. e. d.

⁽ⁱ⁾ Cum tempora quibus corpora describant singulas arcuum partes (æquales) correspondentes sint ut tempora oscillationum totarum.

* Sint arcus D C, d c æquales, secenturque in partes æquales infinitè parvas D E, E F, &c.; d e, e f, &c., ex punctis D, E, F et d, e, f, ducantur perpendiculares ad axem, D M, E N, F R; D m, e n, f r; liquet lineolas M N et m n, M R et m r ex hypothesi fore æquales; ex naturâ autem gravitatis, velocitas acquisita in E erit ad velocitatem acquisitam in F ut radix altitudinis M N ad radicem M R, et pariter velocitas acquisita in e, erit ad velocitatem acquisitam in f ut $\sqrt{m n}$ ad $\sqrt{m r}$, cum ergo $\sqrt{M N} = \sqrt{m n}$ et $\sqrt{M R} = \sqrt{m r}$ velocitas acquisita in E est ad velocitatem acquisitam in F, ut velocitas acquisita in e est ad velocitatem acquisitam in f, et vicissim velocitas acquisita in E, est ad velocitatem acquisitam in e;

pondentes sint ut tempora oscillationum totarum, (†) erunt velocitates ad invicem in correspondentibus oscillationum partibus, ut vires motrices et tota oscillationum tempora directè et quantitates materiæ reciproçè: ideòque quantitates materiæ ut vires et oscillationum tempora directè et velocitates reciproçè. (§) Sed velocitates reciproçè sunt ut tempora, atque ideò tempora directè et velocitates reciproçè sunt ut quadrata tem-

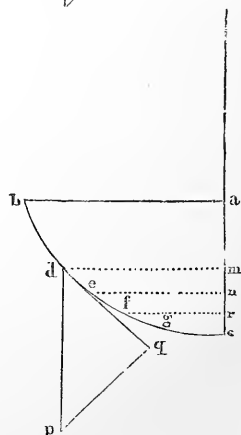
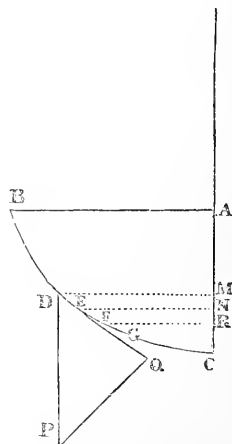
ut velocitas acquisita in F est ad velocitatem acquisitam in f. Sed quoniam arcus E F et e f F G et f g sunt infinite parvi et æquales, uniformiter describi censendi sunt, et tempora quibus describuntur erunt in ratione reciproçâ velocitatum, ideòque tempus quo describitur E F est ad tempus quo describitur e f, ut velocitas in e ad velocitatem in E, et tempus quo describitur F G est ad tempus quo describitur f g, ut velocitas in f ad velocitatem in F, &c. sed rationes velocitatum in E et e, in F et f, &c. sunt semper æquales inter se, ergo et rationes temporum quæ istarum sunt inversæ sunt æquales inter se; ergo tempora quibus singulæ partes arcus D C describuntur, sunt ad tempora quibus correspondentes partes arcus d c describuntur, in eadem ratione, ergo omnes antecedentes et omnes consequentes summando, omnia simul tempora quibus percurruntur omnes partes arcus D C, hoc est, totum tempus oscillationis per D C, est ad omnia tempora quibus partes arcus d c percurruntur, hoc est ad totum tempus oscillationis per d c ut tempus unum quo quædam pars arcus D C percurritur, est ad tempus quo pars correspondens arcus d c percurritur. Q. e. d.

(†) *Erunt velocitates ad invicem in correspondentibus oscillationum partibus, ut vires motrices et tota oscillationum tempora directè et quantitates materiæ reciproçè.* * Ex demonstratione notæ superioris liquet velocitates in correspondentibus partibus esse omnes in eadem ratione, ideòque ut velocitas acquisita in E ad velocitatem acquisitam in e, sed cum arcus D E et d e infinite parvi supponantur, censendum est, vires motrices uniformiter agere, dum illi arcus percurruntur; motus ergo per eas productus crescit tam pro ratione virum ipsarum quam pro ratione temporis quo arcus illi describuntur sive (ex demonstratis) pro ratione temporum oscillationum integrarum, motus verò ex Def. 2. Lib. I. æstimatur a Newtono ex velocitate et materiâ conjunctim, ergo velocitates productæ in correspondentibus oscillationum partibus erunt ut vires motrices et tota oscillationum tempora directè et quantitates materiæ inversè.

(§) * *Sed velocitates sunt reciproçè ut tempora.*

* Ex demonstratis (ad notam superiorem¹⁾) liquet velocitatem acquisitam in E esse ad velocitatem acquisitam in e ut velocitas acquisita in puncto quovis arcus D C ad velocitatem acquisitam in puncto correspondenti arcus d c; ex eadem demonstratione liquet velocitatem acqui-

sitam in E esse ad velocitatem acquisitam in e, in ratione reciproçâ temporum quibus describuntur arcus E F, et e f; hæc verò tempora esse ut



tempora oscillationum integrarum, unde velocitas acquisita in puncto quovis arcus D C, est ad velocitatem acquisitam in puncto correspondenti arcus d e, in ratione reciproçâ temporum oscillationum totarum. Q. e. d.

porum, et propterea quantitates materiæ sunt ut vires motrices et quadrata temporum, id est, ut pondera et quadrata temporum. (††) Q. e. d.

Corol. 1. Ideoque si tempora sunt æqualia, quantitates materiæ in singulis corporibus erunt ut pondera.

Corol. 2. Si pondera sunt æqualia, quantitates materiæ erunt ut quadrata temporum.

Corol. 3. Si quantitates materiæ æquantur, pondera erunt reciprocè ut quadrata temporum.

Corol. 4. ^(k) Unde cum quadrata temporum, cæteris paribus, sint ut longitudo pendulorum; si et tempora et quantitates materiæ æqualia sunt, ^(l) pondera erunt ut longitudo pendulorum.

(††) *Quod erat demonstrandum.* * In demonstratione probatum est quod si describuntur arcus æquales D C, d c quantitates materiæ sunt ut pondera et quadrata temporum, sumatur jam arcus b c major vel minor arcu d c sed quantitates materiæ et pondera utrinque maneant eadem quæ prius, et pariter ob isochroneitatem curvæ b d c, tempus oscillationis per b c, æquale erit temporis oscillationis per d c, ideoque quicumque sint arcus descripti si modo maneant penduli longitudo, eademque sit utrinque cyclois, pariter verum erit quod quantitates materiæ sunt ut pondera et quadrata temporum oscillationum.

^(k) *Unde cum quadrata temporum cæteris paribus sint ut longitudo pendulorum.* * Fingatur L C, l c inæqualia esse, et arcus D C, d c non sumi æquales ut prius, sed similes, sive proportionales longitudinibus L C, l c, secetur D C in partes æquales inter se, et d c in partes similes, ita ut sit D E ad d e ut L C ad l c ductisque perpendicularibus D M, E N, d m, e n, &c. liquet ex similitudine figurarum altitudines M N et m n, M R et m r, &c. esse etiam inter se in ratione L C ad l c, velocitates verò quibus describuntur arcus E F, F G sunt ut $\sqrt{M N}$ ad $\sqrt{M R}$, et velocitates quibus describuntur arcus e f, f g sunt ut $\sqrt{m n}$ ad $\sqrt{m r}$, sed quia M N et m n, M R et m r, sunt in eadem ratione ideoque et earum radices, vicissim, velocitas quæ describitur E F est ad velocitatem quæ describitur e f, ut velocitas quæ describitur F G ad velocitatem quæ describitur f g; et sic ordine perpetuo demonstrabitur velocitates quibus successivæ partes correspondentes utriusque curvæ percurrunt fore semper in eadem ratione; tempora verò quibus arcus similes describuntur sunt directè ut illi arcus et inversè ut velocitates; ergo cum ratio arcuum correspondentium sit semper eadem, nempe ratio L C ad l c, ut et ratio velocitatum quibus percurruntur illi arcus, singula tempuscula quibus describuntur particulae arcus D C eandem rationem habebunt ad tempuscula quibus correspondentes particulae arcus d c percurruntur; ideoque tempora tota oscillationum per D C et d c erunt directè ut longitudo L C et l c, et inversè ut velocitates in punctis

quibusvis correspondentibus arcuum D C et d c, putà in punctis infimis C et c, sed quia ex hypothesi quod pondera sunt æqualia et quod quantitates materiæ sunt æquales, velocitates sunt proportionales radicibus quadratis altitudinum, velocitates in punctis C et c erunt ut $\sqrt{M C}$ ad $\sqrt{m c}$: sed ex similitudine curvarum et arcuum est m c ad M C sicut l c ad L C, ergo velocitates in punctis C et c sunt ut $\sqrt{L C}$ ad $\sqrt{l c}$, ideoque tempora oscillationum integrarum in arcubus D C, d c erunt ut $\frac{L C}{\sqrt{L C}}$

ad $\frac{l c}{\sqrt{l c}}$, unde quadrata temporum erunt ut $\frac{L C^2}{L C}$ ad $\frac{l c^2}{l c}$ sive ut L C ad l c, hoc est ut longitudo pendulorum. Q. e. d.

^(l) * *Pondera erunt ut longitudo pendulorum, et universaliter quantitas materiæ pendulae est ut pondus et quadratum temporis directè et longitudo penduli inversè.* * Sint duo pendula A et B, quæ materiâ, pondere et oscillationum temporibus discrepent, sed æqualis sint longitudinis; ex Theoremate, erit quantitas materiæ pendulae in A ad quantitatem materiæ pendulae in B, ut pondus et quadratum temporis oscillationum penduli A conjunctim ad pondus et quadratum temporis oscillationum penduli B conjunctim; sit tertium pendulum C, cujus materia et pondus eadem sint cum materiâ et pondere penduli B, diversa verò sit utriusque longitudo, longitudo penduli C erit ad longitudinem penduli B (sive penduli A, perinde enim est ex hypothesi) ut quadratum temporis in pendulo C ad quadratum temporis in pendulo B, quod itaque æquale erit quadrato temporis in pendulo C, per longitudinem penduli multiplicato et per longitudinem penduli C diviso; unde quantitas materiæ in A erit ad quantitatem materiæ in B sive in C, ut pondus et quadratum temporis in A conjunctim ad pondus in B, sive in C, cum quadrato temporis in C et longitudine penduli A directè et longitudine penduli C inversè: unde liquet quantitatem materiæ in A esse ad quantitatem materiæ in C, ut pondus et quadratum temporis

Corol. 5. ^(m) Et universaliter, quantitas materiæ pendulæ est ut pondus et quadratum temporis directè, et longitudo penduli inversè.

Corol. 6. Sed et in medio non resistente quantitas materiæ pendulæ est ut pondus comparativum et quadratum temporis directè et longitudo penduli inversè. Nam pondus comparativum est vis motrix corporis in medio quovis gravi, ⁽ⁿ⁾ ut supra explicui; ideòque idem præstat in tali medio non resistente atque pondus absolutum in vacuo.

Corol. 7. ^(o) Et hinc liquet ratio tum comparandi corpora inter se, quoad quantitatem materiæ in singulis; tum comparandi pondera ejusdem corporis in diversis locis, ^(p) ad cognoscendam variationem gravitatis. Factis autem experimentis quam accuratissimis inveni semper quantitatem materiæ in corporibus singulis eorum ponderi proportionalem esse.

PROPOSITIO XXV. THEOREMA XX.

Corpora funependula quibus, in medio quovis, resistitur in ratione momentorum temporis, et corpora funependula quæ in ejusdem gravitatis specificæ medio non resistente moventur, oscillationes in cycloide eodem tempore peragunt, et arcuum partes proportionales simul describunt.

Sit A B cycloidis arcus, quem corpus D tempore quovis in medio non resistente oscillando describit. Bisecetur idem in C, ita ut C fit infimum ejus punctum; et erit vis acceleratrix quâ corpus urgetur in loco quovis

in pendulo A directè et ejus longitudo inversè ad pondus et quadratum temporis penduli C directè et ejus longitudinem inversè. Q. e. d. *universaliter.*

Unde si et tempora et quantitates materiæ eadem sunt, pondera sunt ut longitudes pendulorum directè.

^(m) * *Et universaliter.* Vide notam superiorem.

⁽ⁿ⁾ * *Ut supra explicui,* in Cor. 6. et 8. Prop. XX.

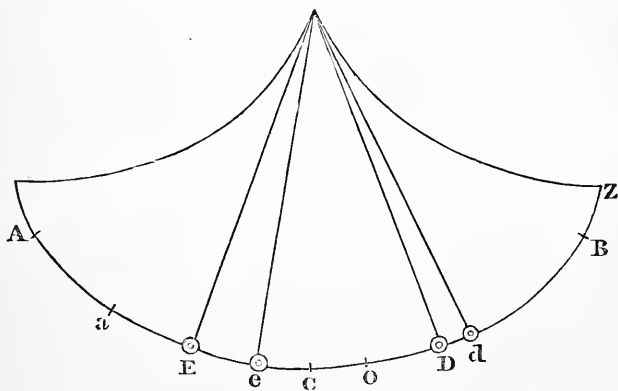
^(o) * *Et hinc liquet ratio,* &c. Nam ex datis pendulorum longitudinibus, oscillationum temporibus, et ponderibus corporum, datur ratio quantitatum materiæ in illis corporibus (per Cor. V.); et contra.

^(p) * *Ad cognoscendam variationem gravitatis.* Ubi enim ejusdem penduli oscillationes tardiores sunt, gravitatis actio, cæteris paribus, minor est, cum in eodem pendulo pondera sint reciproce ut quadrata temporum (per Cor. 3.). Sed de his plura ad Prop. XX. Lib. III. dicentur. Quanta autem in illis experimentis adhibenda sit diligentia, claris. D. de Mairan eâ quâ solet perspicui.

tate et elegantia exponit in Monumentis Acad. Reg. Scient. an. 1755.

179. Quia numeri oscillationum æqualibus temporibus a diversis pendulis absolvendarum sunt reciproce ut tempora quibus singulæ oscillationes fiunt (473. Lib. I.), numeri oscillationum æqualibus temporibus peractarum erunt (per Cor. 5. Prop. hujus) in compositâ ratione ex ratione subduplicata directa ponderum et subduplicatis rationibus inversis massarum et longitudinum pendulorum; sive, quoniam pondus est ut factum ex massâ in vim gravitatis acceleratricem, erunt prædicti oscillationum numeri in ratione subduplicata directa virium gravitatis acceleratricum et ratione subduplicatâ longitudinum pendulorum inversâ; ac proinde pendulorum inæqualium, sed eadem vi gravitatis agitatorum, numeri oscillationum eodem tempore absolvendarum sunt in reciproca subduplicatâ ratione longitudinum pendulorum, et numeri oscillationum in duobus pendulis æqualibus erunt in subduplicatâ ratione virium gravitatis. Hæc est regula quam ad comparandas corporum gravitates tradit Joh. Bernoulli in Actis Erudit. Lips. an. 1713.

D vel d vel E ^(q) ut longitudo arcus C D vel C d vel C E. Exponatur vis illa per eundem arcum; et cum resistantia sit ut momentum temporis, ideóque detur, exponatur eadem per datam arcus cycloidis partem C O, et sumatur arcus O d in ratione ad arcum C D quam habet arcus O B ad arcum C B: et vis quâ corpus in d urgetur in medio resistente, cum sit excessus vis C d supra resistantiam C O, exponetur per arcum O d, ideóque erit ad vim, quâ corpus D urgetur in medio non resistente in loco D, ut arcus O d ad arcum C D; et propterea etiam in loco B ut arcus



O B ad arcum C B. Proinde si corpora duo, D, d exeant de loco B, et his viribus urgeantur: cum vires sub initio sint ut arcus C B et O B; ^(r) erunt velocitates primæ et arcus primo descripti in eâdem ratione. Sunto arcus illi B D, et B d, arcus reliqui C D, O d erunt in eâdem ratione. Proinde vires, ipsis C D, O d proportionales manebunt in eâdem ratione ac sub initio, et propterea corpora pergent arcus in eâdem ratione simul describere. Igitur vires et velocitates et arcus reliqui C D, O d semper erunt ut arcus toti C B, O B, et propterea arcus illi reliqui ^(s) simul describentur. Quare corpora duo D, d simul pervenient ad loca C et O, alterum quidem in medio non resistente ad locum C, et alterum in medio resistente ad locum O. Cum autem velocitates in C et O sint ut arcus C B, O B; erunt arcus, quos corpora ulterius pergendo simul describunt, ^(t) in eâdem ratione. Sunto illi C E et O e. Vis quâ corpus

^(q) *Ut longitudo arcus, &c.* Per demonstrationem Prop. LII. et Cor. 2. Prop. LII. Lib. I.

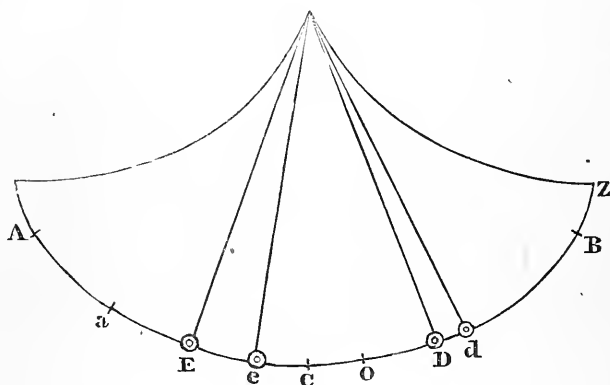
^(r) * *Erunt velocitates primæ, &c.* Nam, dato temporis momento, velocitates genitæ sunt ut vires (13. Lib. I.) et ut spatia descripta (per Cor. 4. Lem. X. Lib. I.)

^(s) * *Simul describentur.* Quia enim est sem-

per C B ad O B, ut C D ad O d; evanescente arcu O d, evanescet etiam arcus C D, seu punctum d cum O, et D cum C simul coincident.

^(t) * *In eâdem ratione.* Sunt enim velocitates, ut spatia dato temporis momento descripta, tam in medio resistente quam in medio non resistente (11.)

D in medio non resistente retardatur in E est ut C E, et vis quâ corpus d in medio resistente retardatur in e est ut summa vis C e et resistentiæ C O, id est ut O e; ideóque vires, quibus corpora retardantur, sunt ut arcubus C E, O e proportionales arcus C B, O B; proindeque velocitates, in datâ illâ ratione retardatæ, manent in eâdem illâ datâ ratione. Velocitates igitur et arcus iisdem descripti semper sunt ad invicem in datâ illâ ratione arcuum C B et O B; ^(u) et propterea si sumantur arcus totî A B, a B in eâdem ratione, corpora D, d simul describent hos arcus,



et in locis A et a motum omnem simul amittent. Isochronæ sunt igitur oscillationes totæ, et arcubus totis B A, B a proportionales sunt arcuum partes quælibet B D, B d vel B E, B e quæ simul describuntur. Q. e. d.

Corol. Igitur motus velocissimus in medio resistente non incidit in punctum infimum C, ^(x) sed reperitur in puncto illo O, quo arcus totus descriptus a B bisecatur. Et corpus subinde pergendo ad a, iisdem gradibus retardatur quibus antea accelerabatur in descensu suo a B ad O.

^(u) * Et propterea. Si sumatur arcus A C æqualis C B, et deinde arcus a B ad arcum A B in datâ ratione O B ad C B; corpora D et d simul describent hos arcus, et in locis A et a motum omnem simul amittent. Nam cum sit semper arcus C E ad O e ut C B ad O B, seu ut C A ad O a, ubi arcus C E æqualis evadet arcui C A, fiet quoque arcus O e æqualis arcui O a; et quia motus in medio non resistente extinguitur in A, ob C A = C B; in medio resistente extinguetur quoque in a, eo quod velocitates in locis E, e et A, a sint in datâ ratione.

^(x) * Sed reperitur in puncto illo O, quo, &c.

Nam ratio velocitatum in mediis resistente et non resistente est semper eadem in punctis correspondentibus ut in d et D, in O et C, in e et E; sed corporis in medio non resistente oscillantis velocitas maxima est in loco infimo C, et iisdem gradibus retardatur in ascensu, quibus antea accelerabatur in descensu; quare motus velocissimus in medio resistente reperitur in O, et iisdem deinde gradibus retardatur in ascensu, quibus ante accelerabatur in descensu.

PROPOSITIO XXVI. THEOREMA XXI.

Corporum funependulorum, quibus resistitur in ratione velocitatum, oscillationes in cycloide sunt isochronæ.

(γ) Nam si corpora duo, a centrīs suspensionum æqualiter distantia oscillando describant arcus inæquales, et velocitates in arcuum partibus correspondentibus sint ad invicem ut arcus toti; resistentiæ velocitatibus proportionales, erunt etiam ad invicem ut iidem arcus. Proinde si viribus motricibus a gravitate oriundis, quæ sint ut iidem arcus, auferantur vel addantur hæ resistentiæ, erunt differentiæ vel summæ ad invicem in eâdem arcuum ratione: cumque velocitatum incrementa vel decrementa sint ut hæ differentiæ vel summæ, velocitates semper erunt ut arcus toti: igitur velocitates, si sint in aliquo casu ut arcus toti, manebunt semper in eâdem ratione. Sed in principio motus, ut corpora incipiunt descendere et arcus illos describere, vires, cum sint arcubus proportionales, generabunt velocitates arcubus proportionales. Ergo velocitates semper erunt ut arcus toti describendi, et propterea arcus illi simul describentur. Q. e. d.

(γ) * Nam si corpora duo, exempli causâ B et D, a centro suspensionis æqualiter distantia, oscillando describant arcus inæquales B a, D e, et velocitates in arcuum partibus correspondentibus, seu in arcuum B a, D e quadrantibus, partibus tertiis, &c., sint ad invicem ut arcus toti B a, D e: resistentiæ velocitatibus proportionales, erunt etiam ad invicem ut iidem arcus. Proinde si viribus motricibus a gravitate oriundis (secundum tangentes cycloidis agentibus) quæ sint ut iidem arcus B a, D e, auferantur dum corpus descendit, vel addantur dum corpus ascendit, hæ resistentiæ; erunt differentiæ vel summæ ad invicem in eâdem arcuum ratione: cumque velocitatum incrementa vel decrementa, dato temporis momento genita, sint ut hæ differentiæ vel summæ (18), velocitates semper erunt ut arcus toti B a, D e: igitur velocitates, si sint in aliquo casu ut arcus toti, manebunt semper in eâdem ratione. Sed in principio motus, ubi corpora incipiunt e locis B, D descendere et arcus illos B a, D e describere, ideòque ubi resistentia nulla est, vires sunt arcubus illi propor-

tionales. Vires igitur, et velocitates, et arcus descripti, ac proinde et arcus describendi, manent semper in datâ ratione. Quare corpora duo simul perveniunt ad punctum infimum C; et eodem modo probatur quod arcus C a, C e simul describant.

Scholium. Newtonus in duabus Propositionibus præcedentibus ostendit cycloidem esse curvam isochronam, (quam alii tautochronam appellant,) non tantum in medio non resistente, sed etiam in medio quod in ratione momentorum temporis, et in medio quod ratione simplici velocitatis resistit; verum quænam sit curva illa tautochrone in hypothesi resistentiæ velocitatum quadrato proportionalis non indicat. Elegantissimas hujusce Problematis solutiones dedere celeberrimi mathematici Eulerus Tom. IV. Acad. Petrop. et Tom. II. Mechanicæ, necnon clariss. Bernoullius in Monumentis Acad. Reg. Scientiarum Paris. an. 1730. Novam viam quâ curvæ tautochrone in medio quolibet resistente possint inveniri aperuit D. Fontaine in iisdem Monumentis anni 1734.

PROPOSITIO XXVII. THEOREMA XXII.

Si corporibus funependulis resistitur in duplicatâ ratione velocitatum, differentiae inter tempora oscillationum in medio resistente ac tempora oscillationum in ejusdem gravitatis specificæ medio non resistente, erunt arcubus oscillando descriptis proportionales quam proximè.

(z) Nam pendulis æqualibus in medio resistente describantur arcus inæquales A, B; et resistentia corporis in arcu A, erit ad resistentiam

(z) * Nam pendulis æqualibus in medio resistente describantur arcus inæquales A et B, * ad pleniorē hujus demonstrationis evidentiam, fingatur illos arcus in totidem partes quam minimas inter se æquales dividi, singulæ in utroque arcu erunt totis arcubus proportionales dicanturque a et b, si medium aut non resisteret aut resisteret in ratione velocitatum, velocitates initio particularum quarumvis correspondentium a et b, forent ut arcus ipsi A et B; at in medio resistente in ratione duplicatâ velocitatis paulo diversa erit hæc velocitatum ratio, sed propter exiguam rationem resistentiæ ad velocitatem, negligi poterit hæc differentia, et supponi potest velocitates manere in ratione arcuum quam proximè; quod si ita supponatur resistentia corporis in quovis puncto arcus A erit ad resistentiam corporis in parte correspondente arcus B, sicut quadrata velocitatum in punctis illis correspondentibus eorum arcuum, id est ut quadrata ipsorum arcuum A A et B B quam proximè. Designetur vero velocitas initio arcus a per v A, et initio arcus b per v B. Designetur porro resistentia initio arcus a per m A A, et resistentia initio arcus b per m B B; in medio non resistente tempuscula quibus singulæ particulæ a et b describuntur erunt æqualia, (per Prop. II. Lib. I.) designetur verò per T; cum ergo in medio resistente propter velocitatem imminutam longius fiat tempus in inversâ ratione velocitatum ut x excessus ille tempusculi quo arcus a describitur in medio resistente supra tempusculum quo idem arcus in medio non resistente percurritur habebiturque ex hypothesibus v A — m A A : v A = T : T + x.

Ut inveniatur ratio hujus excessus x ad excessum tempusculi quo arcus describitur in medio resistente secundum legem duplicatam velocitatis, supra tempusculum T, quo idem arcus in medio non resistente percurritur; supponatur arcum B in tali medio describi ut resistentia in punctis a arcus A, sit ad resistentiam in punctis correspondentibus b arcus B, sicut A est ad B, ideoque sicut velocitates initio arcuum illorum, sive cum resistentia in a sit m A A resistentia in b fingatur esse m A B, cum ergo resistentiæ sint in ipsâ ratione velocitatum, velocitates demptis resistentiis manebunt in eadem ratione, in ratione nempe arcuum describendorum a et b,

qui ergo æqualibus temporibus describuntur, sed tempus quo describitur arculus a est T + x ergo si resistentia in arcu B, sive b sit m A B ideoque velocitas sit v B — m A B tempus quo describetur arcus b erit etiam T + x.

Cum autem reverâ resistentia initio arcus b non sit m A B sed m B B, si y sit excessus tempusculi in quo b describitur in medio resistente juxta quadrata velocitatum supra tempus quo idem arcus in medio non resistente percurritur, erit tempus T + x ad tempus T + y reciproce sicut velocitas v B — m A B quæ supponebatur, ad velocitatem v B — m B B, eritque ideò v B — m B B ad v B — m A B = T + x, ad T + y, cum ergo subtractio quantitatum m B B, m A B ex velocitate v B producat excessum x et y supra tempus T, oportet ut illæ quantitates m B B, m A B, sint reciproce ut x et y, sed m A B et m B B sunt ut A ad B, ergo A est ad B, sicut x est ad y, ideoque excessus x temporis arcus A in medio resistente in duplicatâ ratione velocitatis supra tempus in eodem arcu A in medio non resistente, est ad excessum y temporis arcus B in eodem medio supra tempus in eodem arcu B in medio non resistente, ut arcus A ad arcum B, cumque idem ratiocinium in omnibus arcubus quaminimis a et b institui possit, summæ omnium excessuum tempusculorum in arcu A, erit ad summam omnium excessuum tempusculorum in arcu B ut A ad B. Q. e. d.

* Quod excessus x et y tempusculorum quibus describuntur arcus a et b, in medio resistente juxta rationem duplicatam velocitatum, supra tempus quo describerentur in medio non resistente sint ut A et B, ex superiori demonstratione alio modo erui potest. Nam manentibus quæ illic posueramus est.

v A — m A A : v A = T : T + x est etiam simili ratione v B — m B B : v B = T : T + y et dividendo in utraque proportionē fit

$$v A — m A A : m A A = T : x$$

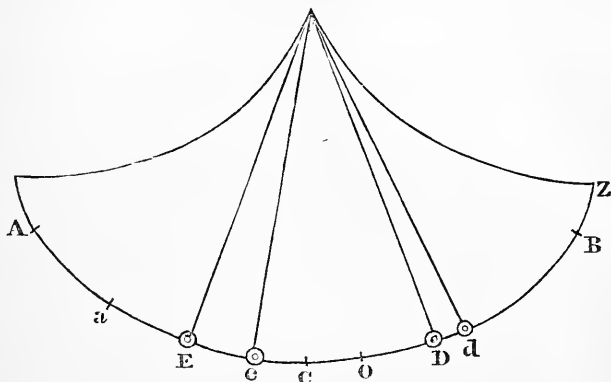
$$v B — m B B : m B B = T : y.$$

Sed ob exiguitatem resistentiæ velocitatis respectu assumi potest v A — m A A pro v A, et v B — m B B pro v B, unde est quam proximè

$$v A : m A A = T : x$$

$$v B : m B B = T : y \text{ et reducendo pri}$$

corporis in parte correspondente arcus B, in duplicatâ ratione velocitatum, id est, ut A A ad B B, quam proximè. Si resistentia in arcu B esset ad resistentiam in arcu A ut A B ad A A, tempora in arcubus A et B forent æqualia, per Propositionem superiorem. Ideoque resistentia A A in arcu A, vel A B in arcu B, efficit excessum temporis in arcu A supra



tempus in medio non resistente; et resistentia B B efficit excessum temporis in arcu B supra tempus in medio non resistente. Sunt autem excessus illi ut vires efficientes A B et B B quam proximè, id est, ut arcus A et B. Q. e. d.

Corol. 1. Hinc ex oscillationum temporibus, in medio resistente, in arcubus inæqualibus factarum, cognosci possunt tempora oscillationum in ejusdem gravitatis specificæ medio non resistente. Nam differentia temporum erit ad excessum temporis in arcu minore supra tempus in medio non resistente, ut ^(b) differentia arcuum ad arcum minorem.

Corol. 2. ^(c) Oscillationes breviores sunt magis isochronæ, et brevis-

ores rationes utriusque proportionis ad minores terminos.

$$v : m A = T : x$$

$$v : m B = T : y \text{ et vicissim}$$

$$v : T = m A : x$$

$$v : T = m B : y, \text{ unde est}$$

$$m A : x = m B : y, \text{ ideò vicissim}$$

$$m A : m B = x : y, \text{ sed } m A : m B =$$

A : B, ideòque A : B = x : y. Ideòque excessus temporum in medio resistente in duplicatâ ratione velocitatum, supra tempora in medio non resistente in arcubus inæqualibus sunt ut illi arcus.

^(b) * Differentia temporum erit ad excessum temporis in arcu minore supra tempus in medio non resistente ut differentia arcuum ad arcum minorem †.

* Tempus per arcum A est $T + x$, tempus per arcum minorem B, est $T + y$, ergo differentia temporum $T + x - T - y = x - y$, et excessus temporis in minore arcu supra tempus in medio non resistente est y juxta denominationes notæ superioris, sed ex Theoremate est $x : y = A : B$ ergo dividendo $x - y : y = A - B : B$, hoc est differentia temporum est ad excessum, &c.

^(c) * Oscillationes breviores sunt magis isochronæ et brevissimæ iisdem temporibus peraguntur ac in medio non resistente quam proximè. * Brevissimæ iisdem temporibus peraguntur ac in medio non resistente quàm proximè; sit A arcus major, B minimus, inventum est (in nota^a) quod erat $v A - m A A : v A = T : T + x$, et etiam quod erat $v B - m B B : v B - m A B$

simæ iisdem temporibus peraguntur ac in medio non resistente, quàm proximè. Earum verò quæ in majoribus arcubus fiunt, tempora sunt paulò majora, ^(d) propterea quòd resistentia in descensu corporis quâ tempus producit, ^(e) major sit pro ratione longitudinis in descensu descriptæ, quàm resistentia in ascensu subsequente quâ tempus contrahitur. Sed et tempus oscillationum tam brevium quàm longarum nonnihil produci videtur per motum medii. ^(f) Nam corporibus tardescentibus paulò minus resistitur, pro ratione velocitatis, et corporibus acceleratis paulò magis quàm iis quæ uniformiter progrediuntur: idque quia medium, eo quem a corporibus accepit motu, in eandem plagam pergendo, in priore casu magis agitur, in posteriore minus; ac proinde magis vel minus cum corporibus motis conspirat. Pendulis igitur in descensu magis resistit, in ascensu minus quàm pro ratione velocitatis, et ex utrâque causâ tempus producit.

PROPOSITIO XXVIII. THEOREMA XXIII.

Si corpori funependulo in cycloide oscillanti resistitur in ratione momentorum temporis, erit ejus resistentia ad vim gravitatis ut excessus arcûs descensu toto descripti supra arcum ascensu subsequente descriptum, ad penduli longitudinem duplicatam.

Designet B C arcum descensu descriptum, C a arcum ascensu descriptum; et A a differentiam arcuum: et stantibus quæ in Propositione XXV.

= $T + x : T + y$, unde per compositionem rationum invenitur $v^2 AB - m v A AB - m v AB B + m^2 A AB B$ (sive $v^2 AB - m v A^2 B \times 1 - \frac{m B}{v}$) ad $v^2 AB - m v A^2 B = T$:

$T + y$, itaque in primo termino neglecto $-\frac{m B}{v}$ (quod infinitè parvum supponitur ob exiguitatem arcus B ut et quantitatis m respectu v) fiet $v^2 AB - m v A AB : v^2 AB - m v A AB = T : T + y$; est ergo $T = T + y$, sive tempus in medio non resistente idem ac in medio resistente quàm proximè.

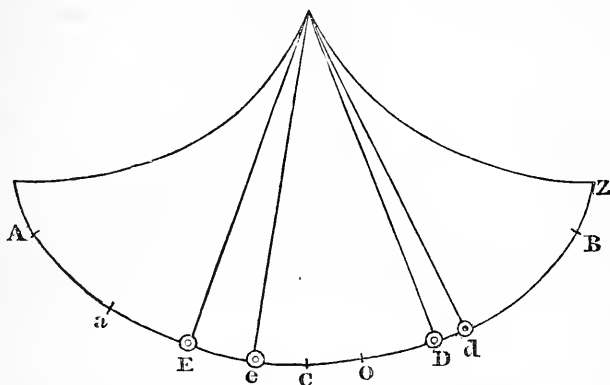
Sed oscillationes in medio non resistente sunt isochronæ, hinc ergo oscillationes breviores in medio resistente ad has quàm proxime accedentes cæteris sunt magis isochronæ. Q. e. d.

^(d) * Propterea quòd resistentia in descensu, &c. Quo major est resistentia, eò minor fit, cæteris paribus, corporis descendens velocitas, et ideo, manente descensûs longitudine, tempus per resistentiam producit; et contra, quò major est resistentia, eò citius extinguitur velocitas corpori insita in ascensu.

^(e) * Major sit pro ratione longitudinis. Longitudo in descensu descripta semper major est quàm longitudo descripta in ascensu subsequente, si medium resistit; cùm longitudines illæ in medio non resistente sint æquales (92. Lib. I.).

^(f) * Nam corporibus tardescentibus, seu quorum velocitas continuo decrescit, ut fit in corporum ascensu, paulo minus resistitur, pro ratione velocitatis; et corporibus acceleratis, seu descendens, paulo magis resistitur quàm iis quæ uniformiter progrediuntur. In priore enim casu, medium eo quem a corporibus accepit motu, quemque aliquandiu ob inertiam materiæ conservat, in eandem plagam pergit cum corporibus, et ob validiorem ab initio motûs continue decrescentis acceptam impressionem magis agitur, ac proinde magis conspirat cum corporibus motis, minoremque iis resistentiam obijcit. At in secundo casu cùm motus perpetuo acceleretur, medium ex prioribus ictibus non satis velocem motum accepit, et ideo ejus celeritas novis impulsibus continuo augenda est ut possit cum corporibus motis conspirare; hincque corporibus acceleratis resistit magis quàm uniformiter progredientibus. Pendulis igitur in descensu magis

constructa et demonstrata sunt, erit vis, quâ corpus oscillans urgetur in loco quovis D, ad vim resistentiæ ut arcus C D ad arcum C O, ^(e) qui semissis est differentiæ illius A a. Ideoque vis, quâ corpus oscillans



urgetur in cycloidis principio seu puncto altissimo, ^(h) id est, vis gravitatis, erit ad resistentiam ut arcus cycloidis inter punctum illud supremum et punctum infimum C ad arcum C O; id est (si arcus duplicentur) ut cycloidis totius arcus, ⁽ⁱ⁾ seu dupla penduli longitudo, ad arcum A a. Q. e. d.

PROPOSITIO XXIX. PROBLEMA VI.

Posito quod corpori in cycloide oscillanti resistitur in duplicatâ ratione velocitatis: invenire resistentiam in locis singulis.

Sit B a arcus oscillatione integrâ descriptus, sitque C infimum cycloidis punctum, et C Z semissis arcus cycloidis totius, longitudini penduli æqualis; et quærat resistentia corporis in loco quovis D. Secetur

resistit medium, in ascensu minus quàm pro ratione velocitatis, et ex utrâque causâ tempus producit. Nam quò major est resistentia in descensu, et minor in ascensu, eo magis producit tempus, ut supra dictum est.

^(e) * Qui semissis est differentiæ illius A a. Nam (per Hyp.) arcus C A æqualis est arcui C B, et (per Cor. Prop. XXV.) arcus O a æqualis est arcui O B; quare C A — O a, seu

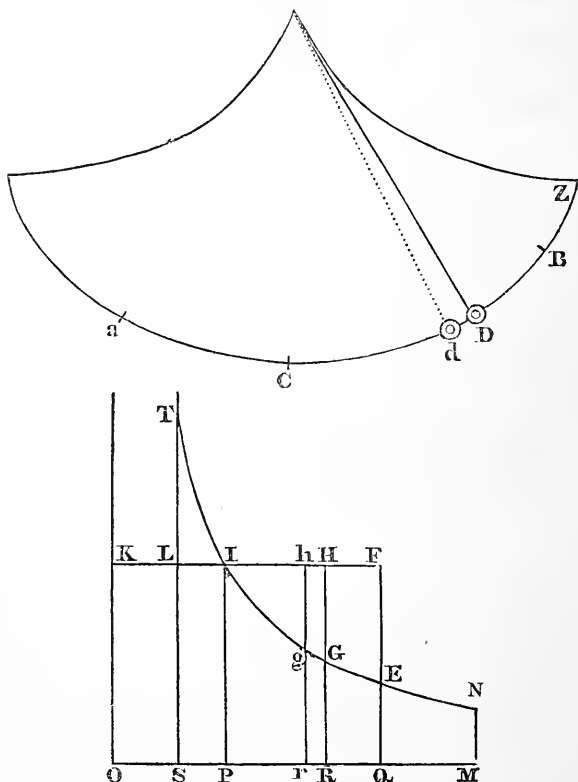
A a — C O = C B — O B = C O, et hinc A a = 2 C O, ac C O = $\frac{1}{2}$ A a.

^(h) * Id est, vis gravitatis. In cycloidis principio sive puncto altissimo tangens cycloidis est in directione gravitatis, et ideo vis in cycloide æqualis est vi gravitatis in illo puncto, ut patet ex Cor. Prop. LI. Lib. I.

⁽ⁱ⁾ * Seu dupla penduli longitudo (462. Lib. I.).

recta infinita OQ in punctis O, S, P, Q , eâ lege, ut (si erigantur perpendiculara OK, ST, PI, QE , centroque O et asymptotis OK, OQ describatur hyperbola $TIGE$ secans perpendiculara ST, PI, QE in

T, I et E , et per punctum I agatur KF parallela asymptoto OQ occurrens asymptoto OK in K , et perpendicularis ST et QE in L et F) fuerit area hyperbolica $PIEQ$ ad aream hyperbolicam $PITS$ ut arcus BC descensu corporis descriptus ad arcum C a ascensu descriptum, et area IEF ad aream ILT ut OQ ad OS . Dein perpendiculo MN abscindatur area hyperbolica $PINM$ quæ sit ad aream hyperbolicam $PIEQ$ ut arcus CZ ad arcum BC descensu descrip-



tum. Et si perpendiculo RG abscindatur area hyperbolica $PIGR$, quæ sit ad aream $PIEQ$ ut arcus quilibet CD ad arcum BC descensu toto descriptum; erit resistentia in loco D ad vim gravitatis, ut area $\frac{OR}{OQ} \times IEF - IGH$ ad aream $PINM$.

Nam cum vires a gravitate oriundæ quibus corpus in locis Z, B, D , a urgetur, ^(k) sint ut arcus CZ, CB, CD, Ca , ^(l) et arcus illi sint ut areæ $PINM, PIEQ, PIGR, PITS$; exponantur tum arcus tum vires per has areas respectivè. Sit insuper Dd spatium quàm minimum a corpore descendente descriptum, et exponatur idem per aream quam

^(k) * Sint ut arcus, &c. per demonstrata in Prop. LI. et Cor. 2. Prop. LII. Lib. I.

^(l) * Et arcus illi sint ut areæ, per constructionem.

minimam $R G g r$ parallelis $R G$, $r g$ comprehensam; et producat $r g$ ad h , ut sint $G H h g$, et $R G g r$, contemporanea ^(m) arearum $I G H$, $P I G R$ decrementa. ⁽ⁿ⁾ Et areæ $\frac{O R}{O Q} I E F - I G H$ incrementum

$G H h g - \frac{R r}{O Q} I E F$, seu $R r \times H G - \frac{R r}{O Q} I E F$, erit ad areæ

$P I G R$ decrementum $R G g r$, seu $R r \times R G$, ut $H G - \frac{I E F}{O Q}$

ad $R G$; ideóque ut $O R \times H G - \frac{O R}{O Q} I E F$ ad $O R \times G R$

^(o) seu $O P \times P I$, hoc est ^(p) (ob æqualia $O R \times H G$, $O R \times H R - O R \times G R$, $O R H K - O P I K$, $P I H R$ et $P I G R + I G H$)

ut $P I G R + I G H - \frac{O R}{O Q} I E F$ ad $O P I K$. Igitur si area

$\frac{O R}{O Q} I E F - I G H$ dicatur Y , atque areæ $P I G R$ decrementum

$R G g r$ detur, ^(q) erit incrementum areæ Y ut $P I G R - Y$.

Quod si V designet vim a gravitate oriundam, arcui describendo $C D$ proportionalem, quâ corpus urgetur in D , et R pro resistentia ponatur; erit $V - R$ vis tota quâ corpus urgetur in D . ^(r) Est itaque incrementum velocitatis ut $V - R$ et particula illa temporis in quâ factum est conjunctim: ^(s) sed et velocitas ipsa est ut incrementum contemporaneum spatii descripti directè et particula eadem temporis inversè. Unde, cùm resistentia per hypothesin sit ut quadratum velocitatis, incrementum resistentiæ ^(t) (per Lem. II.) erit ut velocitas et incrementum velocitatis conjunctim, ^(u) id est, ut momentum spatii et $V - R$ conjunctim; atque

^(m) * *Arearum $I G H$, $P I G R$ decrementa.* Cum enim corpus e loco D descendit in arcu $D C$, decrescit area $P I G R$ huic arcui proportionalis, et cum eâ decrescit quoque area $I G H$.

⁽ⁿ⁾ * *Et areæ, &c.* Nam, ob datas $O Q$, et $I E F$, decrementum areæ $\frac{O R}{O Q} I E F - I G H$, sumptis duorum terminorum fluxionibus, invenitur æquale $\frac{R r}{O Q} I E F - G H h g$; et ideò, mutatis signis, ejusdem areæ incrementum est $G H h g - \frac{R r}{O Q} I E F$, seu, &c.

^(o) * *Seu $O P \times P I$.* Per Theor. IV. de hyperbolâ.

^(p) * *Ob æqualia, &c.* Cùm sit $H G = H R - G R$, erit $O R \times H G = O R \times H R - O R \times G R$; sed $O R \times H R$ æquale est rectangulo $O R H K$, et (per Theor. IV. de Hyp.) $O R \times G R$ æquale est rectangulo $O P I K$. Quare $O R \times H G = O R H K$

$- O P I K = P I H R = P I G R + I G H$.

^(q) * *Erit incrementum areæ Y ut $P I G R - Y$.* Quoniam enim (Hyp.) est $\frac{O R}{O Q} I E F$

$- I G H = Y$, et (ex demonstratis) incrementum areæ $\frac{O R}{O Q} I E F - I G H$ est ad decre-

mentum (ex Hyp.) datum $R G g r$, ut $P I G R + I G H - \frac{O R}{O Q} I E F$, seu $P I G R - Y$,

ad datum rectangulum $O P I K$; manifestum est quod incrementum areæ Y sit ad $P I G R - Y$ in datâ ratione, nimirum in ratione decrementi dati $R G g r$ ad rectangulum datum $O P I K$.

^(r) * *Est itaque incrementum velocitatis, ut, &c. (18.).*

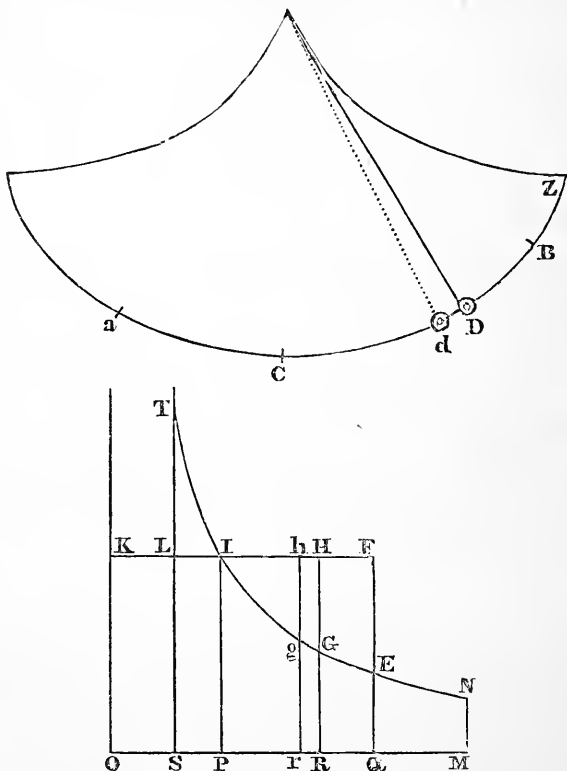
^(s) * *Sed et velocitas ipsa est, &c. (11.).*

^(t) * *Per Lem. II. Casu 3. idque statim apparet: nam si velocitas dicatur v , cum sit R ut $v v$, erit $d R$ ut $2 v d v$, seu ut $v d v$.*

^(u) * *Id est, ut momentum spatii, &c. Quia*

ideò, si momentum spatii detur, ut $V - R$; id est, si pro vi V scribatur ejus exponens $P I G R$, et resistentia R exponatur per aliam aliquam aream Z , ut $P I G R - Z$.

Igitur areâ $P I G R$ per datorum momentum subductionem uniformiter decrescente, crescunt area Y in ratione $P I G R - Y$, et area Z ratione $P I G R - Z$. Et propterea si areæ Y et Z simul incipiant et sub initio æquales sint, ^(x) hæ peradditionem æqualium momentorum pergent esse æquales, et æqualibus itidem momentis subinde decrescentes simul evanescent. Et vicissim, si simul incipiunt et simul evanescent, æqualia habebunt momenta et semper erunt æqua-



les: id ideò quia si resistentia Z augeatur, velocitas unâ cum arcu illo $C a$, qui in ascensu corporis describitur, diminuetur; et puncto in quo motus omnis unâ cum resistentiâ cessat propius accedente ad punctum C , ^(y) resistentia citius evanescet quàm area Y . Et contrarium eveniet ubi resistentia diminuitur.

(ex dem.) velocitatis incrementum est ut $V - R$ et momentum temporis conjunctim, velocitas autem ipsa ut incrementum spatii directe et momentum temporis inversè; erit ex æquo, velocitas in suum incrementum ducta, ut $V - R$ et incrementum spatii conjunctim, in quâ ratione est etiam incrementum resistentiæ (ex dem.).

^(x) * Hæ per additionem æqualium momentorum pergent esse æquales, &c. Cum enim semper crescat area Y in ratione $P I G R - Y$, et area Z in ratione $P I G R - Z$; si areæ illæ

Y et Z simul incipiant et initio æquales sint, erunt etiam areæ $P I G R - Y$ et $P I G R - Z$ sub initio æquales; et, ob datam incrementorum areæ Y et areæ Z ad $P I G R - Y$ et $P I G R - Z$ rationem, incrementa illa sicut et $P I G R - Y$ ac $P I G R - Z$ manebunt semper æqualia, uti sub initio. Quare etiam areæ Y et Z æqualibus itidem momentis subinde decrescent et simul evanescent.

^(y) * Resistentia citius evanescet quàm area Y , et contrarium, &c. Nam si area Z semper æqua-

Jam verò area Z incipit desinitque ubi resistentia nulla est, hoc est, in principio motûs ubi arcus CD arcui CB æquatur et recta RG incidit in rectam QE , et in fine motus ubi arcus CD arcui Ca æquatur et RG ^(z) incidit in rectam ST . Et area Y seu $\frac{OR}{OQ} IEF - IGH$ incipit desinitque ubi nulla est, ideóque ubi $\frac{OR}{OQ} IEF$ et IGH æqualia sunt: ^(a) hoc est (per constructionem) ubi recta RG incidit successivè in rectas QE et ST . Proindeque areae illæ simul incipiunt et simul evanescent, et propterea semper sunt æquales. Igitur area $\frac{OR}{OQ} IEF - IGH$ æqualis est areae Z , per quam resistentia exponitur, et propterea est ad aream $PINM$ per quam gravitas exponitur, ut resistentia ad gravitatem. Q. e. d.

Corol. 1. Est igitur resistentia in loco infimo C ad vim gravitatis, ut area $\frac{OP}{OQ} IEF$ ^(b) ad aream $PINM$.

Corol. 2. Fit autem maxima, ubi area $PIHR$ est ad aream IEF ut OR ad OQ . Eo enim in casu momentum ejus (nimirum $PIGR - Y$) ^(c) evadit nullum.

Corol. 3. Hinc etiam innotescit velocitas in locis singulis: quippe

lis sit areae Y , simul incipient simulque evanescent. Incipit autem area Y (ut infra ostendetur) ubi recta RG incidit in rectam QE , et desinit ubi recta RG incidit in rectam ST , suntque Q et S puncta fixa per arcum CB , Ca longitudines determinata (per constr.). Quare si resistentia Z augeatur vel minuat ita ut cesset in puncto arcûs Ca infra vel supra a positum, citius vel tardius evanescent area Z quàm area Y , quia hæc non desinit nisi ubi corpus pervenit ad locum a . Resistentia igitur, seu area Z nec major nec minor esse potest quàm area Y , si simul incipiant et simul evanescant.

^(z) * Incidit in rectam ST . Hæc patent per constructionem, quâ areae $PIEQ$, $PIGR$, $PITS$ factæ sunt arcubus CB , CD , Ca proportionales.

^(a) * Hoc est (per constructionem) ubi, &c.

Ubi enim Y evanescit, fit quoque $\frac{OR}{OQ} IEF - IGH = 0$, et ideò $\frac{OR}{OQ} IEF = IGH$;

hoc autem contingit ubi fit $IEF : IGH = OQ : OR$, quod evenit primo ubi recta RG incidit in rectam QE et incipit area Y . Tunc enim $IEF = IGH$ et $OQ = OR$ ideóque $IEF : IGH = OQ : OR$. Est enim $\frac{OR}{OQ} IEF = IGH$, quando fit $OR = OS$

et $IGH = ILT$: nam cùm (per constr.) sit area IEF ad aream ILT ut OQ ad OS , si ponatur $OR = OS$, fiet $ILT = IGH$, eritque area IEF ad aream IGH ut OQ ad OR , et hinc $\frac{OR}{OQ} IEF = IGH$.

Est autem $OR = OS$, ubi recta RG incidit in rectam ST , et area Y desinit ibidem.

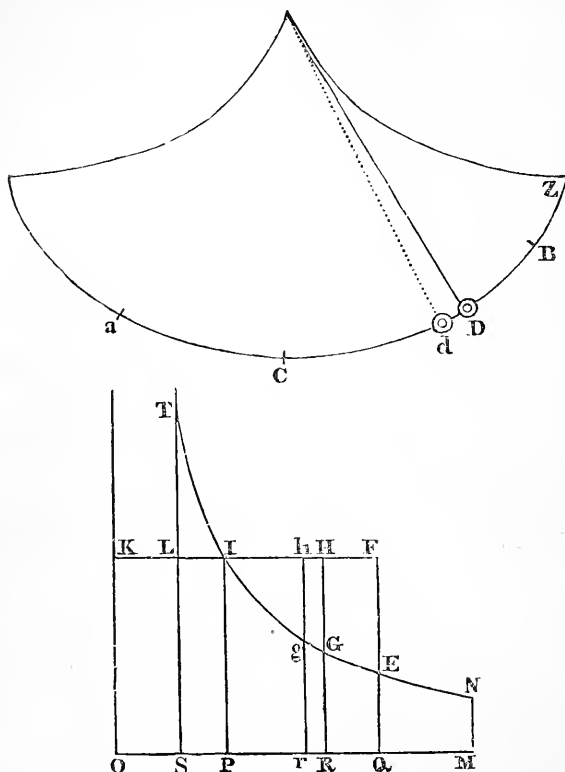
^(b) * Ad aream $PINM$. Nam evanescente arcu CD , evanescit ipsi proportionalis area $PIGR$, et hinc evanescit etiam area IGH , fitque $OR = OP$, atque proinde $\frac{OR}{OQ} IEF$

$= IGH = \frac{OP}{OQ} IEF$.

^(c) * Evadit nullum. Momentum areae Y est ut $PIGR - Y$ (ex dem.), id est, ut $PIGR + IGH - \frac{OR}{OQ} IEF = PIHR$

$= \frac{OR}{OQ} IEF$. Quâ propter momentum areae Y nullum fit; et ideò resistentia (cui area Y proportionalis est) maxima evadit (48), ubi est $PIHR - \frac{OR}{OQ} IEF = 0$, seu ubi $PIHR = \frac{OR}{OQ} IEF$, ac proinde ubi area $PIHR$ est ad aream IEF ut OR ad OQ .

quæ est in subduplicatâ ratione resistantiæ, et ipso motûs initio æquatur velocitati corporis in eâdem cycloide (d) sine omni resistantiâ oscillantis.



(d) * *Sine omni resistantiâ oscillantis.* Quoniam velocitatis quadratum in loco quovis D est ut resistantia, seu ut area Y in medio resistente; et ut $CB^2 - CD^2$ (per Prop. LII. Lib. I.) seu ut $\frac{PIEQ^2 - PIGR^2}{2}$ in medio non resistente; si velocitates illæ dicantur v, V, sintque C et E quantitates constantes, erit $v = C \times Y$, et $VV = E \times \frac{PIEQ^2 - PIGR^2}{2} - E \times \frac{PIGR^2}{2}$. Et quia initio motûs, dum corpus est in B, velocitates illæ æquales sunt, ob resistantiam respectu vis a gravitate oriundæ evanescentem; erit initio motûs $C \times Y = E \times \frac{PIEQ^2 - PIGR^2}{2} - E \times \frac{PIGR^2}{2}$; sed initio motûs est Y, seu $\frac{OR}{OQ} IEF - IGH = \frac{OR}{OQ} IEF - IEF + QR \times FE = \frac{OR \times IEF - OQ \times IEF + OQ \times QR \times FE}{OQ} = \frac{QR}{OQ} \times \frac{OQ \times FE - IEF}{OQ}$, coincidente

rimurum GH cum EF, et QR seu HF evanescente. Et similiter initio motus est $\frac{PIEQ^2 - PIGR^2}{2} = \frac{PIEQ + PIGR}{2} \times \frac{PIEQ - PIGR}{2} = \frac{PIEQ - QR \times QE}{2} \times \frac{QR \times QE}{2} = \frac{PIEQ \times QR \times QE}{2}$, neglecto termino evanescente $QR^2 \times QE^2$.

Quare erit initio motus $\frac{C \times QR}{OQ} \times \frac{OQ \times FE - IEF}{OQ} = \frac{E \times QR \times QE \times 2PIEQ}{2PIEQ}$, et ideò C: E = $2PIEQ$ $\times QE$: $\frac{OQ \times FE - IEF}{OQ}$; unde, cum sit semper $v v : VV = C \times Y : E \times \frac{PIEQ^2 - PIGR^2}{2} - E \times \frac{PIGR^2}{2}$, erit quoque $v v : VV = 2PIEQ \times QE \times \left(\frac{OR}{OQ} IEF - IGH \right) : \frac{OQ \times FE - IEF}{OQ} \times \frac{PIEQ^2 - PIGR^2}{2}$.

Innotescet igitur velocitas in medio resistente per inventam ipsius rationem ad velocitatem in medio non resistente in singulis locis.

(e) Cæterum ob difficilem calculum quo resistentia et velocitas per hanc Propositionem inveniendæ sunt, visum est Propositionem sequentem subjungere.

PROPOSITIO XXX. THEOREMA XXIV.

Si recta a B æqualis sit cycloidis arcui quem corpus oscillando describit, et ad singula ejus puncta D erigantur perpendiculara D K, quæ sint ad longitudinem penduli ut resistentia corporis in arcus punctis correspondentibus ad vim gravitatis: dico quod differentia inter arcum descensu toto descriptum et arcum ascensu toto subsequente descriptum ducta in arcum eorundem semisummam, æqualis erit area B K a perpendicularis omnibus D K occupata.

Exponatur enim tum cycloidis arcus, oscillatiæ integræ descriptus, per rectam illam sibi æqualem a B, tum arcus qui describeretur in vacuo per longitudinem A B. Bisecetur A B in C, (f) et punctum C repræsentabit

(e) * Cæterum ob difficilem calculum, &c. Sit O P = a, P I = F Q = b, O S = x, et ideò

S T = $\frac{b a}{x}$, S P = L I = a - x, et L T =

$\frac{b a}{x} - b$. Deinde O Q = z, et hinc Q E =

$\frac{b a}{z}$, P Q = F I = z - a, et F E = $b - \frac{b a}{z}$.

Et erit area P I E Q elementum = $\frac{b a d z}{z}$,

area P I T S elementum = $-\frac{b a d x}{x}$; et inde

area P I E Q = b a L. $\frac{z}{z} + Q$ const.; et quia

area illa evanescit ubi est P Q = z - a = o,

seu ubi z = a, invenitur constans Q = -b a L. a,

atque adeò area P I E Q = b a L. $\frac{z}{z} - b a L. a$

= b a L. $\frac{a}{x}$. Simili modo reperitur area P I T S

= b a L. $\frac{a}{x}$. Sit jam arcus B C ad arcum

C a, ut m ad 1; et erit (per constr.) m :

1 = b a L. $\frac{z}{a}$: b a L. $\frac{a}{x}$ = L. $\frac{z}{a}$: L. $\frac{a}{x}$, ac

proinde L. $\frac{z}{a}$ = m L. $\frac{a}{x}$ = L. $\frac{a^m}{x^m}$, atque $\frac{z}{a}$

= $\frac{a^m}{x^m}$, et z = $\frac{a^{m+1}}{x^m}$.

Porro ex superioribus denominationibus invenitur area I E F elementum = b d z - $\frac{b a d z}{z}$,

et inde area ipsa I E F = b z - b a L. $\frac{z}{z} + Q$

const. quæ cum sit o ubi F I = z - a evanescit fitque z = a, est Q = -b a + b a L. a,

ideòque I E F = b a L. $\frac{a}{z} + b z - b a$; et

similiter habetur area I L T = b a L. $\frac{a}{x} +$

b x - b a. Sed (per constr.) area I E F est

ad aream I L T ut O Q ad O S, seu ut z ad x :

quare z : x = b a L. $\frac{a}{z} + b z - b a$: b a L. $\frac{a}{x}$

+ b x - b a, et dividendo per b, ac loco z scribendo ipsius valorem $\frac{a^{m+1}}{x^m}$, fit a^{m+1} : x^{m+1}

= a L. $\frac{x^m}{a^m} + \frac{a^{m+1}}{x^m} - a$: a L. $\frac{a}{x} + x - a$;

unde habetur a^{m+2} L. $\frac{a}{x} + a^{m+1} x - a^{m+2}$

= a x^{m+1} L. $\frac{x^m}{a^m} + a^{m+1} x - a x^{m+1}$;

et inde eruitur m x^{m+1} L. x - m x^{m+1} L. a +

a^{m+1} L. x - x^{m+1} = a^{m+1} L. a - a^{m+1}.

Si itaque ex hac æquatione per serierum regressum, vel quâcumque alia methodo, determinetur valor x per arbitriariam lineam a, et deinde per æquationem z = $\frac{a^{m+1}}{x^m}$ inveniatu valor ipsius

z; Newtoniana constructio ad calculum logarithmorum revocabitur.

Scholion. Hermannus Prop. LXXIII. et LXXIV. Lib. II. Phoronomiæ geminam constructionem dedit, quâ corporis in curvâ qualibet oscillantis resistentia velocitatis quadrato proportionalis definitur, et Newtonianam pro cycloide constructionem ope logarithmicæ simpliciorum reddidit. Difficile autem non est (44) hanc Newtoni constructionem revocare ad logarithmicam per punctum N et asymptotæ K O ad partes O productâ describendam.

(f) * Et punctum C repræsentabit infimum cycloidis punctum. Nam cycloidis punctum in-

vim generantem CD . Sed et ⁽¹⁾ ob similia triangula Fmf , Fgh , FDC , est fm ad Fm seu Dd ut CD ad DF : et ex æquo Fg ad Dd ut DK ad DF . Item Fh ad Fg ut DF ad CF ; et ex æquo perturbatè ^(m) Fh seu MN ad Dd ut DK ad CF seu CM ; ⁽ⁿ⁾ ideóque summa omnium $MN \times CM$ æqualis erit summæ omnium $Dd \times DK$. Ad punctum mobile M erigi semper intelligatur ordinata rectangula æqualis indeterminatæ CM , quæ motu continuo ducatur in totam longitudinem Aa ; et trapezium ex illo motu descriptum sive huic æquale rectangulum $Aa \times \frac{1}{2} aB$ ^(o) æquabitur summæ omnium $MN \times CM$, ideóque summæ omnium $Dd \times DK$, id est, areæ $BKVTA$. Q. e. d.

Corol. Hinc ex lege resistentiæ et arcuum Ca , CB differentia Aa colligi potest proportio resistentiæ ad gravitatem quam proximè.

Nam si uniformis sit resistentia DK , figura $BKTA$ a rectangulum erit sub Ba et DK ; et inde rectangulum sub $\frac{1}{2} Ba$ et Aa erit æquale rectangulo sub Ba et DK , et DK æqualis erit $\frac{1}{2} Aa$. Quare cùm DK sit exponens resistentiæ, et longitudo penduli exponens gravitatis, erit resistentia ad gravitatem ut $\frac{1}{2} Aa$ ad longitudinem penduli; omninò ut in Prop. XXVIII. demonstratum est.

Si resistentia sit ut velocitas, figura $BKTA$ a ellipsis erit quàm proximè. Nam si corpus, in medio non resistente, oscillatione integrâ describeret longitudinem BA , velocitas in loco quovis D foret ut circuli diametro AB descripti ordinatim applicata DE . Proinde cùm Ba in medio re-

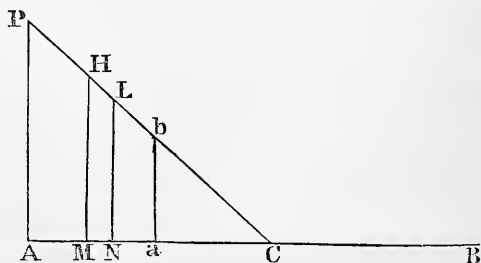
⁽¹⁾ * Ob similia triangula, &c. Sunt enim anguli ad m , h , et D recti, angulus CFD duobus triangulis FDC , Fhg communis, et angulus fFm æqualis angulo CFD , quia si ex angulis rectis mFD , fFC subducatur communis angulus mFC , remanebunt anguli æquales fFm , CFD . Tria igitur triangula Fmf , Fhg et FDC æquales angulos habent, suntque proinde similia.

^(m) * Fh seu MN . Cùm sit CM æqualis CF , et CN æqualis Cg seu Ch , angulo hCg evanescente, est $MN = CM - CN = CF - Ch = Fh$.

⁽ⁿ⁾ * Ideóque summa omnium $MN \times CM$, &c. Quoniam (per modò demonstrata) $MN \times CM = Dd \times DK$, erit summa omnium $MN \times CM$ æqualis summæ omnium $Dd \times DK$, modò simul incipiant simulque desinant. Incipit autem summa omnium $Dd \times DK$ in B et desinit in a , et summa omnium $MN \times CM$ incipit in A , et ideò si desinat in a , erunt summæ illæ æquales.

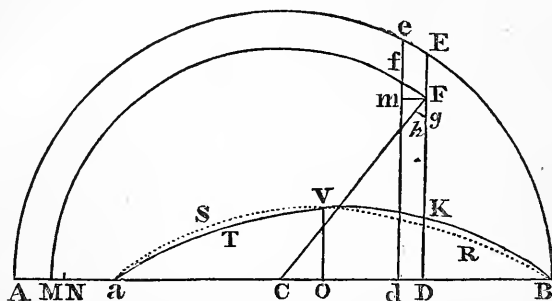
^(o) * Æquabitur summæ, &c. Erigatur ad

punctum A perpendiculum $AP = AC$, jungatur PC , et ductis per M et N ac a perpendiculis MH , NL , ab ; erit semper $MN \times CM = MN \times HM$; ideóque si ordinata variabilis



HM ducatur in totam longitudinem Aa , erit trapezium $APba$ a æquale summæ omnium $MN \times CM$ ab Aa ; sed trapezium illud est $CA P - Ca b = \frac{1}{2} CA^2 - \frac{1}{2} Ca^2 = \frac{1}{2} (CA + Ca) \times (CA - Ca) = \frac{1}{2} aB \times Aa$, ob $CB = CA$. Ergo, &c.

sistente, et B A in medio non resistente, (P) æqualibus circiter temporibus describantur; ideoque velocitates in singulis ipsius B a punctis, sint quam proximè ad velocitates in punctis correspondentibus longitudinis B A, ut est B a ad B A; erit velocitas in puncto D in medio resistente ut circuli vel ellipseos super diametro B a descripti ordinatim applicata;



(q) ideoque figura B K V T a ellipsis erit quam proximè. Cùm resistentia velocitati proportionalis supponatur, sit O V exponens resistentiæ in puncto medio O; et ellipsis B R V S a, centro O, semi-axibus O B, O V descripta, figuram B K V T a, eique æquale rectangulum A a \times B O, æquabit quamproximè. Est igitur A a \times B O ad O V \times B O (r) ut area semi-ellipseos hujus ad O V \times B O: id est, A a ad O V (s) ut area semi-

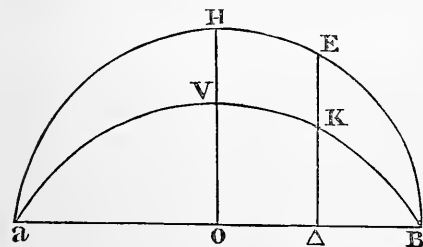
(P) * 180. *Æqualibus circiter temporibus describantur.* Quia resistentia minuendo corporis velocitatem tempus producit in descensu a B ad C, illudque contrahit in ascensu a C ad a, longitudines B A in medio non resistente et B a in medio resistente, earumque longitudinum partes proportiona-

in hac figurâ ad B D in figurâ textûs, ut B a ad B A, hoc est, ut velocitas in loco Δ in medio resistente ad velocitatem in loco D in medio non resistente; et ductâ ordinatâ Δ E, erit etiam, ob figurarum similitudinem Δ E ad D E ut B a ad B A, ideoque ut velocitas in medio resistente ad velocitatem in medio non resistente. Velocitas igitur in medio resistente erit semper ut ordinata variabilis Δ E.

(q) *Ideoque figura B K V T a ellipsis erit quam proximè.* Cùm enim (ex modò demonstratis) velocitas in loco quovis Δ sit semper ut ordinata Δ E ad circulum, et (per Hyp.) resistentia Δ K in hac figurâ, vel D K in figurâ textûs, sit semper ut velocitas Δ E, erit Δ K ut Δ E; et quia Δ E² = a Δ \times Δ B (ex naturâ circuli), erit etiam Δ K² ut a Δ \times Δ B, et ideò figura B K V T a ellipsis, cujus centrum O, semi-axes a O, et O V, si O V exponat resistentiam in puncto medio O axis a B.

(r) * *Ut area semi-ellipseos hujus ad O V \times B O.* Est enim area illa = A a \times $\frac{1}{2}$ a B (per Prop. hanc), et $\frac{1}{2}$ a B = B O (per constr.).

(s) * *Ut area semi-circuli ad quadratum radii, &c.* Area ellipseos cujuscumque est ad rectangulum sub axibus in ratione datâ, nimirum in ratione aræ circuli ad quadratum diametri (250.



les, æqualibus circiter temporibus describuntur. Sunt autem velocitates ut spatia eodem temporis momento descripta (11); quare velocitates in partibus longitudinum B A, B a correspondentibus sunt quam proximè ut longitudines B A, B a, id est, in ratione datâ. Centro O et diametro A B describatur circulus B E H a, sitque B Δ

circuli ad quadratum radii, sive ut 11 ad 7 circiter: et propterea $\frac{7}{11}$ A a ad longitudinem penduli ut corporis oscillantis resistentia in O ad ejusdem gravitatem.

Quod si resistentia D K sit in duplicatâ ratione velocitatis, figura B K V T a ^(t) ferè parabola erit verticem habens V et axem O V, ^(u) ideòque æqualis erit rectangulo sub $\frac{2}{3}$ B a et O V quam proximè. Est igitur rectangulum sub $\frac{1}{2}$ B a et A a æquale rectangulo sub $\frac{2}{3}$ B a et O V, ideòque O V æqualis $\frac{3}{4}$ A a: et propterea corporis oscillantis resistentia in O ad ipsius gravitatem ut $\frac{3}{4}$ A a ad longitudinem penduli.

Atque has conclusiones in rebus practicis abundè satis accuratas esse censeo. Nam cùm ellipsis vel parabola B R V S a congruat cum figura B K V T a ^(x) in puncto medio V, hæc si ad partem alterutram B R V vel V S a excedit figuram illam, ^(y) deficiet

Lib. I.); circulus enim est ellipsis cujus sunt axes æquales; unde area semi-ellipsoe B K V T a est ad quartam partem rectanguli sub axibus, seu ad rectangulum sub semi-axibus O V \times B O, ut area semi-circuli ad quadratum radii. Sed si circuli radius sit 7, erit semi-peripheria 22 circiter, et area semi-circuli 7×11 , ideòque area semi-circuli ad quadratum radii ut 11 ad 7 circiter. Est igitur A a ad O V ut 11 ad 7, et proinde

O V = $\frac{7}{11}$ A a. Et propterea (per Prop. hanc)

$\frac{7}{11}$ A a est ad longitudinem penduli ut corporis oscillantis resistentia in O ad ejusdem pondus.

^(t) * Ferè parabola erit. Ordinata ΔE ad semi-circulum B E H a est semper ut velocitas in loco Δ in medio resistente, et (ex naturâ circuli) $\Delta E^2 = a \Delta \times \Delta B$, et (ex Hyp.) resistentia ΔK est ut velocitatis quadratum, seu ut ΔE^2 , adeòque ΔK est ut rectangulum $a \Delta \times \Delta B$ sive ut $\frac{O B + O \Delta}{O B^2 - O \Delta^2} \times \frac{O B - O \Delta}{O B^2 - O \Delta^2}$ hoc est ut $\frac{O B + O \Delta}{O B^2 - O \Delta^2} \times \frac{O B - O \Delta}{O B^2 - O \Delta^2}$. * Sed in parabolâ cujus vertex foret V et axis V O differentia abscissarum foret semper ad differentiam quadratorum ordinatarum in utriusque abscissæ extremo ductarum, in datâ ratione. Jam verò si ex K ducatur in axem perpendicularis K P, est K $\Delta = P O$ et P O est differentia abscissarum V P et V O, est O $\Delta = P K$ ordinatæ in P, ideòque est $O B^2 - O \Delta^2$ differentia quadratorum ordinatarum in punctis P et O, cum ergo K D et $O B^2 - O \Delta^2$ sint in datâ ratione figura B K V T a parabola erit verticem habens V et axem O V (per Theor. I. de parab.).

^(u) * Ideòque æqualis erit rectangulo sub $\frac{2}{3}$ B a et O V quam proximè. Nam area parabola B K V O est $\frac{2}{3}$ B O \times V O (Theor. IV. de parab.) et ipsius duplum, seu area tota B K V a est $\frac{2}{3}$ A B \times O V.

^(x) * In puncto medio V. Supponitur enim

quòd O V accuratè exhibeat resistentiam in puncto medio O, quodque parabola vel ellipsis per punctum V descripta sit.

^(y) * Deficiet ab eadem ad partem alteram. Quia duæ ellipseos vel parabola partes B R V et a S V similes sunt et æquales, si resistentiæ in descensu a B ad O majores sint quàm pro ratione ordinatarum D R ad ellipsim vel parabolam, ad alteram partem minores erunt; et contra.

181. Sit resistentia in ratione sesquuplicatâ

velocitatis, id est, ΔK ut $\Delta E^{\frac{3}{2}}$; et quoniam

(ex naturâ circuli) $\Delta E = (B O^2 - \Delta O^2)^{\frac{1}{2}}$,

et proinde $\Delta E^{\frac{3}{2}} = (B O^2 - \Delta O^2)^{\frac{3}{4}}$, erit

ΔK ut $(B O^2 - \Delta O^2)^{\frac{3}{4}}$, et (in fig. textûs)

D K ut $(B O^2 - D O^2)^{\frac{3}{4}}$. Dicantur B O

= a, V O = b, D O = x, D K = y, et erit

b : y = $a^{\frac{5}{2}}$: $(a - x)^{\frac{3}{4}}$, ideòque y =

$\frac{b(a - x)^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{5}{2}}}$; et hinc areae O V K D mo-

mentum y d x = b d x $\frac{(a - x)^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{5}{2}}}$. Quan-

titas $(a - x)^{\frac{3}{4}}$ in seriem infinitam resolu-

tur (551. Lib. I.), et inveniuntur d x $(a - x)^{\frac{3}{4}}$

= $a^{\frac{5}{2}}$ d x - $\frac{5x^{\frac{1}{2}} d x}{4a^{\frac{1}{2}}}$ - $\frac{5x^{\frac{3}{2}} d x}{4 \times 8a^{\frac{3}{2}}}$ - $\frac{5 \times 5x^{\frac{5}{2}} d x}{4 \times 8 \times 12a^{\frac{5}{2}}}$

- $\frac{5 \times 5 \times 9x^{\frac{7}{2}} d x}{4 \times 8 \times 12 \times 16a^{\frac{7}{2}}}$, &c. Et sumptis fluen-

tibus S. d x $(a - x)^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{5}{2}} x - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{4a^{\frac{1}{2}}}$

- $\frac{3x^{\frac{5}{2}}}{5 \times 4 \times 8a^{\frac{3}{2}}}$ - $\frac{3 \times 5x^{\frac{7}{2}}}{7 \times 4 \times 8 \times 12a^{\frac{5}{2}}}$

- $\frac{3 \times 5 \times 9x^{\frac{9}{2}}}{5 \times 4 \times 8 \times 12 \times 16a^{\frac{7}{2}}}$ - &c.

ab eâdem ad partem alteram, et sic eidem æquabitur ⁽²⁾ quàm proximè.

PROPOSITIO XXXI. THEOREMA XXV.

Si corporis oscillantis resistentia in singulis arcuum descriptorum partibus proportionalibus augeatur vel minuat in datâ ratione; differentia inter arcum descensu descriptum et arcum subsequente ascensu descriptum, augebitur vel diminuetur in eâdem ratione.

(*) Oritur enim differentia illa ex retardatione penduli per resistentiam mediâ, ideóque est ut retardatio tota eique proportionalis resistentia

$$\frac{3 \times 5 \times 9 \times 9}{9 \times 4 \times 8 \times 12 \times 16 a^{\frac{13}{2}}} - \&c. = \frac{50841 a^{\frac{5}{2}}}{71680},$$

factâ $x = a$, et neglectis, ob parvitatem, cæteris seriei terminis. Quare cùm sit area $O V K D =$

$$\frac{b}{a^{\frac{3}{2}}} \times S. d \ x \ (a a - x x)^{\frac{3}{2}}, \text{ si ponâ-}$$

$$\text{tur } x = a \text{ erit area } O V K B = \frac{50841}{71680} \times$$

$$b a, \text{ et } 2 O V K B \text{ seu area tota } B K V T a = \frac{50841}{35840} b a = \frac{10}{7} b a, \text{ circiter. Est}$$

$$\text{itaque } \frac{10}{7} V O \times B O = A a \times B O,$$

et hinc $V O = \frac{7}{10} A a$; ac propterea corporis oscillantis resistentia in O ad ipsius gravitatem ut $\frac{7}{10} A a$ ad longitudinem penduli.

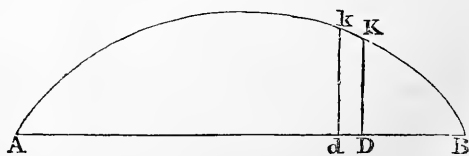
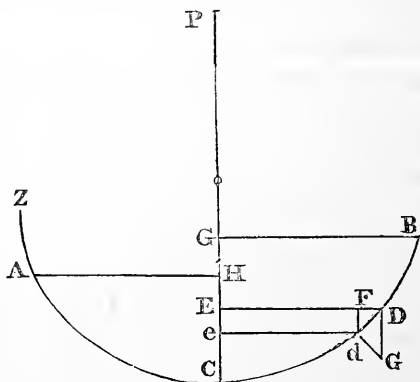
(*) * 182. Quàm proximè. Prop. LXXXII. Lib. II. Phor. quæ XXX. hujus Libri fere similis est, sed generalis, et demonstratu facilis, hic adjungemus.

Si curvæ cujusvis $B C Z$ arcus totus $A B$, quem grave descensu per $B C$ et subsequente ascensu per $C A$ in medio resistente describit, extendatur in lineam rectam $B A$, et ad singula hujus rectæ puncta D erigantur perpendiculara $D K$ proportionalia mediâ resistentiis quas mobile in homologis curvæ $B C A$ punctis D subit, sitque $B K A$ curva quam punctum K perpetuo tangit: area curvilinea $B K A B$ æquabitur rectangulo $P C \times G H$ ex recta $P C$, quæ gravitatem constantem exponit, in differentiam $G H$ abscissarum $G C, H C$ arcuum $B C, C A$ descensu et subsequente ascensu descriptorum.

Ex punctis D , d infinitè propinquis demittantur ad $P C$ perpendiculara $D E, d e$, et ex puncto d ad $E D$ perpendicularum $d F$; et vis gravitatis $P C$ erit ad vim tangentialem in loco D , quâ

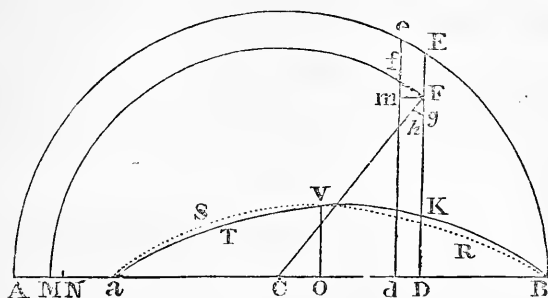
motus corporis in curvâ acceleratur, ut $D d$ ad $F d$.

* Nam ducta $D G$ parallela $P C$ et $G d$ in curvam perpendiculari, exprimat $D G$ gravitatis actionem, exprimet $D d$ vim tangentialem, sed



ob similitudinem triangulorum $D d G, D d F$ est $D G : D d = D d : F d$, erit ergo $D d$ ad $F d$ ut vis gravitatis ad vim tangentialem, quâ propter cum $D d$ sumatur ubique æqualis ut est actio gravitatis, ubique $F d$ exprimet vim tangentialem; est $F d = E e$, si itaque $P C$ representet vim gravitatis erit $D d : E e = P C$ ad vim tangentialem, † ideóque vis illa tangentialis $= \frac{P C \times E e}{D d}$. Sed corporis descendentis vis acceleratrix æqualis est excessui vis tan-

retardans. In superiore Propositione rectangulum sub rectâ $\frac{1}{2}$ a B et arcuum illorum C B, C a differentia A a æqualis erat areæ B K T a.



Et area illa, si maneat longitudo a B, augetur vel diminuitur in ratione ordinatim applicatarum D K; hoc est, in ratione resistentiæ, ^(b) ideóque est ut longitudo a B et resistentia conjunctim. Proindeque

gentialis supra resistentiam; erit igitur vis acceleratrix in loco D = $\frac{P C \times E e}{D d} - D K$. Du-

catur hæc vis in elementum spatii D d, et fiet $P C \times E e - D K \times D d = v d v$, si velocitas in loco D sit v (18, 19); et hinc, sumptis fluentibus, habetur $P C \times G E - B K D = \frac{1}{2} v v$. Fiat B D = B A, et ideó v = o, atque G E = G C - C H = G H, et erit $P C \times G H - B K A B = o$, ac proinde $P C \times G H = B K A B$. Q. e. d.

^(a) * Oritur enim differentia illa ex retardatione penduli per resistentiam mediæ. * Dividantur arcus a duobus pendulis descripti in partes proportionales infinitè parvas, et totum illud quod deest singulo arcui, poterit concipi ut effectus retardationum quas corpora passa sunt singularum illarum particularum initio, spatium verò quod propter singulam retardationem deficit, est ut illa retardatio et tempus per quod corpus motum fuit post illam retardationem receptam usque ad finem oscillationis; sed quoniam in oscillationibus utut inæqualibus tempora quibus similes arcuum partes describuntur sunt æqualia, in medio non resistente, et in medio resistente saltem quàm proximè, (180.) spatia quæ deficiunt propter retardationes in proportionalibus arcuum partibus receptas, sunt ut illæ retardationes.

* Ideó differentia arcuum est ut retardatio tota, eque proportionalis resistentia retardans, si quantitates materiæ corporum pendulorum sint æquales, retardatio in singulis arcuum descriptorum partibus est ut resistentia in iisdem locis, sed ut resistentiæ sunt in datâ quâdam lege velocitatem ex hypothesi et velocitates in arcuum partibus proportionalibus sunt in ratione datâ, ideó resistentiæ in singulis arcuum partibus proportionalibus sunt in ra-

tione datâ, ac per consequens omnes retardationes, sunt in eadem ratione, summæ ergo retardationum erunt in eadem ratione datâ, ergo tota spatia deficientia illis retardationibus proportionalia erunt in eadem ratione, differentia ergo inter arcum descensu descriptum et arcum ascensu subsequente descriptum in variis arcubus ab eodem corpore descriptis, sunt in datâ lege resistentiæ.

185. * Corol. 1. Differentiæ arcuum, respectu arcuum descensu descriptorum eamdem sequuntur legem quam resistentiæ sequuntur respectu velocitatum. Nam cum tempora quibus correspondentes et proportionales arcuum partes describuntur sint æqualia, velocitates erunt semper ut illæ arcuum partes, sive ut arcus toti, (180.) quam proximè, ergo resistentiæ, retardationes et differentia arcuum eamdem legem sequuntur respectu arcuum ac respectu velocitatum.

Cor. 2. * Si corpora pendula differant quantitate materiæ, differentia arcuum sunt directè in lege datâ arcuum et inversè ut quantitates materiæ: nam eo in casu retardationes in singulis arcuum partibus sunt directè ut resistentiæ et inversè ut quantitates materiæ; nam resistentia motus jacturam producit, quæ motus jactura est factum ex retardatione et massâ retardatâ (per Def. 2. Lib. I.).

^(b) * Ideóque est ut longitudo a B et resistentia conjunctim. Area illa si maneat longitudo a B, augetur vel diminuitur in ratione resistentiæ D K; si verò constans maneat resistentia seu ordinata D K, sed augeatur a B omnesque ejus partes d D in ratione totius a B augeantur, area illa augetur vel diminuitur in ratione longitudinis a B; unde si longitudo a B variabilis sit et resistentia seu ordinata D K in singulis longitudinibus a B locis correspondentibus au-

trum oscillationis globi distantia esset pedum $10\frac{1}{2}$. In filo punctum notavi pedibus decem et uncia unâ a centro suspensionis distans; et e regione puncti illius collocavi regulam in digitos distinctam, quorum ope notarem longitudines arcuum a pendulo descriptas. Deinde numeravi oscillationes quibus globus octavam motus sui partem amitteret. Si pendulum deducebatur a perpendiculari ad distantiam duorum digitorum, et inde demittebatur; ita ut toto suo descensu describeret arcum duorum digitorum, totâque oscillatione primâ, ex descensu et ascensu subsequente compositâ, arcum digitorum fere quatuor: ^(d) idem oscillationibus 164 amisit octavam motus sui partem, sic ut ultimo suo ascensu describeret arcum digiti unius cum tribus partibus quartis digiti. Si primo descensu descripsit arcum digitorum quatuor; amisit octavam motus partem oscillationibus 121, ita ut ascensu ultimo describeret arcum digitorum $3\frac{1}{2}$. Si primò descensu descripsit arcum digitorum octo, sexdecim, triginta duorum vel sexaginta quatuor; amisit octavam motus partem oscillationibus 69, $35\frac{1}{2}$, $18\frac{1}{2}$, $9\frac{2}{3}$, respectivè. Igitur differentia inter arcus descensu primo et ascensu ultimo descriptos, erat in casu primo, secundo, tertio, quarto, quinto, sexto, digitorum $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8 respectivè. ^(e) Dividantur eæ differentiæ per numerum oscillationum in casu unoquoque, et in oscillatione unâ mediocri, quâ arcus digitorum $3\frac{3}{4}$, $7\frac{1}{2}$, 15, 30, 60, 120 descriptus fuit, differentia arcuum descensu et subsequente ascensu descriptorum, erit $\frac{1}{63\frac{1}{3}}$, $\frac{1}{21\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{4}{71}$, $\frac{8}{37}$, $\frac{24}{29}$ partes digiti respectivè. ^(f) Hæ autem in majoribus oscillationi-

centrum oscillationis et quomodo inveniri possit, indicavimus in scholio post notam 478. Lib. I. Et ex his quæ ibi dicta sunt, satis liquet in longioribus pendulis graviore globo instructis et filo tenui, centrum oscillationis cum centro globi coincidere quàm proximè.

^(d) * Idem oscillationibus 164. amisit octavam motus sui partem, sic ut ultimo suo ascensu describeret arcum digiti $1\frac{1}{2}$.

* Liqueat (ex notâ ^(a) præcedente) quod differentia inter arcum descensu descriptum et arcum ascensu subsequente descriptum sit toti retardationi quam corpus passum est proportionalis, ideòque motui destructo per resistantiæ actionem; ascendat itaque corpus in fine primæ oscillationis ad altitudinem qualemcumque, sumaturque differentia arcus ascensu descripti ab arcu descensu primo percursi: secundâ oscillatione corpus ascendere deberet in vacuo ad eam altitudinem ad quam in fine primæ oscillationis assurrexerat, et sumatur quod deest in secundo ascensu ab illâ altitudine, duæ illæ differentiæ sunt ut motus in singulâ oscillatione amissi, earum summa est ergo ut summa motus amissi in utraque oscillatione, sed duæ illæ differentiæ sunt differentia inter altitudinem e quâ corpus primò descendit, et altitudinem ad quam ultimò assurrexit; ergo

ratiocinio ad 164. oscillationes continuato differentia inter altitudinem e quâ corpus primò descendit, et altitudinem ad quam ultimò assurrexit, est ut summa motus quem resistantia durantiis illis 164. oscillationibus destruere valuit.

^(e) * Dividantur eæ differentiæ per numerum oscillationum, &c. Exempli causâ, si in primo casu dividatur differentia $\frac{1}{4}$ per numerum oscillationum 164, habebitur $\frac{1}{65\frac{2}{3}}$ differentia inter arcum descensu descriptum et arcum subsequente ascensu descriptum in una mediocri oscillatione; quia differentia $\frac{1}{4}$ ex omnibus differentiis quæ per oscillationes 164 producuntur, composita est; et quia arcus totus unâ mediocri oscillatione descriptus medius est arithmeticè inter arcum maximum fere digitorum 4. primâ oscillatione descriptum, et arcum minimum digitorum $2\frac{5}{2}$ ultimâ oscillatione descriptum, ideò arcus ille mediocris invenitur capiendò dimidium summæ arcuum $4 + 2\frac{5}{2}$, quod est $5\frac{3}{4}$, aut etiam capiendò summam arcuum dimidiorum, videlicet $2 + 1\frac{3}{4}$. Atque eodem modo de cæteris ratiocinandum est.

^(f) * Hæ autem in majoribus oscillationibus, &c. * Dividantur omnes arcuum differentiæ in

bus sunt in duplicatâ ratione arcuum descriptorum quàm proximè, in minoribus verò paulò majores quàm in eâ ratione; et propterea (per Corol. 2. Prop. XXXI. Libri hujus) resistentia globi, ubi celerius movetur, est in duplicatâ ratione velocitatis quàm proximè; ubi tardiùs, paulò major quàm in eâ ratione.

(^g) Designet jam V velocitatem maximam in oscillatione quâvis, sintque A, B, C quantitates datæ, et fingamus quod differentia arcuum sit $A V + B V^{\frac{3}{2}} + C V^2$. (^h) Cùm velocitates maximæ sint in cycloide ut semisses

oscillatione mediocri per primam, omnes illæ differentiæ erunt ut 1.; 2.7107; 9.5072, 36.9577; 141.8378; 542.8965.

Quadrata verò arcuum sunt ut 1, 4, 16, 64, 256, 1024. unde ex eorum numerorum inspectione liquet differentias quæ in minoribus oscillationibus observatæ sunt esse ad eas quæ in majoribus arcubus observantur in majore ratione quàm duplicatâ arcuum; in majoribus verò oscillationibus rationes illarum differentiarum ad rationem duplicatam arcuum magis accedunt, ut enim arcus in progressionem duplâ fuere sumpti, ratio duplicata arcuum proximorum est ratio 1 ad 4. jam verò 9.5072 est non multo major 4. parte numeri 36.9577, iste autem ad 4. partem numeri 141.8378, magis accedit, propius adhuc iste accedit ad quartam partem numeri 542.8965. Unde inter arcus magnos, motus amissos in duplicatâ fere ratione arcuum sive velocitatum sumi posse deducitur.

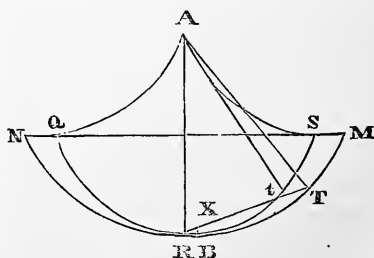
Idem manifestius patebit si dividantur hi numeri qui arcuum differentias exprimiunt per ipsorum arcuum rationes, habebuntur enim 1.; 1.3553; 2.3788; 4.6197; 8.8648; 16.9655, qui si resistentiæ forent ut quadrata velocitatum, deberent esse ut ipsi arcus $\frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, 16$. Sed ex ipsâ inspectione liquet minores differentias majoribus numeris exprimi quam ipsi arcus, majores verò ferè iidem. Si verò supponeretur resistentiam non tantum esse in ratione duplicatâ velocitatum, sed etiam partem aliquam aliunde quàm ex merâ inertîa materiæ oriundam, esse ut velocitas, ideòque cùm hæ quantitates mox inventæ sint quotientes differentiarum arcuum per velocitates divisarum, hæ quantitates constarent parte constante et aliâ parte velocitati sive arcui proportionatâ.

Sumatur itaque prima quantitas 1, et ordine conferatur cum secundâ, tum cum tertiâ, cum quartâ, &c. supponaturque illas constare duabus partibus altera velocitati proportionata altera constanti, v. gr. sit prima quantitas $1 = a + x$ secunda $1.3553 = 2a + x$, iis ita binatim calculatis ut eruatur valor a et x , quantitas constans x , in singulo calculo eadem non invenietur, sed varii isti obtinebuntur valores hoc ordine .6447; .5404; .4829; .4757; .4849, qui decrescunt ordine quodam regulari (ultimo excepto ob aliqualem exiguum errorem), unde liquet, rationem differentiarum arcuum, non esse partim in ratione duplicatâ ipsorum arcuum, et partim in eorum ar-

cuum ratione simplici, sed his adjungi debere rationem aliquam intermedium quam sesquiplacitam arcuum assumit Newtonus, quod cum experimentis propius consentit.

(^g) * Designet jam V velocitatem maximam, sive quantitatem velocitati maximæ proportionalem, in oscillatione quâvis, sintque A, B, C quantitates constantes, quarum valores per experimenta determinabuntur; et fingamus quod resistentia, seu differentia arcuum ipsi proportionalis (Prop. XXXI.), sit partim ut velocitas, partim ut velocitatis quadratum, et partim ut velocitatis dignitas cujus index $\frac{3}{2}$, et proinde supponamus quod arcuum differentia sit $A V + B V^{\frac{3}{2}} + C V^2$, &c.

(^h) * Cùm velocitates maximæ, &c. Corpus pendulum in medio non resistente oscilletur in cycloide $S B R Q$, sitque A punctum suspensionis, et R punctum infimum ac medium arcus totius $S R Q$. Centro A et radio $A R$ describatur arcus circuli $M T R N$, in quo corpus idem, vel aliud simile et æquale oscilletur in eodem medio non resistente. Sit $T R$ arcus circularis æqualis arcui cycloidis $t R$, et $R B$ arcus quàm minimus cycloidi et circulo communis (465. Lib. I.). Jam si corpus e locis T et



B successivè cadat in circulo, erit ipsius velocitas maxima in R descensu per arcum $T R$ acquisita, ad velocitatem descensu per arcum $B R$ acquisitam, ut chorda $T X R$ ad chordam arcus $R B$ (88. Lib. I.), aut, quod idem est (per Lemma VII. Lib. I.), ut chorda $T X R$ ad arcum cycloidis $B R$; et velocitas descensu per arcum $B R$ acquisita in R est ad velocitatem maximam descensu per arcum cycloidis $t B R$ acquisitam, ut arcus $B R$ ad arcum $t B R$ seu arcum circuli

arcuum oscillando descriptorum, in circulo verò ut semissium arcuum illorum chordæ; ideòque paribus arcibus majores sint in cycloide quam in circulo, in ratione semissium arcuum ad eorundem chordas; ⁽¹⁾ tempora

æqualem T B R (per demonstr. Prop. LI. Lib. I.). Quare, ex æquo, velocitas maxima in R descensu per arcum circulem T B R acquisita est ad velocitatem maximam in R descensu per cycloidis arcum t B R acquisitam, ut chorda R T ad arcum t B R vel T B R. Sunt autem velocitates maximæ in medio resistente velocitatibus maximis in medio non resistente proportionales quàm proximè, et in puncto medio arcuum qui oscillatione integrâ describuntur, ferè contingunt (180). Paribus igitur arcibus, velocitates maximæ in cycloide sunt ad velocitates maximas in circulo, ut semisses arcuum oscillando descriptorum ad eorundem arcuum circularium chordas, quàm proximè; et ideò, paribus arcibus majores sunt in cycloide quàm in circulo in ratione semissium arcuum ad eorundem chordas in circulo ductas.

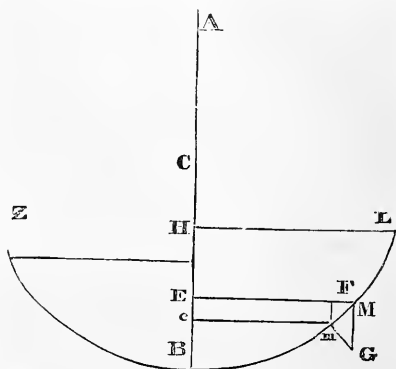
⁽¹⁾ * Tempora autem in circulo sunt majora quam in cycloide in velocitatis ratione reciproca.

* Id est, tempora in circulo sunt ad tempus in arcu quovis cycloidis, ut semisses arcus circuli oscillando descripti ad ejusdem semissis chordam, sive invertendo et temporum dimidia sumendo, tempus semi-oscillationis in cycloide est ad tempus semi-oscillationis in circulo (pendulis existentibus ejusdem longitudinis) ut chorda arcus descripti ad ipsum arcum, quæ quidem proportio proximè tantum obtinet.

* Est enim tempus oscillationis integræ cujusvis in cycloide ad tempus descensus per dimidiam penduli longitudinem ut semi-peripheria ad radium (vide not. 470. ad Prop. LII. Lib. I.) ideòque etiam tempus semi-oscillationis in cycloide ad tempus illud descensus per dimidiam penduli longitudinem ut quadrans circuli ad radium, sed tempus descensus per quadruplum dimidiæ longitudinis penduli, sive tempus descensus per diametrum circuli cujus pendulum est radius, est duplum temporis descensus per dimidiam penduli longitudinem, ideòque tempus semi-oscillationis in cycloide est ad tempus descensus per diametrum circuli cujus longitudo penduli est radius, ut circuli quadrans ad diametrum. Sed, ratio temporis lapsus per diametrum circuli ad tempus semi-oscillationis in arcu ejusdem circuli est (ut mox liquebit) composita ex ratione diametri ad quadrantem circuli et chordæ ad arcum, quàm proximè, unde ex æquo erit tempus in cycloide ad tempus in circulo ut chorda circuli ad ejus arcum oscillando descriptum. Rationem autem temporis descensus per diametrum circuli ad tempus semi-oscillationis in arcu ejus circuli esse compositam ex ratione diametri ad quadrantem circuli et ex ratione chordæ ad arcum oscillando descriptum, saltem quàm proximè, sequenti calculo constabit.

Descendat itaque corpus per arcum L B centro C descriptum et diametro A B, sit t tempus quæsitum quo corpus descendit per eum

arcum L B, fitque b tempus datum quo corpus labitur per diametrum A B, et quo velocitate per eum lapsum in B acquisita posset describere uniformiter duplum A B sive 2 A B, sumatur in arcu L B portiuncula infinitè parva M m quam corpus descendens uniformiter describere censeatur tempore infinitè parvò d t, ducanturque ex punctis L et M lineæ L H, M E in



diametrum perpendicularæ; cùm tempora quibus spatia data uniformiter describuntur sint ut illa spatia directè et velocitates quibus percurruntur inversè, sitque velocitas quæ in B acquisita est per lapsum ex A B ad velocitatem per lapsum ex L in M, sive ex H in E acquisitam,

ut $\sqrt{A B}$ ad $\sqrt{H E}$, erit $b : d t = \frac{2 A B}{\sqrt{A B}}$:

$\frac{M m}{\sqrt{H E}}$; dicatur ergo $A B = 1$; $H B = h$,

$B E = x$, $E M = y$; $H E = h - x$ erit

$b : d t = 2 : \frac{M m}{\sqrt{h - x}}$, est autem $M m =$

$\sqrt{d x^2 + d y^2}$ et ex naturâ circuli (cùm fit $y = x - x$, et $2 y d y = d x - 2 x d x$, sive

$d y = \frac{1 - 2 x}{2 \sqrt{x - x x}} d x$ invenietur $\sqrt{d x^2 + d y^2}$

$= \pm \frac{d x}{2 \sqrt{x - x x}}$, et quoniam dum crescit

$B E$ decrescit $L M$ est $M m = \frac{-d x}{2 \sqrt{x - x x}}$,

resolvatur ergo $\frac{1}{\sqrt{x - x x}}$ in seriem per formu-

lam Newtonianam invenietur $\frac{1}{\sqrt{x - x x}} =$

$\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{3 x^{\frac{3}{2}}}{2 \times 4}$, &c. ideòque $M m$ sive

autem in circulo sint majora quàm in cycloide in velocitatis ratione reciproca; patet arcuum differentias ^(k) (quæ sunt ut resistentia et quadratum

$$\frac{-dx}{2\sqrt{x-x^2}} = \frac{1}{2} \times -\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{2} - \frac{3x^{\frac{3}{2}}dx}{2 \times 4} \text{ \&c. Pariter resolvatur } \frac{1}{\sqrt{h-x}} \text{ in}$$

$$\text{seriem per eandem formulam erit } \frac{1}{\sqrt{h-x}} = \frac{1}{h^{\frac{1}{2}}} + \frac{x}{2h^{\frac{3}{2}}} + \frac{3x^2}{2 \times 4h^{\frac{5}{2}}} \text{ \&c.} = \frac{1}{h^{\frac{1}{2}}} \times 1 + \frac{x}{2h} + \frac{3x^2}{2 \times 4h^2} \text{ \&c.}$$

Ductis ergo per se mutuo his seriebus

$$\frac{Mm}{\sqrt{h-x}} = \frac{1}{2h^{\frac{1}{2}}} \times -\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{2} - \frac{3x^{\frac{3}{2}}dx}{2 \times 4} \text{ \&c.}$$

$$-\frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{2} - \frac{3x^{\frac{3}{2}}dx}{2 \times 4} \text{ \&c.}$$

$$-\frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{2h} - \frac{x^{\frac{3}{2}}dx}{2 \times 2h} - \frac{3x^{\frac{5}{2}}dx}{2 \times 4 \times 2h} \text{ \&c.}$$

$$-\frac{3x^{\frac{3}{2}}dx}{2 \times 4h^2} - \frac{3x^{\frac{5}{2}}dx}{2 \times 2 \times 4h^2} - \frac{5 \times 3x^{\frac{7}{2}}dx}{2 \times 4 \times 2 \times 4h^2} \text{ \&c.}$$

\&c. \&c. \&c.

ideoque integralis

$$S. \frac{Mm}{\sqrt{h-x}} = \frac{1}{2h^{\frac{1}{2}}} \times -2x^{\frac{1}{2}} - \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{2 \times 3} - \frac{2 \times 3x^{\frac{5}{2}}}{2 \times 4 \times 5} \text{ \&c.}$$

$$-\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{2 \times 3h} - \frac{2x^{\frac{7}{2}}}{2 \times 2 \times 5h} - \frac{2 \times 3x^{\frac{9}{2}}}{2 \times 4 \times 2 \times 7h} \text{ \&c.}$$

$$-\frac{2 \times 3x^{\frac{7}{2}}}{2 \times 4 \times 5h^2} - \frac{2 \times 3x^{\frac{9}{2}}}{2 \times 2 \times 4 \times 7h^2} - \frac{2 \times 3 \times 3x^{\frac{11}{2}}}{2 \times 4 \times 2 \times 4 \times 9h^2} \text{ \&c.}$$

\&c. \&c. \&c.

Cùm ergo sit $b : d t = 2 : \frac{Mm}{\sqrt{h-x}}$ erit

$$b : t = 2 : S. \frac{Mm}{\sqrt{h-x}}, \text{ sed quando } t \text{ fit } o, \text{ tunc est } h = x \text{ ideoque integralis quæsitâ in hanc mutatur, (posito ubique } h \text{ pro } x)$$

$$S. \frac{Mm}{h-x} = -1 - \frac{h}{2 \times 3} - \frac{3h^2}{2 \times 4 \times 5} \text{ \&c.}$$

$$-\frac{1}{2 \times 5} - \frac{h}{2 \times 2 \times 5} - \frac{3h^2}{2 \times 4 \times 2 \times 7} \text{ \&c.}$$

$$-\frac{3}{2 \times 4 \times 5} - \frac{3h}{2 \times 2 \times 4 \times 7} - \frac{2 \times 3 \times 3h^2}{2 \times 4 \times 2 \times 4 \times 9} \text{ \&c.}$$

\&c. \&c. \&c.

Ideoque hæc est quantitas illa constans quæ debet tolli ex valore integralis quæ in proportionem

$$b : t = 2 : S. \frac{Mm}{\sqrt{h-n}} \text{ pro } S. \frac{Mm}{\sqrt{h-n}} \text{ adhibetur, quæcumque assumatur valor indeterminatæ } x, \text{ sed ubi totus arcus } L B \text{ est descriptus, tunc } x \text{ fit } o, \text{ et evanescit prior series}$$

$$\frac{1}{2h^{\frac{1}{2}}}$$

$\times -\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{2}$, \&c. ergo in eo casu integralis $S. \frac{Mm}{\sqrt{h-n}}$ est æqualis soli quantitati illi constanti adsumptæ cum signis mutatis, ideoque est

$$b : t = 2 : 1 + \frac{h}{2 \times 3} + \frac{3h^2}{2 \times 4 \times 5} \text{ \&c.}$$

$$+ \frac{1}{2 \times 3} + \frac{h}{2 \times 2 \times 5} \text{ \&c.}$$

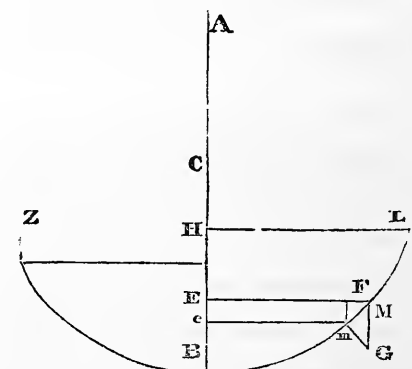
$$+ \frac{3}{2 \times 4 \times 5} \text{ \&c.}$$

Jam autem cùm Mm , sit æqualis seriei

$$\frac{1}{2} \times \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{2} + \frac{3x^{\frac{3}{2}}dx}{2 \times 4} \text{ \&c. ejus inte-}$$

$$\text{gralis est } \frac{1}{2} \times 2x^{\frac{1}{2}} + \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{2 \times 3} + \frac{2 \times 3x^{\frac{5}{2}}}{2 \times 4 \times 5} \text{ \&c.}$$

$= \sqrt{x} \times 1 + \frac{1x}{2 \times 3} + \frac{3x^2}{2 \times 4 \times 5} \text{ \&c. in quâ}$
 si fiat $x = 1$ habebitur semi-peripheria circuli, et si fiat $x = h$ habebitur arcus



$L B$, tumque illæ duæ series in has abibunt

$$1 + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{3}{2 \times 4 \times 5} \text{ \&c.}$$

$$\text{et } \sqrt{h} \times 1 + \frac{h}{2 \times 3} + \frac{3h^2}{2 \times 4 \times 5} \text{ \&c.}$$

Quæ si per se mutuo ducantur, earum factum erit

$$\sqrt{h} \times 1 + \frac{h}{2 \times 3} + \frac{3h^2}{2 \times 4 \times 5} \text{ \&c.}$$

$$\frac{1}{2 \times 5} + \frac{h}{2 \times 3 \times 2 \times 5} \text{ \&c.}$$

$$\frac{3}{2 \times 4 \times 5} \text{ \&c.}$$

Sed termini hujus seriei saltem primi, iidem sunt cum terminis seriei superius inventæ pro

temporis conjunctim) easdem fore, quamproximè, in utrâque curvâ: (+) deberent enim differentiæ illæ in cycloide augeri, unâ cum resistentia, in duplicatâ circiter ratione arcûs ad chordam, ob velocitatem in ratione illâ simplici auctam; et diminui, unâ cum quadrato temporis, in eâdem duplicatâ ratione. Itaque ut reductio fiat ad cycloidem, eâdem sumendæ sunt arcuum differentiæ quæ fuerunt in circulo observatæ, velocitates verò maximæ ponendæ sunt arcubus vel dimidiatis vel integris, hoc est, numeris $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, 16 analogæ. Scribamus ergo in casu secundo, quarto et sexto, numeros, 1, 4 et 16 pro V; et prodibit arcuum differentia $\frac{\frac{1}{2}}{121} = A + B + C$ in casu secundo; $\frac{2}{35\frac{1}{2}} = 4A + 8B + 16C$ in casu quarto; et $\frac{8}{9\frac{2}{3}} = 16A + 64B + 256C$ in casu sexto. Et ex his æquationibus, ⁽¹⁾ per debitam collationem et reductionem analyticam, fit $A = 0,0000916$, $B = 0,0010847$, et $C = 0,0029558$. Est igitur differentia arcuum ut $0,0000916V + 0,0010847V^{\frac{3}{2}} + 0,0029558V^2$: et propterea cum (per Corollarium Propositionis XXX. applicatum ad hunc casum) resistentia globi in medio arcus oscillando descripti, ubi velocitas est V, ^(m) sit ad ipsius pondus A ut $\frac{7}{11}A V + \frac{7}{16}B V^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}C V^2$ ad

valore S. $\frac{Mm}{\sqrt{h-n}}$, sit ergo arcus LB = a, peripheria circuli cujus diameter est l sit p, erit $\sqrt{h} \times S. \frac{Mm}{\sqrt{h-x}} = \frac{ap}{2}$, sive S. $\frac{Mm}{\sqrt{h-x}} = \frac{ap}{2\sqrt{h}}$, sed \sqrt{h} est æqualis chordæ LB, ex naturâ circuli, quæ si dicatur c, erit S. $\frac{Mm}{\sqrt{h-x}} = \frac{ap}{2c}$. Unde tandem est b : t = 2 : $\frac{ap}{2c}$ = $1 : \frac{ap}{4c} = 1 \times c : a \times \frac{p}{4}$ sive est b tempus descensus per diametrum vel per chordam quamlibet ad t tempus descensus per arcum in ratione compositâ ex ratione diametri l ad $\frac{p}{4}$ sive quadrante peripheriæ, et ex ratione chordæ c ad arcum a. Q. e. d.

(*) * Quæ sunt ut resistentia et quadratum temporis conjunctim (per Cor. 3. Lem. X.). Resistentia enim considerari potest ut vis quæ retardationem producit, et differentia arcuum ut spatium quod corpus vi illâ mediocri ac constante sollicitatum describeret. Hinc arcuum differentie erunt quam proxime ut resistentia directè et quadratum temporis conjunctim.

(†) * Deberent differentia in cycloide augeri unâ cum resistentiâ in duplicatâ circiter ratione,

arcus ad chordam ob velocitatem in ratione illâ simplici auctam, quia scilicet pars maxima resistentiæ est ut quadrata velocitatum.

⁽¹⁾ * Per debitam collationem. Prima æquatio est $\frac{\frac{1}{2}}{121} = \frac{1}{2 \times 121} = A + B + C$. secunda divisa per 4. est $\frac{1}{71} = A + 2B + 4C$,

et tertia divisa per 16. est $\frac{3}{58} = A + 4B + 16C$.

Ex his autem æquationibus facile eruuntur valores litterarum A, B, C, si fractiones $\frac{1}{242}$, $\frac{1}{71}$,

et $\frac{3}{58}$ ad decimales reducantur.

^(m) * Sit ad ipsius pondus. A V est pars differentia arcuum genita per resistentiæ partem illam quæ est ut velocitas B $V^{\frac{3}{2}}$, pars differentia arcuum genita per resistentiæ partem quæ est in sesquuplicatâ ratione velocitatis; et C V^2 pars differentia arcuum producta per resistentiæ totius partem quadrato velocitatis proportionalem (per Cor. 4. Prop. XXXI.). Sed (per Cor. Prop. XXX.) si resistentia sit ut velocitas, est $\frac{7}{11}A V$ ad longitudinem penduli ut corporis

oscillantis resistentia in puncto medio arcûs descripti ad ejusdem pondus; si resistentia sit ut velocitatis quadratum, resistentia illa in puncto

longitudinem penduli; si pro A, B et C scribantur numeri inventi, fiet resistentia globi ad ejus pondus, ut 0, 0000583 $V + 0, 0007593 V^{\frac{5}{2}} + 0, 0022169 V^2$ ad longitudinem penduli inter centrum suspensionis et regulam, id est, ad 121 digitos. Unde cùm V in casu secundo designet 1, in quarto 4, in sexto 16: erit resistentia ad pondus globi in casu secundo ut 0, 0030345 ad 121, in quarto ut 0, 041748 ad 121, in sexto ut 0, 61705 ad 121.

Arcus quem punctum in filo notatum in casu sexto descripsit, erat $120 - \frac{8}{9\frac{5}{3}}$ seu $119\frac{5}{27}$ digitorum. Et propterea cùm radius esset 121 digitorum, et longitudo penduli inter punctum suspensionis et centrum globi esset 126 digitorum, arcus quem centrum globi descripsit ⁽ⁿ⁾ erat $124\frac{5}{31}$ digitorum. Quoniam corporis oscillantis velocitas maxima, ob resistentiam aëris, non incidit in punctum infimum arcus descripti, ^(o) sed in medio ferè loco arcus totius versatur: hæc eadem erit circiter ac si globus descensu suo toto in medio non resistente ^(p) describeret arcus illius partem dimidiam digitorum $62\frac{5}{22}$, idque in cycloide, ad quam motum penduli supra reduximus: et propterea velocitas illa æqualis erit ve-

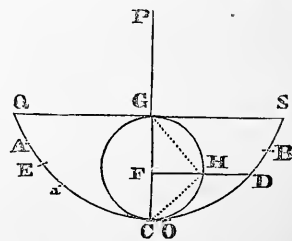
medio arcus descripti est ad corporis pondus ut $\frac{3}{4} C V^2$ ad longitudinem penduli, et (181) si resistentia sit in ratione sesquuplicatâ velocitatis, est illa ad corporis pondus ut $\frac{7}{10} B V^{\frac{5}{2}}$ ad longitudinem penduli. Quare cum hic supponatur resistentia partim in ratione velocitatis, partim in velocitatis ratione sesquuplicatâ et partim in duplicatâ, resistentia globi in medio arcus oscillando descripti, ubi velocitas est V, erit ad ipsius pondus ut $\frac{7}{11} A V + \frac{7}{10} B V^{\frac{5}{2}} + \frac{3}{4} C V^2$, ad longitudinem penduli.

⁽ⁿ⁾ * Erat $124\frac{5}{31}$ digit. Sunt enim radii ut similes circularum arcus, et ideò radius 121, est ad suum arcum $119\frac{5}{27}$ ut radius 126, ad arcum correspondentem $124\frac{5}{31}$ quamproximè.

^(o) * Sed in medio ferè loco. Patet per not. 180.

^(p) * Describeret arcus illius partem dimidiam. Corpus oscillando describat arcum B a in medio resistente et arcum B A in medio non resistente; sit C punctum cycloidis infimum; O, punctum medium arcus B a, et arcus C D sit æqualis arcui B O, velocitas maxima descensu corporis per arcum B O acquisita in medio resistente est ad velocitatem maximam per arcum B C acquisitam in medio resistente ut arcus B O, ad arcum B C (180). Sed si corpus e loco D in medio non resistente cadendo describat arcum D C, erit etiam velocitas ipsius in C descensu per arcum D C acquisita ad velocitatem acquisitam ibidem descensu per arcum B C ut arcus C D, vel æqualis B O, ad arcum B C, (Prop. LI. Lib.

I.). Ergò velocitas in medio resistente per arcum B O acquisita in O æqualis est velocitati quam corpus in medio non resistente cadendo per arcum D C = B O haberet in C; et propterea (85. Lib. I.) velocitas illa æqualis est velocitati quam corpus perpendiculariter cadendo in medio non resistente, et casu suo describendo altitudinem F C æqualem sinui verso arcus C H, acquirere posset. Sit jam P punctum suspen-



sionis, P C longitudo penduli S D C semicyclois, S G et D F ad P C normales, et C H G C circulus diametro G C descriptus secans D F in H. Jungatur chorda C H, et erit arcus cycloidis S D = 2 G C - 2 C H, et arcus S C = 2 G C (462. Lib. I.) idcòque arcus D C = 2 C H. Est autem (ex naturâ circuli) C F ad C H ut C H ad C G, et hinc C F ad 2 C H seu D C, ut 2 C H ad 4 C G, sivè ut D C ad 2 P C; hoc est, sinus versus C F, ad arcum C D, ut arcus idem ad penduli longitudinem duplam.

locitati quam globus, perpendiculariter cadendo et casu suo describendo altitudinem arcus illius sinui verso æqualem, acquirere posset. Est autem sinus ille versus in cycloide ad arcum istum $62\frac{5}{8}$ ut arcus idem ad penduli longitudinem duplam 252, et propterea æqualis digitis 15, 278. Quare velocitas ea ipsa est quam corpus cadendo et casu suo spatium 15, 278 digitorum describendo acquirere posset. Tali igitur cum velocitate globus resistantiam patitur, quæ sit ad ejus pondus ut 0, 61705 ad 121, vel ^(q) (si resistantiæ pars illa sola spectetur quæ est in velocitatis ratione duplicatâ) ut 0, 56752 ad 121.

^(r) Experimento autem hydrostatico inveni quod pondus globi hujus lignei esset ad pondus globi aquei magnitudinis ejusdem ut 55 ad 97: et propterea cum 121 sit ad 213, 4 in eâdem ratione, erit resistantia globi aquei præfatâ cum velocitate progredientis ^(s) ad ipsius pondus ut 0, 56752 ad 213, 4, id est, ut 1 ad $376\frac{1}{30}$. Unde cum pondus globi aquei, quo tempore globus cum velocitate uniformiter continatâ ^(t) describat longitudinem digitorum 30, 556, velocitatem illam omnem in globo cadente generare posset; ^(u) manifestum est quod vis resistantiæ eodem tempore uniformiter continuata tollere posset velocitatem minorem in ratione 1 ad $376\frac{1}{30}$, hoc est, velocitatis totius partem $\frac{1}{376\frac{1}{30}}$. Et propterea quo tem-

pore globus, eâ cum velocitate uniformiter continuatâ, longitudinem semi-diametri suæ, seu digitorum $3\frac{1}{16}$, describere posset, ^(x) eodem amitteret motûs sui partem $\frac{1}{33\frac{1}{2}}$.

^(q) * *Si resistantiæ pars illa sola, &c.* Si enim in quantitate, 0, 0022169 V^2 quæ est ad longitudinem penduli ut resistantiæ pars velocitatis quadrato proportionalis ad corporis pondus loco V scribatur 16, et loco V^2 scribatur 256, fiet 0, 0022169 $V^2 = 0, 56752$, quamproximè.

^(r) * *Experimento autem hydrostatico.* Experimentum facile est. Cum enim corpus fluido immersum, eâdem vi sursum urgeatur quâ par fluidi volumen sustinetur, id est, vi quæ æqualis est ponderi fluidi ejusdem magnitudinis (Cor. 5. et 6. Prop. XX. Lib. hujus) corpus fluido specificè leviori immersum ponderis sui partem amittet æqualem ponderi fluidi ejusdem voluminis; et propterea si corpus illud fluido immersum ponderetur, cognoscetur pondus fluidi ejusdem magnitudinis cum corpore. Si fluidum corpore immergendo specificè gravius sit, corpori illi adjungi potest aliud corpus majoris gravitatis specificæ ut eorum summa fluido specificè gravior fiat.

^(s) *Ad ipsius pondus.* Resistentia globi solidi æqualis est resistantiæ globi aquei ejusdem magnitudinis et cum eâdem velocitate in eodem medio progredientis, sed resistantia globi solidi est

ad ejusdem pondus ut 0, 56752 ad 121, et pondus globi solidi ad pondus globi aquei ut 121 ad 213, 4, seu ut 1 ad $376\frac{1}{30}$ quamproximè.

^(t) * *Describat longitudinem digit.* 30, 556, duplam nimirum longitudinis digitorum 15, 278, quæ velocitatem illam omnem in globo cadente generare posset (29. Lib. I.).

^(u) * *Manifestum est.* Sunt enim velocitates dato tempore genitæ vel extinctæ, ut vires quibus generantur vel extinguuntur (13. Lib. I.).

^(x) * *Eodem amitteret motûs sui partem.* Nam velocitates eâdem vi constante vel extinctæ sunt ut tempora quibus generantur vel extinguuntur (15. Lib. I.), sed tempora quibus corpora duo eâdem velocitate uniformi percurrunt longitudines digit. 30, 556, et digit. $5\frac{7}{16}$, sunt ut hæc longitudines (5. Lib. I.). Quare velocitates amissæ sunt ut eâdem longitudines, et ideò 30, 556 ad $5\frac{7}{16}$, ut $\frac{1}{376\frac{1}{30}}$ ad velocitatem amissam eo tempore quo globus longitudinem semi-diametri suæ seu digit. $3\frac{1}{16}$, percurrit; undè invenitur velocitas illa amissa = $\frac{1}{33\frac{1}{2}}$, quamproximè.

Numerabam etiam oscillationes quibus pendulum quartam motûs sui partem amisit. In sequente tabulâ numeri supremi denotant longitudinem arcûs descensu primo descripti, in digitis et partibus digiti expressam: numeri medii significant longitudinem arcûs ascensu ultimo descripti; et loco infimo stant numeri oscillationum. Experimentum descripsi tanquam magis accuratum quàm cùm motûs pars tantùm octava amitteretur. (v) Calculum tentet qui volet.

<i>Descensus primus</i>	2	4	8	16	32	64
<i>Ascensus ultimus</i>	$1\frac{1}{2}$	3	6	12	24	48
<i>Numerus oscillat.</i>	374	272	$162\frac{1}{2}$	$83\frac{1}{3}$	$41\frac{2}{3}$	$22\frac{2}{3}$

Postea globum plumbeum diametro digitorum 2, et pondere unciarum Romanarum $26\frac{1}{4}$ suspendi filo eodem, sic ut inter centrum globi et punctum suspensionis intervallum esset pedum $10\frac{1}{2}$, et numerabam oscillationes

(v)* *Calculus tentet.* Quoniam experimentum magis accuratum est, calculum tentabimus. Erunt igitur differentiae arcuum primo descensu et ultimo ascensu descriptorum.

Arcus in unâ mediocri oscillatione descripti, sunt

$$3\frac{1}{2}, 7, 14, 28, 56, 112.$$

Differentiæ arcuum descensu et subsequente ascensu in unâ mediocri oscillatione descriptorum, sunt

$$\frac{\frac{1}{2}}{374}, \frac{1}{272}, \frac{2}{162\frac{1}{2}}, \frac{4}{83\frac{1}{3}}, \frac{8}{41\frac{2}{3}}, \frac{16}{22\frac{2}{3}}$$

sive ut 1. 2. 7500; 9.2061; 35.5040; 143.7760; 528.5882.

Hæ autem differentiæ in majoribus oscillationibus sunt in duplicatâ ratione arcuum descriptorum

satis proximè; nam $\frac{8}{41\frac{2}{3}} : \frac{16}{22\frac{2}{3}} = 34 :$

125, et $34 : 126 = 1 : 4$; hoc est, in duplicatâ ratione arcuum descriptorum. Et similiter

$\frac{4}{85\frac{1}{3}} : \frac{8}{41\frac{2}{3}} = 1 : 4$, accuratè; in minoribus verò

oscillationibus, differentiæ illæ sunt in ratione paulò majore quam duplicatâ arcuum descriptorum. Est enim

$\frac{1}{272} : \frac{1}{162\frac{1}{2}} = 325 : 1088$ et hæc ratio major est ratione 1 ad 4. Designet jam V, ut supra, velocitatem maximam in oscillatione quâvis, et A $V + B V^{\frac{3}{2}} + C V^2$, differentiam arcuum; et quoniam velocitates ponendæ sunt arcubus descriptis scil. numeris $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, 16, analogæ, scribamus in cas. 2. 4.

et 6. numeros 1, 4, 16, pro V, et prodibit arcuum differentia

$\frac{1}{272} = A + B + C$ in cas. 2.

$\frac{4}{83\frac{1}{3}} = 4 A + 8 B + 16 C$ in cas. 4 et $\frac{16}{22\frac{2}{3}}$

$= 16 A + 64 B + 256 C$ in cas. 6. Ex his

æquationibus habetur $A = 0,0005096$, $B = 0,0005884$, et $C = 0,0025784$. Est igitur differentia arcuum ut $0,0005096 V + 0,0005884 \times$

$V^{\frac{3}{2}} + 0,0025784 V^2$, et propterea cùm resistentia globi in medio arcûs oscillando descripti ubi velocitas est V, sit ad ipsius pondus ut

$\frac{7}{11} A V + \frac{7}{10} B V^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4} C V^2$ ad longitudinem penduli, fiet resistentia globi ad ejus

pondus ut $0,0003243 V + 0,0004119 V^{\frac{3}{2}}$

$+ 0,0019538 V^2$, ad longitudinem penduli inter centrum suspensionis et regulam, id est, ad 121 digit. Unde cùm V in cas. 2. designet 1;

in 4. 4, in 6. 16; erit resistentia ad pondus globi in cas. 2. ut 0, 0267 ad 121; in 4. ut 0, 0355332

ad 121; in 6. ut 0, 5266032 ad 121.

Ponatur resistentia in tardioribus motibus partim uniformis et partim velocitati, partim velocitatis quadrato proportionalis, ideoque arcuum differentia sit $A + B V + C V^2$, et scribamus in cas. 1. 2. et 3. numeros 1, 2, 4, pro V, prodibunt æquationes $A + B + C = \frac{1}{748}$, $A + 2 B$

$+ 4 C = \frac{1}{272}$, et $A + 4 B + 16 C = \frac{4}{523}$,

ex quibus eruitur $A = 0,00034$, $B = 0,0003255$, et $C = 0,0006714$; et propterea cùm (per Cor. Prop. XXX.) resistentia globi in medio arcûs oscillando descripti, ubi velocitas est V, sit ad ipsius pondus ut

$\frac{1}{2} A + \frac{7}{11} B V + \frac{3}{4} C V^2$

ad longitudinem penduli; si pro A, B, et C, scribantur numeri inventi, sint resistentia globi ad ejus pondus ut $0,00017 + 0,0002071 V + 0,0005035 V^2$ ad 121, id est, in cas. 1. ut 0, 0008806 ad 121; in 2. cas. ut 0, 0025982 ad 121; in 3. cas. ut 0, 0090544, ad 121; resistentia verò uniformis erit ad pondus globi ut 0, 00017 ad 121, seu ut 1, ad 735294.

quibus data motûs pars amitteretur. Tabularum subsequen-
tium exhibet numerum oscillationum quibus pars octava motûs totius cessa-
vit: secunda numerum oscillationum quibus ejusdem pars quarta amissa
fuit.

<i>Descensus primus</i>	1	2	4	8	16	32	64
<i>Ascensus ultimus</i>	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{4}$	$3\frac{1}{2}$	7	14	28	56
<i>Numerus oscillat.</i>	226	228	193	140	$90\frac{1}{2}$	53	30

<i>Descensus primus</i>	1	2	4	8	16	32	64
<i>Ascensus ultimus</i>	$\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{2}$	3	6	12	24	48
<i>Numerus oscillat.</i>	510	518	420	318	204	121	70

In tabulâ priore seligendo ex observationibus tertiam, quintam et sep-
timam, et exponendo velocitates maximas in his observationibus particu-
latim per numeros 1, 4, 16 respectivè, et generaliter per quantitatem V
ut supra: emerget in observatione tertiâ $\frac{\frac{1}{2}}{193} = A + B + C$, in quintâ

$\frac{2}{90\frac{1}{2}} = 4 A + 8 B + 16 C$, in septimâ $\frac{8}{30} = 16 A + 64 B + 256 C$.

Hæ verò æquationes reductæ dant $A = 0,001414$, $B = 0,000297$,
 $C = 0,000879$. Et inde prodit resistentia globi cum velocitate V moti
in eâ ratione ad pondus suum unciarum $26\frac{1}{4}$, quam habet $0,0009 V +$
 $0,000208 V^{\frac{5}{2}} + 0,000659 V^2$ ad penduli longitudinem 121 digitorum.
Et si spectemus eam solummodo resistentiæ partem quæ est in duplicatâ
ratione velocitatis, hæc erit ad pondus globi ut $0,000659 V^2$ ad 121 di-
gitos. Erat autem hæc pars resistentiæ in experimento primo ad pondus
globi lignei unciarum $57\frac{7}{22}$ ut $0,002217 V^2$ ad 121: ^(z) et inde fit resis-
tentia globi lignei ad resistentiam globi plumbei (paribus eorum velocita-
tibus) ut $57\frac{7}{22}$ in $0,002217$ ad $26\frac{1}{4}$ in $0,000659$, id est, ut $7\frac{1}{3}$ ad 1. Dia-
metri globorum duorum erant $6\frac{7}{8}$ et 2 digitorum, et harum quadrata sunt
ad invicem ut $47\frac{1}{4}$ et 4, seu $11\frac{1}{5}$ et 1 quamproximè. Ergo resistentiæ
globorum æquivelocium erant in minore ratione quàm duplicatâ diame-
trorum. ^(a) At nondum consideravimus resistentiam fili, quæ certè per-

^(z) Et inde fit resistentia. Est enim (ex dem.)
resistentia globi lignei $57\frac{7}{22} \times \frac{0,002217}{121}$; et

resistentia globi plumbei $26\frac{1}{4} \times \frac{0,000659}{121}$, id est, ideo-
que resistentia globi lignei ad resistentiam globi
plumbei ut $57\frac{7}{22} \times 0,002217$ ad $26\frac{1}{4} \times$
 $0,000659$ id est, $7\frac{1}{3}$ ad 1.

^(a) 184. At nondum consideravimus, &c.

PROBLEMA.

Fili tensi oscillantis resistentiam invenire in me-
dio cujus resistentia est ut velocitatis et dia-
metri globi quadrata conjunctim.

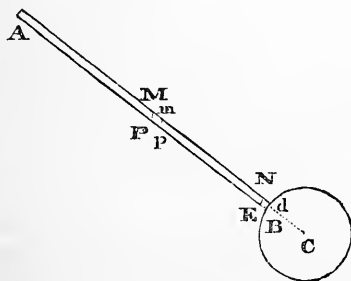
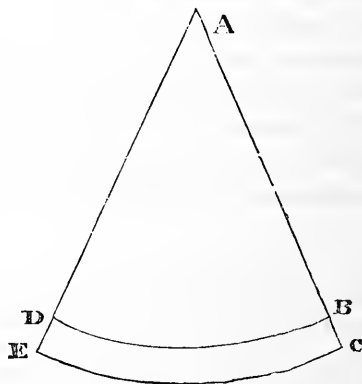
Filum cylindricum homogenum A B, circâ
punctum A, oscilletur, sitque ejus longitudo

magna erat, ac de pendulorum inventâ resistantiâ subduci debet. Hanc accuratè definire non potui, sed majorem tamen inveni quàm partem ter-

A B = a, diameter E N = 2 b, globi C, diameter = 2 r, longitudo variabilis A P = x, P p = d x; et cylindruli evanescentis P M, velocitas erit ut distantia A P, ejusque proinde resistentia ut x x d x, sive ut altitudo cylindruli P p et quadratum velocitatis conjunctim; et hinc, sumptâ fluente, resistentia fili A P, fit ut $\frac{1}{3} x^3$, et totius fili A B resistentia ut $\frac{1}{3} a^3$. Capiatur in B, cylindrus B N, cujus altitudo B E sit æqualis diametro fili E N, seu 2 b, et resistentia fili A E, erit ut $\frac{1}{3} (a - 2 b)^3$, idèquæ cylindri B N resistentia ut $\frac{1}{3} a^3 - \frac{1}{3} (a - 2 b)^3$. Est igitur resistentia fili totius A B, ad resistentiam cylindri B N, ut a^3 ad $a^3 - (a - 2 b)^3$; sed ut infra Prop. XXXIV. demonstrabitur, cylindri B N resistentia est ad resistentiam globuli huic cylindro inscripti ut 2 ad 1, et resistentia globuli hujus est ad resistentiam globuli C, in ratione quamproximè compositâ ex ratione quadrati diametri E N, ad quadratum diametri 2 B C, et ratione quadrati velocitatis globuli ad quadratum velocitatis globuli C hoc est, ut b b (a - b) ² ad r r (a + r) ². Quarè (per compositionem rationum et ex æquo) resistentia fili A B, est ad resistentiam globuli C, ut 2 a ³ b b (a - b) ², ad

tiam totius penduli ut 1953125 ad 4762800, seu ut 1 ad 2, 438 quamproximè.

186. Inveniri etiam potest pars illa resistentiæ fili quæ uniformis est, quæque in tardioribus motibus observatur; posito quod uniformis illa resistentia fili sit ad uniformem resistentiam globi, ut spatium solidum quod filum oscillando describit ad spatium solidum quod describit globus. Filum cylindricum A B oscillatione unâ



$a^3 r r (a + r)^2 - r r (a + r)^2 \times (a - 2 b)^3$, seu ponendo $a + r = c$, ut $a^3 b (a - b)^2$ ad $3 a^2 r r c c - 6 a b r r c c + 4 b b r r c c$, et hinc resistentia fili ad resistentiam totius penduli ut $a^3 b (a - b)^2$, ad $a^3 b (a - b)^2 + r r c c (3 a a - 6 a b + 4 b b)$. Q. e. i.

185. *Chorol.* Si fili semi-diameter b, sit ad modum exigua respectu longitudinis ejusdem a, erit ferè $3 a a - 6 a b + 4 b b = 3 a a - 6 a b + 3 b b = 3 (a - b)^2$. Quarè fili resistentia erit ad resistentiam globi ut $a^3 b$ ad $3 r r c c$, et ad resistentiam totius penduli ut $a^3 b$ ad $a^3 b + 3 r r c c$. Exempli causâ. Sit $c = 126$. digit. $r = 1$ digit. $a = 125$ digit. $b = \frac{1}{100}$ digit. et resistentia fili erit ad resisten-

describat spatium solidum seu prisma cujus basis est sector circularis A B D, et altitudo diameter fili, interea dum globi centrum C, describit arcum C E, diameter fili dicatur 2 R, et spatium a filo descriptum erit $R \times A B \times B D$; spatium verò a globo descriptum est factum ex area circuli cujus radius B C, in arcum C E quem centrum C describit; seu est $\frac{22}{7} B C^2 \times C E$.

Quarè uniformis resistentia fili est ad uniformem resistentiam globi ut $R \times A B \times B D$ ad $\frac{22}{7}$

$B C^2 \times C E$, hoc est, ob rectas A B, A C arcibus B D, C E proportionales, ut $R \times A B^2$ ad $\frac{22}{7} B C^2 \times A C$, totaque uniformis resistentia penduli ad uniformem resistentiam globi ut $R \times A B^2 + \frac{22}{7} B C^2 \times A C$ ad $\frac{22}{7} B C^2 \times A C$.

Exempli causâ. Sit $R = \frac{1}{100}$ digit. $A C = 126$ digit. $B C = \frac{7}{16}$, $A B = 122 \frac{9}{16}$ ut in experimentis primo ac secundo, et invenietur uniformis resistentia fili ad uniformem resistentiam globi ut 1 ad 31. circiter, et idèò resistentia fili est resistentiæ totius penduli pars $\frac{1}{31}$. Cùm igitur

tiam resistentiæ totius minoris penduli; et inde didici quod resistentiæ globorum, demptâ fili resistentiâ, sunt quam proximè in duplicatâ ratione diametrorum. Nam ratio $7\frac{1}{3} - \frac{1}{3}$ ad $1 - \frac{1}{3}$, seu $10\frac{1}{2}$ ad 1 non longe abest a diametrorum ratione duplicata $11\frac{1}{6}$ ad 1.

Cùm resistentia fili in globis majoribus minoris sit momenti, tentavi etiam experimentum in globo cujus diameter erat $18\frac{3}{4}$ digitorum. Longitudo penduli inter punctum suspensionis et centrum oscillationis erat digitorum $122\frac{1}{2}$, inter punctum suspensionis et nodum in filo $109\frac{1}{2}$ dig. Arcus primo penduli descensu a nodo descriptus 32 dig. Arcus ascensu ultimo post oscillationes quinque ab eodem nodo descriptus 28 dig. Summa arcuum seu arcus totus oscillatione mediocri descriptus 60 dig. Differentia arcuum 4 dig. (b) Ejus pars decima seu differentia inter descensum et ascensum in oscillatione mediocri $\frac{2}{5}$ dig. Ut radius $109\frac{1}{2}$ ad radium $122\frac{1}{2}$, ita arcus totus 60 dig. oscillatione mediocri a nodo descriptus ad arcum totum $67\frac{1}{3}$ dig. oscillatione mediocri a centro globi descriptum; et ita differentia $\frac{2}{5}$ ad differentiam novam 0, 4475. (c) Si longitudo penduli,

supra inventa sit resistentia uniformis ad pondus globi lignei ut 1 ad 755294, subductâ resistentiâ fili, erit uniformis resistentia globi lignei ad ejusdem pondus unciar. Rom. $57\frac{7}{8}$ ut 1 ad 760000 circiter. Quæramus nunc resistentiam uniformem globi plumbei in ultimo experimento.

Mediocris arcuum differentiæ in primâ tabulâ sumptæ sunt in cas. 1. 2. et 3. $\frac{1}{1808}$, $\frac{1}{912}$ et, $\frac{1}{586}$ respectivè. Loco V, in quantitate $A + B + C + V^2$, scribantur successivè numeri 1, 2, et 4, et prodibunt æquationes $A + B + C =$

$$\frac{1}{1808}, A + 2B + 4C = \frac{1}{912}, \text{ et } A + 4B + 16C = \frac{1}{586}, \text{ ex quibus habetur } A =$$

0,0001455, $B = 0,0004076$, et $C = 0,0000679$. Unde resistentia uniformis est ad pondus globi unciar. Rom. $26\frac{1}{2}$ ut $\frac{1}{2}$ A seu 0,000728 ad 121, id est, ut 1 ad 1662088. Jam verò cùm in hoc experimento sit $A C = 126$ digit. $B C = 1$,

$A B = 125$, si ponatur $R = \frac{1}{100}$ digit. inve-

nitur uniformis resistentia fili ad resistentiam uniformem globi ut 15625 ad 39600, sive ferè ut 2 ad 5; et ideo fili resistentia totius resistentiæ uniformis partes continet $\frac{2}{5}$. Quare uniformis resistentia globi plumbei est ad ejus pondus unciar. Rom. $26\frac{1}{2}$ ut 1 ad 2326925 circiter; et hinc uniformis resistentia globi plumbei cujus diameter est digit. 2, est ad resistentiam globi lignei uniformem cujus diameter est digit. $6\frac{7}{8}$ ut $26\frac{1}{2} \times 760000$ ad $57\frac{7}{8} \times 2326925$, hoc est, ut 19950000 ad 133374995 sive ut 1 ad 6,685.

Verùm si ponatur resistentia partim uniformis,

partim velocitatis quadrato proportionalis, resistentia globi lignei invenitur esse ad ejusdem pondus $57\frac{7}{8}$ unciar. Rom. in ratione 1 ad 450000 circiter, et resistentia uniformis globi plumbei ad ejus pondus $26\frac{1}{2}$ unciar. in ratione 1, ad 910900 per tabulam primam; et in ratione 1, ad 1021097 per tabulam secundam ultimi experimenti; undè sumptâ mediocri ratione, resistentia uniformis globi plumbei est ad pondus $26\frac{1}{2}$ unciar. ut 1 ad 966000 circiter. Et ideo, in hac resistentiæ hypothesis, uniformis resistentia globi plumbei cujus est diameter digit. 2, est ad resistentiam uniformem globi lignei cujus diameter est digit. $6\frac{7}{8}$, ut $26\frac{1}{2} \times 450000$ ad $57\frac{7}{8} \times 966000$ seu ut 1, ad 4,687, circiter.

(b) * *Ejus pars decima.* Si oscillatio ex itu et reditu penduli, seu ex bino descensu binoque ascensu componatur, quinque oscillationes sic acceptæ æquivalent oscillationibus decem quarum singulæ ex uno tantùm descensu unoque ascensu constant. Priore significatione Newtonus oscillationes quinque, de quibus hic loquitur, accepisse videtur, ut potè qui differentiam 4 digit. per num.10 dividit ut differentiam inveniat inter arcus descensu uno et subsequente ascensu descriptos in unâ mediocri oscillatione ex descensu uno unoque ascensu compositâ.

(c) * *Si longitudo penduli, in medio non resistente augetur in ratione 126 ad $122\frac{1}{2}$, tempus oscillationis, ob datam globi funependuli massam et pondus, augetur in ratione illâ subduplicatâ* (per Cor. 6. Prop. XXIV.) quod etiam in medio resistente verum est quam proximè (180).

* Mutatâ longitudine penduli et manente longitudine arcus descripti, velocitas penduli diminuetur in ratione subduplicatâ longitudinis

manente longitudine arcûs descripti, augetur in ratione 126 ad $122\frac{1}{2}$ tempus oscillationis augetur, et velocitas penduli diminueretur in ratione illâ subduplicatâ, maneret verò arcuum descensu et subsequente ascensu descriptorum differentia 0, 4475. Deinde si arcus descriptus augetur in ratione $124\frac{5}{8}$ ad $67\frac{1}{8}$, differentia ista 0, 4475 (^d) augetur in duplicatâ illa ratione, ideóque evaderet 1, 5295. Hæc ita se haberent, ex hypothesi quod resistentia penduli esset in duplicatâ ratione velocitatis. Ergo si pendulum describeret arcum totum $124\frac{5}{8}$ digitorum, et longitudo ejus inter punctum suspensionis et centrum oscillationis esset 126 digitorum, differentia arcuum descensu et subsequente ascensu descriptorum foret 1, 5295 digitorum. Et hæc differentia ducta in pondus globi penduli, quod erat unciarum 208, producit 318, 136. Rursus ubi pendulum superius ex globo ligneo constructum centro oscillationis, quod a puncto suspensionis digitos 126 distabat, describebat arcum totum $124\frac{5}{8}$ digitorum, differentia arcuum descensu et ascensu descriptum (^e) fuit $\frac{126}{121}$ in

$\frac{8}{9\frac{2}{3}}$, quæ ducta in pondus globi, quod erat unciarum $57\frac{7}{8}$, producit 49,

396. Duxi autem differentias hasce in pondera globorum, ut invenirem eorum resistentias. Nam differentiæ oriuntur ex resistentiis, (^f) suntque ut resistentiæ directè et pondera inversè. Sunt igitur resistentiæ ut numeri 318, 136 et 49, 396. Pars autem resistentiæ globi minoris, quæ est in duplicatâ ratione velocitatis, erat ad resistentiam totam ut 0, 56752 ad 0, 61675, id est, ut 45, 453 ad 49, 396; et pars resistentiæ globi majoris

penduli, (ideóque inversè ut tempus); nam velocitates descensu per arcus quosvis acquisitæ sunt in ratione subduplicatâ abscissarum illis arcubus correspondentium; chordæ verò pro quibus arcus sumere hic liceat, sunt mediæ proportionales inter abscissas suas et circulorum diametros, si ergo sumantur arcus æquales in circulis inæqualibus, abscissæ eorum arcuum erunt inversè ut diametri circulorum sive inversè ut eorum radii, hoc est inversè ut longitudines pendulorum, ergo velocitates quæ sunt in ratione subduplicatâ abscissarum, erunt in ratione subduplicatâ inversâ longitudinum pendulorum; cum ergo arcuum differentiæ sint ut resistentia et quadratum temporis conjunctim, resistentiaque sit ut quadratum velocitatis, sitque quadratum velocitatis inversè ut longitudo pendulorum; et quadratum temporis directè ut longitudo pendulorum, compensatis rationibus manebunt eadem arcuum differentiæ, si mutata pendulorum longitudo arcus æquales describantur.

(^d) * *Augetur in duplicatâ illâ ratione* (per Cor. 2. Prop. XXXI.).

(^e) * *Fuit* $\frac{126}{121}$ *in* $\frac{8}{9\frac{2}{3}}$. Cùm enim in cas. 6. experimenti primi penduli seu fili ad nodum usquè longitudo esset 121 digit. arcus descriptus erat $119\frac{5}{9}$ digit. et arcuum differentia $\frac{8}{9\frac{2}{3}}$ digit.

Et mutata penduli longitudine in ratione 126 ad 121, arcus descriptus et differentia mutantur in eâdem ratione, fiebatque proindè arcus $\frac{126}{121}$

$\times 119\frac{5}{9}$, seu $124\frac{5}{8}$ digit. et differentia $\frac{126}{121}$

$\times \frac{8}{9\frac{2}{3}}$ digit.

(^f) * *Suntque ut resistentiæ directè et pondera inversè*. Nam (per Cor. Prop. XXX.) differentiæ illæ in datos numeros ductæ sunt ad penduli longitudinem, ut resistentia ad gravitatem seu pondus globi penduli; data igitur penduli longitudine, differentiæ illæ sunt ut resistentiæ directæ et pondera inversè.

propemodum æquatur ipsius resistantiæ toti; ideoque partes illæ sunt ut 318, 136 et 45,453 quamproximè, id est, ut 7 et 1. Sunt autem globorum diametri $18\frac{3}{4}$ et $6\frac{7}{8}$; et harum quadrata $351\frac{9}{16}$ et $47\frac{1}{4}$ sunt ut 7,438 et 1, id est, ut globorum resistantiæ 7 et 1 quamproximè. Differentia rationum haud major est, quam quæ ex fili resistantiâ oriri potuit. Igitur resistantiarum partes illæ quæ sunt, paribus globis, ut quadrata velocitatum, sunt etiam, paribus velocitatibus, ut quadrata diametrorum globorum.

Cæterum globorum, quibus usus sum in his experimentis, maximus non erat perfectè sphaericus, et propterea in calculo hic allato minutias quasdam brevitatis gratiâ neglexi; de calculo accurato in experimento non satis accurato minimè sollicitus. Optarim itaque, (5) cùm demonstratio

(5) 187. * *Cùm demonstratio vacui, &c.* Utrum resistantia quam in motis corporibus experimur, tota sit in eorum externâ superficie, an verò partes etiam internæ in superficiebus propriis resistantiam notabilem sentiant, experimentis globorum in medio resistente oscillantium inveniri potest. Nam si, exempli causâ, globorum in dato medio paribus velocitatibus motorum resistantiæ semper essent in duplicatâ diametrorum ratione, insensibilis foret in partibus internis resistantia; cum enim resistantia illa interna a numero, magnitudine, figurâ et texturâ internarum partium penderet, non posset eadem constanter manere in globis æqualibus et heterogeneis, ligneis v. g. et plumbeis, nec in globis inæqualibus externarum superficierum, sed potius solidorum rationem sequeretur. Porro superioribus experimentis jam probatum est in velocioribus globorum motibus, resistantias quadratis diametrorum proportionales esse quam proxime, concludendum igitur est nullam esse notabilem in partibus corporum internis resistantiam, quod tamen deinceps pluribus aliis argumentis demonstrabit Newtonus. Verum si medium quoddam æthereum vel longe subtilissimum omnes omnium corporum poros et meatus repleret, propter mediū illius ætheris summam densitatem atque inertiam omni materiæ propriam, partes internæ corporum per magnam resistantiam sentirent. At quī Cartesianum mundi pleni systema emendarunt novisque inventis ornavit eruditissimi sagacissimique mathematici, ii, repudiatis veteribus effugiis, quibus Cartesianorum vulgus utitur, ex subtilitate ac mobilitate ætheris et pororum quibus corpora omnia pertusa sunt dispositione petitis, hoc unum responsum proferunt, ætheream materiam corporum gravium motibus minime resistere, quod sit omni gravitate destituta. Duplīcis itaque generis materiam in universo distinguunt, gravem alteram cujus partes in vorticulos divisæ non sunt, alteram non gravem, omnis tamen gravitatis causam, cujus partes ex tenuissimis variorum ordinum vorticulis elasticis constant. Cùm autem vis motrix ad datum

corpus grave datâ celeritate movendum adhibenda, decrescente corporis hujus gravitate, in eadem ratione decrescat, nullaque sit ætheris gravitas, consequens esse aiunt ut corpus grave quod in æthere datâ celeritate fertur, nonnisi infinitesimam motûs sui partem ex resistantiâ ætheris finito quovis tempore deperdat. Verum præterquam quod totum hoc systema, ut elegans ac venustum, fictis fere ad arbitrium hypothesebus, quas Newtonus e physicâ experimentalī vellet eliminari, nititur, plurimisque et gravissimis aliis ex mechanica atque astronomiâ difficultatibus præaurit, adductum modò responsum his etiam laborat incommodis. Primum quidem evidens est, vim illam quæ ad corpus grave contrâ gravitatis directionem sustinendum necessaria est, cum corporis pondere decrescere debere; sed non ita manifestum est vim motricem ad datum corpus grave datâ celeritate movendum adhibendam, in ratione ponderis decrescere oportere, ubi vis illius motricis directio gravitatis directioni opposita non est, sed illi perpendicularis aut cum illâ conspirans. Præterea materia omnis æthereæ circa Solem, stellas, atque planetas singulos perniciosissimo motu in orbem acta vi centrifugâ pollet quâ a centrīs magnorum vorticum, atque etiam a centrīs singulorum vorticulorum propriis recedere nititur, undè cæterorum corporum gravitas ortum habet; at vis illa centrifuga quæ cum vi centripetâ seu gravitate conferri potest, idem præstare in æthere debet ratione motûs in datâ materiæ quantitate datâ vi motrice imprimendi, quod in cæteris corporibus gravitas præstat. Nulla igitur esse ratio videtur cur corpus grave datâ celeritate motum nonnisi infinitesimam suæ celeritatis particulam ex ætheris non gravis resistantiâ amittat, siquidem illud vi centrifugâ pollet; et, si materia æthereæ suâ vi centrifugâ vel certè vi indè ortâ corporum gravitatem producat, eorumque motum finitum acceleret et extinguat finito tempore, multò magis eadem materia corpus grave movere, aut motum ejus finito tempore extinguere debet, si finitâ velocitate in illud incurrat ac continuò urgeat, cum vis cen-

vacui ex his dependeat, ut experimenta cum globis et pluribus et majoribus et magis accuratis tentarentur. Si globi sumantur in proportionem geometricâ, putâ quorum diametri sint digitorum 4, 8, 16, 32; ex progressionem experimentorum colligetur quid in globis adhuc majoribus evenire debeat.

Jam verò conferendo resistentias diversorum fluidorum inter se, tentavi sequentia. Arcam ligneam paravi longitudine pedum quatuor, latitudine et altitudine pedis unius. Hanc operculo nudatam implevi aquâ fontanâ, fecique ut immersa pendula in medio aquæ oscillando moverentur. Globus autem plumbeus pondere $166\frac{1}{6}$ unciarum, diametro $3\frac{3}{8}$ digitorum movebatur ut in tabulâ sequente descripsimus, existente videlicet longitudine penduli a puncto suspensionis ad punctum quoddam in filo notatum 126 digitorum, ad oscillationis autem centrum $134\frac{3}{8}$ digitorum.

<i>Arcus descensu primo a puncto in filo notato descriptus, digitorum</i>	64 32 16 8 4 2 1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$									
<i>Arcus ascensu ultimo descriptus, digitorum</i>	48 24 12 6 3 $1\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{5}{16}$									
<i>Arcuum differentia motui amisso proportionalis, digitorum</i>	16 8 4 2 1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{16}$									
<i>Numerus oscillationum in aqua</i>	$\frac{29}{60}$ $1\frac{1}{5}$ 3 $711\frac{1}{4}$ $12\frac{2}{3}$ $13\frac{1}{3}$									
<i>Numerus oscillationum in aëre</i>	$85\frac{1}{2}$ 287 535									

In experimento columnæ quartæ, motus æquales oscillationibus 535 in aëre, et $1\frac{1}{5}$ in aquâ amissi sunt. Erant quidem oscillationes in aëre paulo celeriores quàm in aquâ. At si oscillationes in aquâ in eâ ratione accelerarentur ut motus pendulorum in medio utroque fierent æquivalentes, maneret numerus idem oscillationum $1\frac{1}{5}$ in aquâ, quibus ^(h) motus idem ac

trifuga infinitesima sit, si cum vi quâ corpus spatium finitum tempore infinito describit, conferatur.

* Et quidem resistentia ex gravitate materiæ occurrentis non pendet, sed ex ejus inertîâ, quâ fit ut nullum corpus ab alio motum suscipiat quin tantumdem motus in eo destruat, idque mechanici communiter statuunt tam ex consensu omnium quorumcumque phenomenorum, ubi (semotâ gravitatis consideratione) nullus motus motum producendo non consumitur, quam ex principiis metaphysicis quâ liquet quod si res ita se non haberet, vel minimus motus infinitum motum produceret, totaque universi moles ex atomi progressionem dimoveretur, quod absurdum. Unde si æther non resisteret, hoc est vi inertie careret, fingendæ forent duæ materiæ species, quarum altera vi inertie prædita foret, altera

vero non, ita ut quamvis ab occurrente materia dimoveatur, nihil tollat de ejus motu; simul autem statuitur quod id æther corporum motum sistere potest aut mutare quomodocumque, nam si æther sit gravitatis causa oportet ut illa ipsa materia æthereâ quæ corporis moti actione moveatur, dum tamen nihil quicquam de illius motu tollit, possit illud idem corpus si sursum feratur sistere, in adversum ejus directionem mutare, &c. Quæ metaphysicè etiam inter se repugnare videntur, nec satis fuisse perpensa ab ingeniosisimis Cartesianismi restauratoribus.

^(h) * *Motus idem ac prius amitteretur.* Differentia arcuum motui amisso proportionalis, est ut resistentia et quadratum temporis conjunctim (per Cor. 5. Lem. X.); sed aucta paululum velocitate, resistentia quamproximè augetur in ejus ratione duplicatâ (per Hyp.) et simul qua-

prius amitteretur; ob resistantiam auctam et simul quadratum temporis diminutum in eâdem ratione illâ duplicatâ. Paribus igitur pendulorum velocitatibus motus æquales in aëre oscillationibus 535 et in aquâ oscillationibus $1\frac{1}{2}$ amissi sunt; ⁽ⁱ⁾ ideóque resistantia penduli in aquâ est ad ejus resistantiam in aëre ut 535 ad $1\frac{1}{2}$. Hæc est proportio resistantiarum totarum in casu columnæ quartæ.

Designet jam $A V + C V^2$ differentiam arcuum in descensu et subsequente ascensu descriptorum a globo in aëre cum velocitate maximâ V moto; et cum velocitas maxima in casu columnæ quartæ sit ad velocitatem maximam in casu columnæ primæ, ut 1 ad 8; et differentia illa arcuum in casu columnæ quartæ ad differentiam in casu columnæ primæ ^(k) ut $\frac{2}{535}$ ad $\frac{16}{85\frac{1}{2}}$, seu ut $85\frac{1}{2}$ ad 4280: scribamus in his casibus 1 et 8 pro velocitatibus, atque $85\frac{1}{2}$ et 4280 pro differentiis arcuum, et fiet $A + C = 85\frac{1}{2}$ et $8A + 64C = 4280$ seu $A + 8C = 535$; indeque per reductionem æquationum proveniet $7C = 449\frac{1}{2}$ et $C = 64\frac{3}{4}$ et $A = 21\frac{2}{7}$: atque ideò resistantia, ^(l) cùm sit ut $\frac{7}{11} A V + \frac{3}{4} C V^2$, erit ut $13\frac{6}{11} V + 48\frac{9}{16} V^2$. Quare in casu columnæ quartæ, ubi velocitas erat 1, resistantia tota est ad partem suam quadrato velocitatis proportionalem, ut $13\frac{6}{11} + 48\frac{9}{16}$ seu $61\frac{1}{7}$ ad $48\frac{9}{16}$; et idcirco resistantia penduli in aquâ est ad resistantiæ partem illam in aëre, quæ quadrato velocitatis proportionalis est, quæque sola in motibus velocioribus consideranda venit, ^(m) ut $61\frac{1}{7}$ ad $48\frac{9}{16}$ et 535 ad $1\frac{1}{2}$ conjunctim, id est, ut 571 ad 1. Si penduli in aquâ oscillantis filum totum fuisset immersum, resistantia ejus fuisset adhuc major; adeò ut penduli in aquâ oscillantis resistantia illa, quæ velocitatis quadrato proportionalis est, quæque sola in corporibus velocioribus consi-

dratum temporis minuitur in eâdem ratione illâ duplicatâ, quia totus arcus descriptus numero oscillationum $1\frac{1}{2}$ idem quam proximè manet. Quare motus amissus numero oscillationum $1\frac{1}{2}$ idem manet, si oscillationes in aquâ accelerentur ut dictum est (vid. not. ^(c) pag. 181.)

^(l) * *Ideóque resistantia penduli.* Nam motus in aëre amissus unâ mediocri oscillatione, quâ arcus digit. 14 describitur, est pars $\frac{1}{3\frac{1}{3}}$ motus totius oscillationibus 535, amissi; et similiter motus in aquâ amissus æquali oscillatione quâ arcus digit. 14 pari velocitate describeretur est quam proximè pars $\frac{1}{1\frac{1}{2}}$ ejusdem motus totius

amissi oscillationibus $1\frac{1}{2}$ in aquâ et oscillationibus 535 in aëre. Quare cùm resistantiæ totæ unâ oscillatione mediocri sint ut partes illæ motus amissæ, est resistantia penduli in aquâ ad ejus

resistentiam in aëre ut $\frac{1}{1\frac{1}{2}}$ ad $\frac{1}{3\frac{1}{3}}$, id est, ut 535 ad $1\frac{1}{2}$.

^(k) * *Ut $\frac{2}{535}$ ad $\frac{16}{85\frac{1}{2}}$.* Dividendo nimirum arcuum differentias per numerum oscillationum ut differentia in unâ mediocri oscillatione habeatur, quemadmodum suprâ factum est.

^(l) * *Cùm sit ut $\frac{7}{11} A V + \frac{3}{4} C V^2$ (per Cor. Prop XXX.).*

^(m) * *Ut $61\frac{1}{7}$ ad, &c.* Est enim, ex suprâ dictis, resistantia in aquâ ad resistantiam totam in aëre ut 535 ad $1\frac{1}{2}$ et resistantia tota in aëre ad resistantiæ partem illam in aëre quæ velocitatis quadrato proportionalis est ut $61\frac{1}{7}$ ad $48\frac{9}{16}$, et idcirco (ex æquo et per compositionem rationum) resistantia penduli in aquâ est ad resistantiæ partem illam in aëre, &c.

deranda venit, sit ad resistantiam ejusdem penduli totius, eadem cum velocitate in aëre oscillantis, ⁽ⁿ⁾ ut 850 ad 1 circiter, hoc est, ut densitas aquæ ad densitatem aëris quamproximè.

In hoc calculo sumi quoque deberet pars illa resistantiæ penduli in aquâ, quæ esset ut quadratum velocitatis, sed (quod mirum forte videatur) resistantia in aqua augebatur in ratione velocitatis plusquam duplicatâ. Ejus rei causam investigando, in hanc incidi, quod arca nimis angusta esset pro magnitudine globi penduli, et motum aquæ cedentis præ angustia suâ nimis impendebat. Nam si globus pendulus, cujus diameter erat digiti unius, immergeretur; resistantia augebatur, in duplicatâ ratione velocitatis quam proximè. Id tentabam construendo pendulum ex globis duobus, quorum inferior et minor oscillaretur in aquâ, superior et major proximè supra aquam filo affixus esset, et in aëre oscillando, adjuvaret motum penduli eumque diuturniorem redderet. Experimenta autem hoc modo instituta se habebant ut ^(o) in tabulâ sequente describitur.

<i>Arcus descensu primo descriptus</i>	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
<i>Arcus ascensu ultimo descriptus</i>	12	6	3	$1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{16}$
<i>Arcuum diff. motui amisso proport.</i>	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
<i>Numerus oscillationum</i>	$3\frac{3}{8}$	$6\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{2}$	$21\frac{1}{3}$	34	53	$62\frac{1}{3}$

Conferendo resistantias mediorum inter se, effeci etiam ut pendula ferrea oscillarentur in argento vivo. Longitudo fili ferrei erat pedum quasi trium, et diameter globi penduli quasi tertia pars digiti. Ad filum autem proximè supra mercurium affixus erat globus alius plumbeus satis magnus ad motum penduli diutius continuandum. Tum vasculum, quod capiebat quasi libras tres argenti vivi, implebam vicibus alternis argento vivo et aquâ communi, ut pendulo in fluido utroque successivè oscillante, invenirem proportionem resistantiarum; et prodiiit resistantia argenti vivi ad resistantiam aquæ ut 13 vel 14 ad 1 circiter: id est, ut densitas argenti vivi ad densitatem aquæ. Ubi globum pendulum paulo majorem adhibebam, putà cujus diameter esset quasi $\frac{1}{3}$ vel $\frac{2}{3}$ partes digiti, prodibat resistantia argenti vivi in eâ ratione ad resistantiam aquæ, quam habet numerus 12

(ⁿ) * *Ut 850. ad 1 circiter.* Si enim resistantia fili ponatur ut suprâ factum est, æqualis tertiæ parti resistantiæ totius in aëre, erit fere resistantia penduli in aquâ ad ejus resistantiam totam in aëre ut $535 - \frac{6}{13}$ ad $1\frac{1}{2} - \frac{6}{13}$, seu ut 2673 ad 4, et $2673 \times 61\frac{16}{17}$ ad $4 \times 483\frac{9}{6}$, ut 850 ad 1 circiter.

(^o) * *In tabulâ sequente.* Arcuum differentiarum dividantur per numerum oscillationum in

casu unoquoque, et prodibunt differentiarum in oscillatione unâ mediocri 1.1851; 0.3076; .0827; .0235; .0073; .0023; .0010 quæ sunt quam proximè ut quadrata velocitatum, sive ut 16; 4; 1; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{16}$; $\frac{1}{64}$; $\frac{1}{256}$ in majoribus oscillationibus priores enim termini sunt proximè sequentium fere quadrupli, in minoribus verò oscillationibus præcedentes termini sunt in minore ratione ad sequentes.

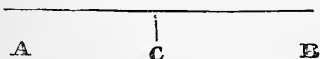
vel 10 ad 1 circiter. Sed experimento priori magis fidendum est, propterea quod in his ultimis vas nimis angustum fuit pro magnitudine globi immersi. Ampliato globo, deberet etiam vas ampliari. Constitueram quidem hujusmodi experimenta in vasis majoribus et in liquoribus tum metallorum fusorum, tum aliis quibusdam tam calidis quam frigidis repetere: sed omnia experiri non vacat, et ex jam descriptis satis liquet resistantiam corporum celeriter motorum densitati fluidorum in quibus moventur proportionalem esse quam proximè. Non dico accuratè. Nam fluida tenaciora, pari densitate, proculdubio magis resistunt quàm liquidiora, ut oleum frigidum quam calidum, calidum quàm aqua pluvialis, aqua quàm spiritus vini. Verum in liquoribus, qui ad sensum satis fluidi sunt, ut in aëre, in aquâ seu dulci seu salsâ, in spiritibus vini, terebinthi et salium, in oleo a fœcibus per distillationem liberato et calefacto, oleoque vitrioli et mercurio, ac metallis liquefactis, et si qui sint alii, qui tam fluidi sunt ut in vasis agitati motum impressum diutius conservent, effusique liberrimè in guttas decurrendo resolvantur, nullus dubito quin regula allata satis accuratè obtineat: præsertim si experimenta in corporibus pendulis et majoribus et velocius motis instituuntur.

Denique cùm nonnullorum opinio sit, medium quoddam æthereum et longè subtilissimum extare, quod omnes omnium corporum poros et meatus liberrimè permeet; a tali autem medio per corporum poros fluente resistantia oriri debeat: ut tentarem an resistantia, quam in motis corporibus experimur, tota sit in eorum externâ superficie, an vero partes etiam internæ in superficiebus propriis resistantiam notabilem sentiant, excogitavi experimentum tale. Filo pedum undecim longitudinis ab unco chalybeo satis firmo, mediante annulo chalybeo, suspendebam pyxidem abiignam rotundam, ad constituendum pendulum longitudinis prædictæ. Uncus sursum præacutus erat acie concavâ, ut annulus arcu suo superiore aciei annexus liberrimè moveretur. Arcui autem inferiori annectebatur filum. Pendulum ita constitutum deducebam a perpendiculari ad distantiam quasi pedum sex, idque secundum planum aciei unci perpendicularare, ne annulus, oscillante pendulo, supra aciem unci ultro citroque laberetur. Nam punctum suspensionis, in quo annulus uncum tangit, immotum manere debet. Locum igitur accuratè notabam, ad quem deduxeram pendulum, dein pendulo demisso notabam alia tria loca ad quæ redibat in fine oscillationis primæ, secundæ ac tertiæ. Hoc repetebam sæpius, ut loca illa quam potui accuratissimè invenirem. Tum pyxidem plumbo et gravioribus, quæ ad manus erant, metallis implebam. Sed prius ponderabam pyxidem vacuum, unâ cum parte fili quæ circum pyxidemolvebatur ac dimidio.

partis reliquæ quæ inter uncum et pyxidem pendulam tendebatur. Nam filum tensum (P) dimidio ponderis sui pendulum a perpendicularo digressum semper urget. Huic ponderi addebam pondus aëris quem pyxis capiebat. Et pondus totum erat quasi pars septuagesima octava pyxididis metallorum plenæ. Tum quoniam pyxis metallorum plena, pondere suo tendendo filum, augebat longitudinem penduli, contrahebam filum ut penduli jam oscillantis eadem esset longitudo ac prius. Dein pendulo ad locum primo notatum retracto ac dimisso, numerabam oscillationes quasi septuaginta et septem, donec pyxis ad locum secundo notatum rediret, totidemque subinde donec pyxis ad locum tertio notatum rediret, atque rursus totidem donec pyxis reditu suo attingeret locum quartum. Unde concludo quod resistentia tota pyxididis plenæ non majorem habebat proportionem ad resistentiam pyxididis vacuæ quàm 78 ad 77. Nam si æquales essent ambarum resistentiæ, pyxis plena ob vim suam insitam septuagies et octies majorem vi insitâ pyxididis vacuæ, motum suum oscillatorium tanto diutius conservare deberet, atque ideò completis semper oscillationibus 78 (9) ad loca illa notata redire. Rediit autem ad eadem completis oscillationibus 77.

Designet igitur A resistentiam pyxididis in ipsius superficie externâ, et B resistentiam pyxididis vacuæ in partibus internis; et si resistentiæ corporum æquivelocium in partibus internis sint ut materia, seu numerus particularum quibus resistitur: erit 78 B resistentia pyxididis plenæ in ipsius partibus internis: ideòque pyxididis vacuæ resistentia tota A + B erit ad

(P) * *Dimidio ponderis sui.* Fili tensi A B homogenei et æqualis ubique crassitiei centrum gravitatis est in loco medio C, (59. Lib. I.) ideòque vis quâ filum pondere suo toto P, ad rotandum circâ A, urgetur, est ut $A C \times P$, seu



ut $\frac{1}{2} P \times A B$ (63. Lib. I.) jam si inveniendum sit pondus Q in B locandum ut momentum $Q \times A B$ æqualeat momento seu vi fili totius; erit $Q \times A B = \frac{1}{2} P \times A B$, ideòque $Q = \frac{1}{2} P$. Quare filum tensum dimidio ponderis sui P pendulum a perpendicularo digressum semper urget.

(9) * *Ad loca illa notata redire.* Si resistentiæ in singulis oscillationibus essent æquales, motus amissi, ut potè resistentiis proportionales, essent quoque æquales; sed motus amissi, paribus oscillationum temporibus, sunt ut massæ seu pondera corporum et spatia motibus amissis describenda conjunctim; ideòque spatia illa essent ut pondera inversè; hoc est, spatium motu pixidis vacuæ amisso in unâ oscillatione describendum, esset

ad spatium motu pixidis plenæ oscillatione unâ amisso percurrendum ut 78 ad 1, et propterea spatia illa, completâ unicâ pixidis vacuæ oscillatione, et pixidis plenæ oscillationibus 78 absolutis, forent æqualia quamproximè, atquè ideò pixis plena, completis semper oscillationibus 78, ad loca notata rediret.

Cùm in hac Sectione VI. Newtonus de solo corporum in cycloide oscillantium motu egerit, multa verò a recentioribus authoribus inventa sint, quibus generalis motuum in curvis quiblibet theoria longe promotæ est, principia quibus usi sunt sequenti Problemate breviter exponemus.

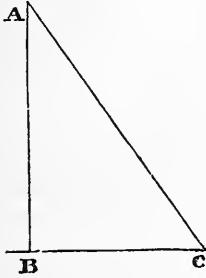
PROBLEMATÀ.

188. Tendente vi gravitatis uniformi ubique perpendiculariter ad planum horizontis, definire motum corporis per curvam quamlibet ascendentis vel descendentis in medio uniformi cujus resistentia est ut velocitatis functio quælibet.

De corporum ascensu ac descensu in lineis rectis ad horizontem quomodocumque inclinatis

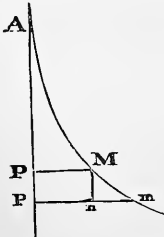
pyxidis plenæ resistantiam totam $A + 78 B$ ut 77 ad 78, et divisim $A + B$ ad 77 B, ut 77 ad 1, indeque $A + B$ ad B ut 77×77 ad 1,

agere hic necessum non est; si enim corpus in lineâ rectâ $A C$ ad horizontem $B C$ utcumque inclinâtâ ascendat vel descendat, resistantia et



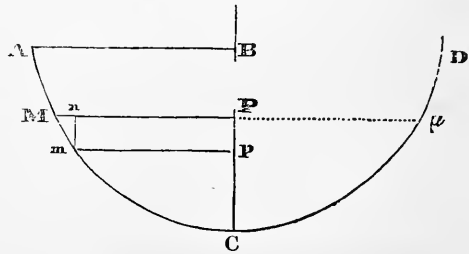
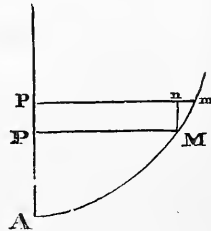
celeritas in quibuscumque locis et spatium descriptum ac tempus quo descriptum est, definiuntur per Prop. III. Sect. I., 8. et 9. Sect. II., 15. et 14. Sect. III. ac per notas iisdem locis adjunctas. Cum enim vis gravitatis secundum directionem $A B$ urgentis sit ad ipsius partem quæ agit juxta directionem $A C$, in datâ ratione lineæ $A C$ ad $A B$, seu in datâ ratione sinûs totius ad sinum anguli inclinationis $A C B$; si loco vis gravitatis horizonti perpendicularis adhibeatur in calculis et constructionibus pars illius data quæ secundum directionem $A C$ agit, constructiones calculique in citatis locis non mutantur. Superest igitur ut corporis in curvâ lineâ ascendentis aut descendents motum definiamus.

Descendat primum corpus e loco dato A per curvam $A M$, ducatur verticalis $A P$, ad quam ex punctis M , et m , infinite propinquis demittantur perpendiculara $M P$, $m p$, et ex M ad p in perpendicularum $M n$. Gravitatis constans secundum directionem verticali $A P$



parallelam semper agens sit $= g$, resistantia in loco $M = r$, velocitas corporis ibidem $= v$; $r d s = - v d v$ quarum æquationum altera in

tempus quo describitur $A M = t$, $A P = x$, $A M = s$, $P p = M n = d x$, et $M m = d s$. Jam verò $M m$, est ad $M n$, seu $d s$ ad $d x$, ut vis gravitatis g ad ipsius partem in directione $M m$ agentem quæ ideò erit $= \frac{g d x}{d s}$; subducatur vis resistantiæ r , et vis residua quæ corpus in loco M , juxta directionem $M m$ urgetur, erit $= \frac{g d x}{d s} - r$. Undè (18) fit $g d x - r d s = v d v$. Hujus autem æquationis fluens ita sumi debet ut evanescentibus x et s evanescat quoque v si velocitas corporis in loco A nulla sit, et fiat $v = c$, si velocitas corporis in A , sit $= c$. Simili modo si corpus e loco dato A per arcum $A M$ ascendat, et omnia ut modò supposuimus maneant, erit (18) $g d x + r d s = - v d v$, cujus æquationis fluentem ita sumi oportet ut positis x et $s = 0$, fiat v , æqualis velocitati in loco A datæ.



Si abscissa x in verticali $B C$ per curvæ $A C D$ punctum infimum C ducta capiatur, sitque $B P = x$, et cætera maneant ut supra, erit adhuc pro corporis descensu $g d x - r d s = v d v$; at pro ascensu per arcum $C \mu$ si data sint puncta A et B , dicaturque $C \mu$ vel $A C \mu = s$, erit $- g d x + r d s = - v d v$, seu adhuc $g d x - r d s = v d v$, quia crescente s decrescit x et contrâ. Si vero dicatur $C P = x$ et $C M = s$, quia hæc quantitates respectu aliarum $B P$, et $A M$ negativæ sunt, fiet pro descensu $- g d x + r d s = v d v$, seu $g d x - r d s = - v d v$, et pro ascensu si dicatur $C \mu = s$ erit $g d x + r d s = - v d v$ quarum æquationum altera in

et divisim A ad B ut 5928 ad 1. Est igitur resistentia pyxidis vacuæ in partibus internis quinquies millies minor quam ejusdem resistentia in externâ superficie, et amplius. Sic verò disputamus ex hypothese quod major illa resistentia pyxidis plenæ, non ab aliâ aliquâ causâ latente oriatur, sed ab actione solâ fluidi alicujus subtilis in metallum inclusum.

Hoc experimentum recitavi memoriter. Nam charta, in quâ illud aliquando descripseram, intercidit. Unde fractas quasdam numerorum partes, quæ memoriâ exciderunt, omittere compulsus sum.

Nam omnia denuò tentare non vacat. Primâ vice, cùm unco infirmo usus essem, pyxis plena citius retardabatur. Causam quærendo, reperi quod uncus infirmus cedebat ponderi pyxidis, et ejus oscillationibus obsequendo in partes omnes flectebatur. Parabam igitur uncum firmum, ut punctum suspensionis immotum maneret, et tunc omnia ita evenerunt uti supra descripsimus.

alteram abit, mutato signo quantitati r , præfixo. Ex datâ igitur lege resistentiæ, loco r scribatur ipsius valor per v et datas quantitates, et ex datâ æquatione ad curvam A M, loco $d x$ scribatur valor ejus per $d s$, s et datas quantitates in superioribus formulis seu æquationibus; et deinde per curvarum quadraturas vel per series, capiantur, ut oportet, formularum fluentes, obtinebitur v per s et contrâ, atque etiam r per s , et quia tempus t , quo arcus s describitur est $S \cdot \frac{d s}{v}$, dabitur quoque tempus.

Q. e. i.

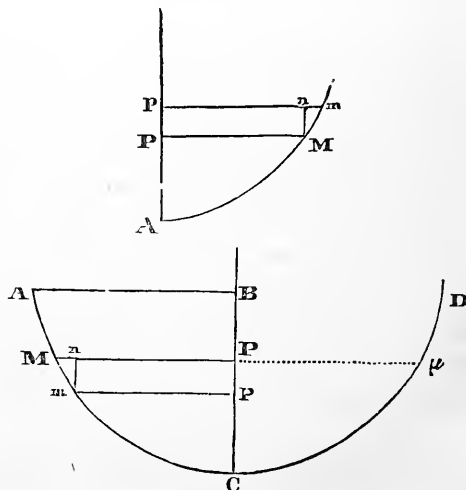
Exempli causâ. Sit resistentia partim uniformis, partim velocitatis quadrato proportionalis, quæ est hypothesis naturæ, seu sit $r = \frac{a a + v v}{b}$, dicanturque B P = x , A M = s et æquatio $g d x - r d s = v d v$ in hanc migrabit $g d x - \frac{a a d s}{b} = v d v + \frac{v v d s}{b}$; ut hoc secundum æquationis membrum debitam formam acquirat, ponatur $d s = \frac{\frac{1}{2} b d z}{z}$, seu $s = \frac{1}{2} b L z$, æquatio evadet $g z d x - \frac{1}{2} a a d z = z v d v + \frac{1}{2} v v d z$, sumptis fluentibus, sit $g S \cdot z d x - \frac{1}{2} a a z = \frac{1}{2} z v v$. Undè invenietur $v v = \frac{2 g S \cdot z d x}{z}$

— $a a$. Est autem $S \cdot z d x$, area curvæ cujus abscissa x et ordinata z ; et z datur per s , ope logarithmica, et x per s ope æquationis ad curvam A M. Sit h numerus cujus logarithmus est unitas, seu $L \cdot h = 1$, erit $s \cdot L \cdot h = \frac{1}{2} b L z$,

$$\text{et } \frac{2 s}{b} L \cdot h = L \cdot h \frac{2 s}{b} = L \cdot z. \text{ atque } h \frac{2 s}{b} = z,$$

$$\text{undè habetur } v v = \frac{2 g S \cdot h \frac{2 s}{b} d x}{h \frac{2 s}{b}} - a a.$$

Si in his æquationibus ponatur $a = 0$, definiatur motus corporis in lineâ qualibet curvâ



descendentis et ascendens in medio uniformi, cujus resistentia velocitatis quadrato proportionalis est. Cæterum totam hanc materiam copiosissimè et accuratissimè tractavit clariss. Eulerus Tom. II. Mechan.

SECTIO VII.

De motu fluidorum et resistantiâ projectilium.

PROPOSITIO XXXII. THEOREMA XXVI.

Si corporum systemata duo similia ex æquali particularum numero constant, et particulae correspondentes similes sint et proportionales, singulae in uno systemate singulis in altero, et similiter sitae inter se, ac datam habeant rationem densitatis ad invicem, et inter se temporibus proportionalibus similiter moveri incipiant (eae inter se quae in uno sunt systemate et eae inter se quae sunt in altero) et si non tangant se mutuo quae in eodem sunt systemate, nisi in momentis reflexionum, neque attrahant, vel fugent se mutuò, nisi viribus acceleratricibus quae sint ut particularum correspondentium diametri inversè et quadrata velocitatum directè: dico quod systematum particulae illae pergent inter se temporibus proportionalibus () similiter moveri.*

Corpora similia et similiter sita temporibus proportionalibus inter se similiter moveri dico, quorum situs ad invicem in fine temporum illorum semper sunt similes: putà si particulae unius systematis cum alterius particulis correspondentibus conferantur. Unde tempora erunt proportionalia, in quibus similes et proportionales figurarum similium partes a particulis correspondentibus describuntur. Igitur si duo sint ejusmodi systemata, particulae correspondentes, ob similitudinem incæptorum motuum, pergent similiter moveri, usque donec sibi mutuo occurrant. Nam si nullis agitantur viribus, progredientur uniformiter (e) in lineis rectis per motûs leg. 1. Si viribus aliquibus se mutuo agitant, et vires illae sint ut particularum correspondentium diametri inversè et quadrata velocitatum directè,

(*) * *Similiter moveri.* Sunto A et a, P et p, S et s, &c. particulae in duobus systematibus sibi mutuò correspondentes. Particula A in suo systemate tempore T, describat spatium quam minimum A B, et particula correspondens a, in altero systemate tempore t, describat spatium a b, priori A B, simile similiterque situm, ita ut sit A B, ad a b, ut diameter particulae A, ad diametrum particulae a, sive ut A S ad a s, vel P S ad p s, et angulus A S B æqualis angulo a s b,

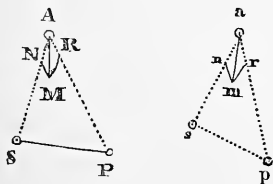
atque S A B æqualis s a b. Et aliae sibi mutuò correspondentes particulae quiescant vel simili modo moveantur. His positis, demonstrandum est, quod si sumantur tempora alia quae sint ut T et t, particulae correspondentes erunt utrinque similiter positae.

(e) * *In lineis rectis per motûs leg. 1.* Ideoque ob velocitates uniformes et similes motuum directiones pergent similiter moveri temporibus proportionalibus, usque ad occursum suum primum.

quoniam particularum situs sunt similes et vires proportionales, ^(t) vires totæ quibus particulæ correspondentes agitantur, ex viribus singulis agitantibus (per legem Corollarium secundum) compositæ, similes habebunt determinationes, perinde ac si centra inter particulas similiter sita respicerent; et erunt vires illæ totæ ad invicem ut vires singulæ componentes, hoc est, ut correspondentium particularum diametri inversè, et quadrata velocitatum directè: et propterea efficient ut correspondentes particulæ figuras similes describere pergant. ^(u) Hæc ita se habebunt (per Corol.

^(t) * *Vires totæ quibus particulæ correspondentes agitantur similes habebunt determinationes, et erunt ad invicem ut correspondentium particularum diametri inversè et quadrata velocitatum directè.*

* Particula A inter duas S et P, et particula a inter duas s et p sint similiter sitæ, et quæcumque celeritate in directione similiter positâ particulæ illæ A et a ferantur, trahanturque vel furgentur illæ particulæ A et a à particulis S et P, s et p per vires quæ sint ut diametri particularum correspondentium inversè sive ut lineæ homologæ inversè, et quadrata velocitatum directè, dico primò quod directio vis compositæ trahentis particulas A et a similiter posita erit in utroque systemate, nam anguli S A P et s a p, quos faciunt vires agentes, ex hypothesi æquales sunt, vis autem composita sequetur diagonalem quæ faciat angulos cum directione utriusque vis componentis quorum sinus sint reciproci ut vires agentes, per naturam virium compositarum, sit ea diagonalis hic A M, illic a m, erit ergo sinus anguli S A M,



ad sinum anguli P A M, inversè ut vis particulæ S ad vim particulæ P sive directè ut lineæ homologæ S A et P A (nam quoniam de unico corpore A nunc agitur ratio quadratorum velocitatum hic nihil mutat) pariter sinus anguli s a m est ad sinum anguli p a m ut s a ad p a; sed est S A ad P A sicut s a ad p a ex hypothesi, ergo anguli æquales S A P et s a p in eadem ratione secantur per lineas A M, a m, ideòque anguli S A M et s a m, M A P et m a p sunt æquales, ergo directio vis compositæ trahentis particulas A et a in singulo systemate similiter est posita. Q. erat 1.

2. Vires illæ compositæ erunt ut particularum diametri inversè et quadrata velocitatum directè.

Secetur utcumque in directione A S lineola

A N quæ vim particulæ S exprimat, ducaturque N M, parallela A P, et ex M ducatur M R parallela A S, fiet parallelogrammum A N M R, in quo $M R = A N$, et angulus A M R = ang. M A N, ideòque A N ad A R ut sinus anguli M A R ad sinum ang. M A N, sive ut P A ad S A, hoc est ut vires particularum S et P, ideòque A R exprimet vim particulæ P, et A M exprimet vim compositam ex viribus S et P. Sumatur in a lineola a n, quæ sit ad A N, ut a s ad A S inversè, et ut quadratum velocitatis in a ad quadratum velocitatis in A directè, ductisque n m et m r parallelis lineis a p, a s erunt a n et a r ut vires particularum s et p, et a m exprimet vim ex iis compositam.

Sed ob similitudinem triangulorum A N M, a n m est A N ad A M sicut a n ad a m, sive vis particulæ A, ad vim compositam ex particulis S et P, ut vis particulæ a ad vim compositam ex particulis s et p, ideòque vicissim, vis particulæ A ad vim particulæ a, ut, vis composita ex vi particularum S et P, ad vim compositam ex viribus particularum s et p; sed vis particulæ A est ad vim particulæ a, inversè ut particularum diametri, et directè ut velocitatum quadrata ex hypothesi, ergo vires compositæ sunt in eadem ratione. Q. e. d.

Idem ratiocinium ad vires compositas ex pluribus particulis extendetur. Unde vires totæ, &c.

^(u) * *Hæc ita se habebunt* (per Cor. 1. et 8. Prop. IV. Lib. I.). Aut quod idem est per hoc Lemma.

189. *Lemma.* Si corpora duo A, a, circæ centra immota S, s, projiciantur secundum directiones A D, a d, quæ cum distantis A S et a s æquales angulos D A S, d a s constituunt, et urgeantur viribus acceleratricibus centra illa S, s respicientibus, quæ semper sint inter se ut quadrata velocitatum corporum directè et distantia a centris inversè, corpora illa figuras similes circæ centra S et s describent, similesque et proportionales figurarum illarum partes temporibus proportionalibus percurrent.

In projectilium directionibus capiantur partes quam minimæ A D, a d distantis A S, a s proportionales. Jungantur S D, s d et corpora A, a temporibus quibusvis T, t describant arcus A B, a b qui lineas S D, s d attingunt. Sumantur arcus A F, a b qui eodem tempusculo descripti sint, et ductâ F G parallelâ S D, erit

1. et 8. Prop. IV. Lib. I.) si modò centra illa quiescant. Sin moveantur, quoniam (*) ob translationum similitudinem, similes manent eorum situs inter systematum particulas; similes inducentur mutationes in figuris quas particulæ describunt. Similes igitur erunt correspondentium et similium particularum motus (†) usque ad occursum suos primos, et propterea similes occursum, et similes reflexiones, et subinde (per jam ostensa) similes motus inter se donec iterum in se mutuo inciderint, et sic deinceps in infinitum. Q. e. d.

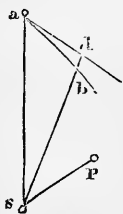
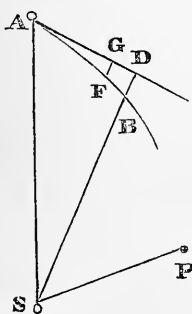
Corol. 1. Hinc si corpora duo quævis, quæ similia sint et ad systematum particulas correspondentes similiter sita, inter ipsas temporibus proportionalibus similiter moveri incipiant, sintque eorum magnitudines ac densitates ad invicem ut magnitudines ac densitates correspondentium particularum: hæc pergent temporibus proportionalibus similiter moveri.

(4. Lib. I.) F G ad b d ut vis centralis quæ corpus A urgetur ad vim centralem quæ urgetur corpus a; et quia vires illæ (per Hyp.) sunt ut quadratum velocitatum directæ et distantie A S, a s, inversè, velocitates autem sunt ut spatia quæ

$\times A S = A S : a s$; erit $B D : b d = A S : a s$, et ob similitudinem figurarum, ut A D ad a d, ideòque ob æquales angulos D et d, triangula A D B, a d b erunt similia, et propterea arcus A B, a b, similes et similiter siti. Simili modo demonstrabitur quod corpora e locis B et b progressa similes arcus ac similiter positos describant, atque ità deinceps. Describent ergò figuras similes circà centra S et s. His verò demonstratis patet (196. Lib. I.) quod describent similes et proportionales figurarum similium partes temporibus proportionalibus, seu quæ semper sint ut tempora T et t.

(*) * Ob translationum similitudinem. Oriuntur enim centrorum illorum translationes ex causis proportionalibus et similiter agentibus, videlicet ex similibus particularum similium et correspondentium motibus, adeò ut quemadmodum initio motus centra similiter moveri cœperunt, similiter quoque deinceps moveri pergant.

(†) * Usque ad occursum suos primos, &c. Nam cum particularum correspondentium distantie, post quævis tempora proportionalia, sint semper in datâ diametrorum ratione in duobus systematibus (ex dem.), necesse est ut distantie temporibus proportionalibus evanescant, et proindè ut particularum occursum primi contingant, ubi particulæ illæ figurarum similium partes similes descriperunt. Ex quo sequitur particularum illarum occursum primos similes fore, tum ratione directionum, quod jam demonstratum est, tum etiam ratione velocitatum et quantitatum motus. Siquidem spatia percurta temporibus proportionalibus sunt semper in datâ ratione, ideòque velocitates in locis similibus sunt semper in datâ ratione, et indè ob particularum correspondentium similitudinem et datam densitatum rationem, quantitates motus quæ sunt ut velocitates et densitates et volumina conjunctim, in locis similibus manent in datâ ratione. Reflexiones igitur quæ ex ejusmodi motibus atque occursums similibus nascuntur; similes erunt.



simul descripta fuissent in tangente A G, a d, erit F G ad b d, ut $A G^2 \times a s$ ad $a d^2 \times A S$. Sed (per Cor. 1. Lem. XI.) $B D : F G = A D^2 : A G^2$; quare (per compositionem rationum et ex æquo) $B D : b d = A D^2 \times a s : a d^2 \times A S$. Cum igitur ob triangulorum A S D, a s d, similitudinem (ex Hyp.) sit A D : a d = A S : a s et ideò $A D^2 \times a s : a d^2$

Est enim eadem ratio partium majorum systematis utriusque atque particularum.

Corol. 2. Et similes et similiter positæ systematum partes omnes quiescant inter se: et earum duæ, quæ cæteris majores sint, et sibi mutuo in utroque systemate correspondeant, secundum lineas similiter sitas simili cum motu utcumque moveri incipiant: hæ similes in reliquis systematum partibus excitabunt motus, et pergent inter ipsas temporibus proportionalibus similiter moveri; atque ideò spatia diametris suis proportionalia describere.

PROPOSITIO XXXIII. THEOREMA XXVII.

Iisdem positis, dico quod systematum partes majores resistuntur in ratione compositâ ex duplicatâ ratione velocitatum suarum et duplicatâ ratione diametrorum et ratione densitatis partium systematum.

Nam resistentia oritur partim ex viribus centripetis vel centrifugis quibus particulæ systematum se mutuo agitant, partim ex occursibus et reflexionibus particularum et partium majorum. Prioris autem generis resistentiæ sunt ad invicem ut vires totæ motrices a quibus oriuntur, ^(a) id est, ut vires totæ acceleratrices et quantitates materiæ in partibus correspondentibus; hoc est (per Hypothesin) ut quadrata velocitatum directè et distantia particularum correspondentium inversè et quantitates materiæ in partibus correspondentibus directè: ideòque cum distantia particularum systematis unius sint ad distantias correspondentes particularum alterius, ut diameter particulæ vel partis in systemate priore ad diametrum particulæ vel partis correspondentis in altero, ^(a) et quantitates materiæ sint ut densitates partium et cubi diametrorum; resistentiæ sunt ad invicem ut quadrata velocitatum et quadrata diametrorum et densitates partium systematum. Q. e. d. ^(b) Posterioris generis resistentiæ sunt

^(a) * *Id est, ut vires totæ acceleratrices et quantitates materiæ* (per Def. 8. Lib. I.).

^(a) * *Et quantitates materiæ sint, &c.* Quantitates materiæ sunt ut densitates et volumina partium conjunctim (2. Lib. I.), et ob partium similitudinem, volumina sunt ut cubi laterum homologorum, seu diametrorum, ideòque quantitates materiæ sunt ut densitates partium et cubi diametrorum.

^(b) * *Posterioris generis resistentiæ, &c.* Si enim vires reflexionum supponantur æquales, resistentiæ sunt ut numeri reflexionum seu occursuum; et si numeri reflexionum æquantur, resistentiæ sunt ut vires reflexionum correspondentium;

undè, conjunctis his rationibus, resistentiæ quæ ex particularum et partium majorum occursibus et reflexionibus oriuntur, sunt semper ut reflexionum correspondentium numeri et vires conjunctim. Numeri autem reflexionum, cæteris paribus, sunt ad invicem ut velocitates partium correspondentium directè, et, cæteris paribus, sunt inversè ut spatia inter particularum et partium correspondentium occursus seu reflexiones intercepta, id est, inversè ut partium correspondentium diametri, ideòque numeri reflexionum sunt ad invicem ut velocitates partium correspondentium directè et earundem diametri inversè. *Et vires reflexionum sunt ut motus quantitates*

ut reflexionum correspondentium numeri et vires conjunctim. Numeri autem reflexionum sunt ad invicem ut velocitates partium correspondentium directè, et spatia inter earum reflexiones inversè. Et vires reflexionum sunt ut velocitates et magnitudines et densitates partium correspondentium conjunctim; id est, ut velocitates et diametrorum cubi et densitates partium. Et conjunctis his omnibus rationibus, resistentiæ partium correspondentium sunt ad invicem ut quadrata velocitatum et quadrata diametrorum et densitates partium conjunctim. Q. e. d.

Corol. 1. Igitur si systemata illa sint fluida duo elastica ad modum aëris, et partes eorum quiescant inter se: corpora autem duo similia et partibus fluidorum quoad magnitudinem et densitatem proportionalia, et inter partes illas similiter posita, secundum lineas similiter positas, utcumque projiciantur; vires autem acceleratrices, quibus particulæ fluidorum se mutuo agitant, sint ut corporum projectorum diametri inversè, et quadrata velocitatum directè: corpora illa temporibus proportionalibus similes excitabunt motus in fluidis, et spatia similia ac diametris suis ^(c) proportionalia describent.

Corol. 2. Proinde in eodem fluido projectile velox resistentiam patitur, quæ est in duplicatâ ratione velocitatis quàm proximè. Nam si vires, quibus particulæ distantes se mutuo agitant, augerentur in duplicatâ ratione velocitatis, ^(d) resistentia foret in eâdem ratione duplicatâ accuratè; ^(e) ideóque in medio, cujus partes ab invicem distantes sese viribus nullis agitant, resistentia est in duplicatâ ratione velocitatis accuratè. Sunt igitur media tria A, B, C ex partibus similibus et æqualibus et secundum distantias æquales regulariter dispositis constantia. Partes mediorum A et B fugiant se mutuo viribus quæ sint ad invicem ut T et V, illæ medii C ejusmodi viribus omninò destituantur. Et si corpora quatuor æqualia D, E, F, G in his mediis moveantur, priora duo D et E in prioribus

in occursibus id est, ut velocitates et diametrorum cubi et densitates partium correspondentium. Et conjunctis his omnibus rationibus, &c.

^(c) * *Proportionalia describent.* Probatur enim ut in dem. Prop. XXXII. Lemmate (189) similes similium figurarum partes temporibus proportionalibus a corporibus illis semper describi. Undè Corollarium hoc patet (per Cor. 1. et 2. Prop. XXXII.).

^(d) * *Resistentia foret in eâdem ratione duplicatâ accuratè.* Nam si idem corpus variâ cum velocitate in uno eodemque fluido similiter projiciatur, eadem sunt resistentiæ, ac si corpora duo similia et æqualia similiter projicerentur in duobus fluidis priori omnino paribus; sed in hoc casu, ob æquales inter se partium correspon-

dentium diametros et densitates, resistentiæ sunt in duplicatâ ratione velocitatum accuratè (per Prop. XXXIII. et ejus Corol. 1.). Ergò, &c.

^(e) * *Ideóque in medio, &c.* In medio cujus partes ab invicem distantes sese viribus quibuscumque in ratione velocitatis duplicatâ crescentibus agitant, resistentia (ex modò dem.) est semper in eâdem ratione duplicatâ; quare si vires illæ quibus particulæ sese agitant, supponantur quàm minimæ, manebit semper resistentia in ratione velocitatis duplicatâ accuratè; evanescant tandem illæ vires, manet resistentia in ratione velocitatis duplicata; sed idem melius patet per secundam partem demonstrationis Propositionis hujus XXXIII.

duobus A et B, et altera duo F et G in tertio C; sitque velocitas corporis D ad velocitatem corporis E, et velocitas corporis F ad velocitatem corporis G in subduplicatâ ratione virium T ad vires V: resistantia corporis D erit ad resistantiam corporis E, et resistantia corporis F ad resistantiam corporis G, ^(f) in velocitatum ratione duplicatâ; et propterea resistantia corporis D erit ad resistantiam corporis F ut resistantia corporis E ad resistantiam corporis G. Sunt corpora D et F æquivelocia ut et corpora E et G; et augendo velocitates corporum D et F in ratione quâcunque, ac diminuendo vires particularum medii B in eâdem ratione duplicatâ, ^(e) accedet medium B ad formam et conditionem medii C pro lubitu, et idcirco resistantiæ corporum æqualium et æquivelocium E et G in his mediis, perpetuò accedent ad æqualitatem, ita ut earum differentia evadat tandem minor quam data quævis. Proinde cùm resistantiæ corporum D et F sint ad invicem ut resistantiæ corporum E et G, accedent etiam hæ similiter ad rationem æqualitatis. Corporum igitur D et F, ubi velocissimè moventur, resistantiæ sunt æquales quam proximè: et propterea cùm resistantia corporis F sit in duplicatâ ratione velocitatis, erit resistantia corporis D in eâdem ratione quàm proximè.

^(b) *Corol. 3.* Corporis in fluido quovis elastico velocissimè moti eadem ferè est resistantia ac si partes fluidi viribus suis centrifugis destituerentur, seque mutuo non fugerent: si modo fluidi vis elastica ex particularum viribus centrifugis oriatur, et velocitas adeò magna sit ut vires non habeant satis temporis ad agendum.

Corol. 4. Proinde cùm resistantiæ similium et æquivelocium corporum, in medio cujus partes distantes se mutuo non fugiunt, ⁽ⁱ⁾ sint ut quadrata diametrorum; sunt etiam æquivelocium et celerrimè motorum corporum resistantiæ in fluido elastico ut quadrata diametrorum quàm proximè.

Corol. 5. Et cùm corpora similia, æqualia et æquivelocia, in mediis ejusdem densitatis, quorum particulæ se mutuo non fugiunt, sive particulæ illæ sint plures et minores, sive pauciores et majores, in æqualem materiæ quantitatem temporibus æqualibus impingant, eique æqualem motus

^(f) * *In velocitatum ratione duplicatâ.* (Ex demonstratis initio *Corol. hujus.*)

^(e) * *Accedet medium B, &c.* Si enim velocitates corporum D et F, quam maximè augerentur vires particularum medii B, manentibus viribus medii A et velocitate corporis E, quam maximè decrescerent, quia est semper vis medii A ad vim medii B ut quadratum velocitatis corporis D ad quadratum velocitatis corporis E.

^(b) * *Corollarium 3.* Patet per *Cor. 2.* in quo vis T, quâ particulæ medii A in quo corpus

D movetur se fugiunt, qualiscumque supponitur; corporum D et F ubi velocissimè moventur, resistantiis manentibus æqualibus quam proximè, licet medii C in quo corpus F movetur, particularum viribus centrifugis prorsus destituantur. Patet etiam ex eo quod supponatur vires non habere satis temporis ad agendum, unde casus redit ad eum in quo vires illæ nullæ sunt.

⁽ⁱ⁾ * *Sint ut quadrata diametrorum.* Per 2. partem dem. *Prop. hujus*, ob datas corporum velocitates et medii densitatem datam.

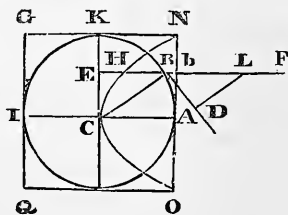
quantitatem imprimant, et vicissim (per motûs legem tertiam) æqualem ab eâdem reactionem patiantur, hoc est, æqualiter resistantur: manifestum est etiam quod in ejusdem densitatis fluidis elasticis, ubi velocissimè moventur, æquales sint eorum resistentiæ quam proximè; sive fluida illa ex particulis crassioribus constent, sive ex omnium subtilissimis constituentur. Ex medii subtilitate resistentia projectilium celerrimè motorum non multum diminuitur.

Corol. 6. Hæc omnia ita se habent in fluidis, quorum vis elastica ex particularum viribus centrifugis originem ducit. Quod si vis illa aliunde oriatur, veluti ex particularum expansione ad instar lanæ vel ramorum arborum, aut ex aliâ quâvis causâ, quâ motus particularum inter se redduntur minus liberi: resistentia, ob minorem medii fluiditatem, erit major quàm in superioribus Corollariis.

PROPOSITIO XXXIV. THEOREMA XXVIII.

Si globus et cylindrus æqualibus diametris descripti, in medio raro ex particulis æqualibus et ad æquales ab invicem distantias liberè dispositis constante, secundum plagam axis cylindri, æquali cum velocitate moveantur: erit resistentia globi duplo minor quàm resistentia cylindri.

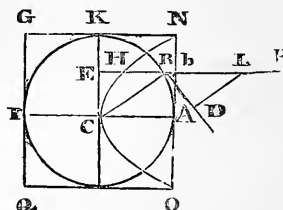
Nam quoniam actio medii in corpus eadem est (per legem Corol. 5.) sive corpus in medio quiescente moveatur, sive medii particulæ eâdem cum velocitate ^(*) impingant in corpus quiescens: consideremus corpus tanquam quiescens, et videamus quo impetu urgebitur a medio movente. Designet igitur $ABKI$ corpus sphæricum centro C semi-diametro CA descriptum, et incidant particulæ medii datâ cum velocitate in corpus illud sphæricum, secundum rectas ipsi AC parallelas: sitque FB ejusmodi recta. In eâ capiatur LB semi-diametro CB æqualis, et ducatur BD quæ sphæram tangat in B . In KC et BD demittantur perpendiculares BE , LD , et vis quâ particula medii, secundum rectam FB obliquè incidendo, globum ferit in B , erit ad vim quâ particula eadem cylindrum $ONGQ$ axe ACI circa globum descriptum perpendicula-



(*) * *Impingant in corpus quiescens.* Eadem enim est in utroque casu velocitas respectiva, eademque proinde vis percussionis (perdem. in Cor. 5. leg. mot.) idem quoque

manifestum est per motûs leg. 3. quia fluidum et corpus ob reactionem actioni æqualem et contrariam, in utroque casu in se mutuè agunt.

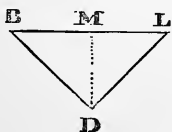
riter feiret in b, ⁽¹⁾ ut L D ad L B vel B E ad B C. Rursus efficacia hujus vis ad movendum globum secundum incidentiæ suæ plagam F B vel A C, est ad ejusdem efficaciam ad movendum globum secundum plagam determinationis suæ, id est, secundum plagam rectæ B C quâ globum directè urget ^(m) ut B E ad B C. Et ⁽ⁿ⁾ conjunctis rationibus, efficacia particulæ in globum secundum rectam F B obliquè incidentis, ad movendum eundem secundum plagam incidentiæ suæ, est ad efficaciam particulæ ejusdem secundum eandem rectam in cylindrum perpendiculariter incidentis, ad ipsum movendum in plagam eandem, ut B E quadratum ad B C quadratum. Quare si in b E, quæ perpendicularis est ad cylindri basem circulearem N A O et æqualis radio A C, sumatur b H æqualis $\frac{B E \text{ quad.}}{C B}$: erit b H ad b E ut effectus particulæ in globum



ad effectum particulæ in cylindrum. ^(o) Et propterea solidum quod a rectis omnibus b H occupatur erit ad solidum quod a rectis omnibus b E occupatur, ut effectus particularum omnium in globum ad effectum particularum omnium in cylindrum. ^(p) Sed solidum prius est parabolis

⁽¹⁾ * Ut L D ad L B vel B E ad B C. Si enim recta data L B exponat vim quâ particula medii circulearem basim cylindri perpendiculariter ferit in b, et vis illa (per leg. Cor. 2.) resolvatur in vires B D, L D, vis B D juxta directionem tangentis in B agens nullam efficaciam habet ad globum promovendum et recta L D vim exponet quâ particula medii globulum perpendiculariter ferit in B. Quia verò radius C B, tangenti perpendicularis est, et ideò (per constr.) D L parallela C B, trianguula rectangula C E B, B D L, similia sunt, imò ob B L = C B (per constr.) æqualia; est igitur L D ad L B ut B E ad B C.

^(m) 190. * Ut B E ad B C. Vis L D ductâ ex puncto D ad L B perpendiculari D M, iterum resolvatur in vires L M et M D, et ob



triangulorum L M D, L D B, similitudinem, erit vis L M ad vim L D, ut L D ad L B, seu ut B E ad B C; nulla verò ratio habenda est vis M D, cujus directio perpendicularis est ad axem

A I, quia simili constructione factâ ad alteram hujus axis partem in puncto sphaeræ quod puncto B directè oppositum est, vis M D, vi æquali et directè oppositâ eliditur. Unde sola consideranda est vis L M, quæ secundum directionem axi A I parallelam agit. Est autem vis L M ad vim L B quâ particula medii circulearem basim cylindri perpendiculariter ferit in b, ut L D ² ad L B ², ob continuè proportionales L M, L D, L B.

⁽ⁿ⁾ * Conjunctis rationibus. Et ex æquo.

^(o) * Et propterea solidum. Si in omnibus rectæ N A punctis erigantur perpendicularia ut b H et b E, sitque N H C curva quam punctum H perpetuò tangit, et recta K C locus omnium punctorum E; solidum quod perpendicularis omnibus b H, per totam basim cylindri ductis occupatur, æquale erit conoidi seu figuræ solidæ quæ ex rotatione figuræ planæ N H C A circa axem C A factâ generatur, et solidum quod a rectis omnibus b E occupatur erit cylindrus ex rotatione rectanguli A K circa eundem axem C A factâ descriptus.

^(p) * Sed solidum prius. Cùm (per constr.) sit $b H = \frac{B E^2}{C B}$ ideòque $b H \times C B =$

$\overline{B E^2} = \overline{B C^2} - \overline{C E^2}$ et (ex naturâ circuli) $B C = C A = K C$, ideòque $B E^2 = K C^2 - C E^2$ et $b H \times C B$, seu $K C - E H \times K C$, seu $K C^2 - K C \times E H = K C^2$

resistatur: (r) biseca altitudinem OD in Q et producat OQ ad S ut sit QS æqualis QC , et erit S vertex conici cuius frustum quæritur.

describit, erit $pzydy$, et inde solidum ex rotatione figuræ $CPHE$, genitum, erit $S.pzydy$, fluente hac ita sumptâ ut factâ $y = 0$ ea evanescat. Quare cûm cylindrus convolutione rectanguli $CPVI$, descriptus sit $\frac{1}{2}payy$, resistentia solidi ex revolutione figuræ ABR geniti, erit ad resistantiam baseos ipsius circuli radio BR descripti ut $S.pzydy$ ad $\frac{1}{2}payy$, seu ut $S.zydy$ ad $\frac{1}{2}ayy$.

196. Sit K B A ellipsis vel hyperbola
cujus vertex A axis principalis A I. Sit semi-
axis principalis = b, semi-latus rectum = c,
 $\Delta R = x$, $R B = y$, et erit $b y y =$
 $2 b c x - c x x$ æquatio ad ellipsim; et $b y y =$
 $2 b c x + c x x$, æquatio ad hyperbolam.
Prioris æquationis fluxio $b y d y = b c d x$

$$-cx \, dx, \text{ ex qua habetur } dx^2 = \frac{b^2 y^2 \, dy^2}{(bc - cx)^2} \\ = \frac{b^2 y^2 \, dy^2}{b^2 cc - 2bccx + ccxx} = \frac{b^2 y^2 \, dy^2}{bcc - cxy}.$$

Hinc æquatio (194) a d $y^2 = z d x^2 + z d y^2$,

in hanc abit * a d $y^2 = \frac{z b y^2 d y^2}{-c y^2 + b c c} +$
 $z d x^2$ sive dividendo per $d y^2$ et ad uerum

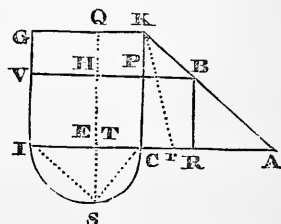
z d y² sive dividendo per d y² et ad communem denominatorem revocando utrumque æquationis membrum fit $\frac{a c y^2}{d y^2} \pm \frac{a b c c}{d y^2} =$

$$\begin{array}{r} b y^2 z - c y^2 z + b c c z \\ - a c y^2 + a b c c \end{array} \text{ ergo est } z =$$

$$\frac{\text{seos ut} + \frac{c y^2}{2(b+c)} + \frac{b^2 c^2}{2(b+c)^2} \times \frac{b+c}{b c c}}{L.} \text{ ad } y^2. \text{ Pro conoide}$$

parabolico, fiat in formulâ resistantiæ conoidis elliptici axis b infinitus, cæterisque terminis in quibus b non occurrit deletis, erit conoidis parabolici resistantia ad resistantiam suæ baseos

ut $\frac{b^2 c^2}{2 b^2} \times L. \frac{b y^2 + b c c}{b c c}$ ad y^2 , sive ut

$$\frac{c^2}{2} L. \frac{y^2 + c c}{c c} \text{ ad } y^2.$$


ratione duplicatâ sinûs anguli KAC ad sinum totum. Simili modo resistentia conii quem recta BA rotata describit est ad resistentiam circuli radio BR descripti in eâdem ratione duplicatâ KCA ad KA ; et (dividendo) resistentia annuli conici quem recta KB , circâ C A rotata describit est ad resistentiam annuli circularis quem in eâdem convolutione describit recta KP in eâdem duplicatâ ratione KCA ad KA . Resistentia verò conii truncati convolutione figuræ KBR circâ C R , geniti, est ad resistentiam baseos ipsius sive circuli radio CK , descripti ut solidum quod figura $CKQHVI$, circâ CI rotando describit, ad cylindrum ex rotatione rectanguli $CKGI$ ortum. Est autem solidum prius summa duorum cylindrorum, revolutione rectangulorum $CKQT$ et $THVI$ circa CI productorum, hoc est, (ob areas circulorum radio- rum quadratis proportionales) ut summa $CK^2 \times CT + CP^2 \times TI$.

(^r) 198. * *Biseca altitudinem*, &c. Datis
C K et C R invenienda sit positio rectæ K B

(⁵) Unde obiter, cùm angulus C S B semper sit acutus, (¹) consequens est, quod si solidum A D B E, convolutione figuræ ellipticæ vel ovalis

ut resistentia frusti conici quod per revolutionem figuræ K B R circa C A producitur sit omnium minima. Resistentia illa est ut $C K^2 \times C T + C P^2 \times T I$; sed $K A^2 : C K^2 = C I : C T = \frac{C K^2 \times C I}{K A^2}$; et similiter $K A^2 : C A^2 = C I : T I = \frac{C A^2 \times C I}{K A^2}$. Quare ob datam C I, resis-

tentia conici truncati erit ut $\frac{C K + C P^2 \times C A^2}{K A^2}$.

Dicantur $K C = b$, $C R = 2c$, $C A = x$, ideóque $K A^2 = b b + x x$, et quia $C A (x) : K C (b) = R A (x - 2c) : B R$, seu $C P$, erit $C P = \frac{b x - 2 c b}{x}$, et indè resistentia

conici truncati erit ut $\frac{b^4 + (b x - 2 c b)^2}{b b + x x} = \frac{b^4 + b^2 x^2 - 4 b^2 c x + 4 c^2 b^2}{b b + x x} =$

$b b + \frac{4 b b c c - 4 b b c x}{b b + x x}$. Capiatur hujus

quantitatis fluxio et (40) ponatur nihilo æqualis, fiet $-\frac{4 b b c d x}{b b + x x} - 2 x d x \frac{(4 b b c c - 4 b b c x)}{(b b + x x)^2}$

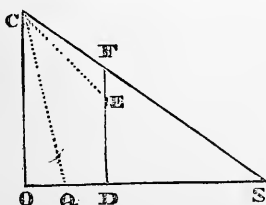
$= 0$, sive $\frac{1}{b b + x x} - \frac{2 c x - 2 x x}{(b b + x x)^2} = 0$, ideó-

que $-b b - x x - 2 c x + 2 x x = 0$, undè habetur $x x - 2 c x = b b$, et indè eruitur

$x = c + \sqrt{b b + c c}$. Biseca igitur altitudinem C R in r, ut sit $C r = c$, et juncta K r

$= \sqrt{b b + c c}$, erit x, seu $C A = C r + K r$, sicut Newtonus in constructione posuit.

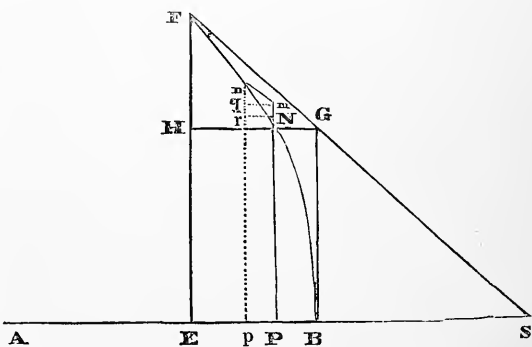
(⁶) 199. * Unde obiter. Angulus externus (vid. fig. textûs) æqualis est summæ angulorum æqualium Q C S et Q S C, id est, angulo C S B; et quia C O Q rectus est, angulus C Q O ideóque et æqualis C S B, est semper acutus. Altitudo O D quam minima evadat tandemque evanescat; et quoniam (in hac Hypoth.) rectæ O C, O S, Q S, C Q æquales



fiunt, angulus C S O, et æqualis D F S fit semi-rectus, ejusque complementum ad duos rectos

D F C grad. 155. Ducatur ad F D recta quælibet C E et evanescente O D resistentia conici truncati quem figura C F D circa O S rotata describit, erit in suo genere minima (198), ideóque minor quam resistentia conici truncati ex revolutione figuræ C E D circa O S geniti; subducatur utrinquè resistentia circuli quem recta D E rotando describit; et resistentia superficiei ex rotatione figuræ C F E circa O S, minor erit quam resistentia annuli conici quem in eadem revolutione describit recta C E.

(¹) 200. Consequens est. Ut hæc consequentia pateat, demonstrandum est resistentiam superficiei quæ per rotationem figuræ F G B circa axem A B gignitur, minorem esse resistentiâ superficiei quam in eadem revolutione arcus F B, describit. Ductis itaque ad curvam ordinatis verticalibus et infinitè propinquis P N, p n, et ex puncto n ad P N productam rectâ n m, parallelâ F G, atquè ex m et N in p n perpendicularibus m q, N r; dicantur F E ad axem A B normalis = b, G B = c, B P = x, P N = y, et quia productâ F G ut axi occurrat in S, est ob angulos E F S, B G S semi-rectos (per Hyp.) E S = F E = b, et B S = G B = c, erit E B = b - c. Est quoque P p = m q = q n = d x, r n = d y, et hinc q r = d y - d x, ac proindè P m = y + d y - d x, et

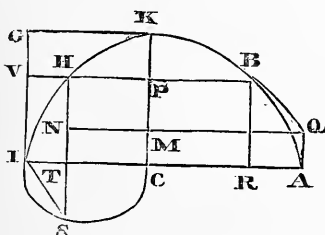


$p n = y + d y$. Vis particulæ fluidi in G B perpendiculariter incidentis sit = a, et radius circuli ad peripheriam ut 1 ad p; his positis, resistentia circuli radio P N descripti exponi poterit (195) per $\frac{1}{2} p a y y$; resistentia circuli radio P m descripti per $\frac{1}{2} p a (y + d y - d x)^2 = \frac{1}{2} p a y y + p a y d y - p a y d x$, neglectis scilicet terminis qui respectu p a y d y et p a y d x, evanescunt. Hinc resistentia annuli circularis quem recta N m, rotando describit, exponetur per differentiam $p a y d y - p a y d x$. Resistentia circuli radio p n descripti erit ut $\frac{1}{2} p a (y + d y)^2 = \frac{1}{2} p a y y + p a y d y$, ex quâ si auferatur resistentia circuli radio P m descripti, remanebit resistentia annuli circularis

B H I graduum 135, solidum, quod convolutione figuræ A D F G H I E circa axem eundem A B generatur, minus resistitur quam solidum prius, si modo utrumque secundum plagam axis sui A B progrediatur, et utriusque terminus B præcedat. Quam quidem Propositionem in construendis navibus non inutilem futuram esse censeo.

(^u) Quòd si figura D N F G, ejusmodi sit curva, ut, si ab ejus puncto

$= z$, Q A $= v$, et peripheria circuli radio 1 descripti $= p$. His positis resistentia solidi ex revolutione arcus B A circa axem C A geniti exponi potest per S. $p z y d y$, (195); resistentia verò conì truncati ex rotatione figuræ B Q A circa C A, per $\frac{1}{2} p a v v + \frac{1}{2} p y y z - \frac{1}{2} p v v z$. Sit R resistentia data solidi ex rotatione arcus totius K B A geniti, et resistentia superficiè



quam in eadem rotatione describit arcus K B, erit R — S. $p z y d y$, ideòque resistentia solidi per rotationem figuræ K B Q A, erit R — S. $p z y d y + \frac{1}{2} p a v v + \frac{1}{2} p y y z - \frac{1}{2} p v v z$. Hujus quantitatis fluxio nihilo aequalis fiat (40) et ob datam R, habebitur — $p z y d y + p a v d v + p z y d y + \frac{1}{2} p y y d z - p z v d v - \frac{1}{2} p v v d z = 0$; undè invenitur $(z - a) 2 v d v = (y y - v v) d z$. Cùm igitur sit etiam (194) $a d y^2 = z d x^2 + z d y^2$, ex his æquationibus et ex æquatione ad curvam K B A, inveniuntur valores litterarum x, y, v , seu R A, R B, et A Q. Q. e. i.

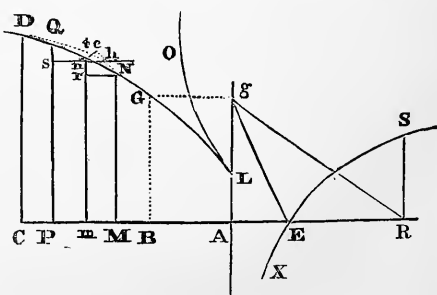
Exempli causâ. Sit K B A parabola, cujus vertex A, axis A C, latius rectum $= 4 c$, et ideò $4 c x = y y$, erit A Q $= v = \frac{1}{2} y$, ex naturâ tangentis parabolæ, $\frac{1}{2} y y = c x = v v$, $c d x = 2 v d v$, $y y - v v = 3 c x$, $y d y = 2 c d x$, $d y^2 = \frac{c d x^2}{x}$.

Undè æquatio $a d y^2 = z d x^2 + z d y^2$, in hanc mutatur $\frac{a c d x^2}{x} = z d x^2 + \frac{c z d x^2}{x}$, ex quâ habetur $z = \frac{a c}{c + x}$, et

$d z = \frac{-a c d x}{(c + x)^2}$. Ex his verò omnibus æquatione $(z - a) 2 v d v = (y y - v v) d z$, in hanc migrat $-\frac{a c x d x}{c + x} = -\frac{3 a c c x d x}{(c + x)^2}$, sive

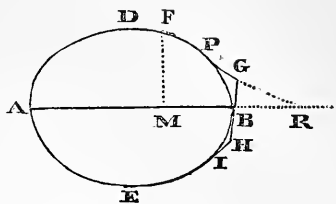
$1 = \frac{3 c}{c + x}$ ex quâ eruitur $x = 2 c$, et hinc $y = 2 c \sqrt{2}$, et $z = \frac{1}{3} a$. Quarè cùm sit a ad z , in ratione duplicatâ sinûs totius ad sinum anguli B Q M, erit $\sqrt{3}$ ad 1 ut sinus totus ad sinum anguli B Q M, qui proinde est $35^\circ. 16'$, angulus Q B R, $54^\circ. 44'$ et angulus B Q A $125^\circ. 46'$.

(^u) 203. Quòd si figura, &c. Invenienda sit curva L D, quæ circa axem C B rotata describat superficiem solidi quod in fluido motum secundum axis directionem a C versus B, minorem patiatur resistentiam quàm solidum quodvis aliud per puncta L et D parî ratione descriptum et similiter motum. Ex punctis curvæ infinitè propinquis N, n, Q, demittantur ad axem C B ordinatæ N M, n m, P Q et ad n m, Q P, perpendicularia N r, n s. Sit p peripheria circuli cujus radius est unitas, et data a vim exponat quâ singulæ fluidi particulae in rectam N M perpendiculariter incurrunt. His positis resistentia annuli circularis quem recta n r, circa axem C B rotata describit, exponi potest, ut suprâ, per $\frac{1}{2} p a \times (n m^2 - N M^2)$ seu per $p a N M \times n r$, ob $n m^2 - N M^2 = n m + N M \times (n m - N M) = 2 M N \times n r$. Et quia $n N^2$ est ad $n r^2$ ut resistentia illa ad resistentiam superficiè quam linea n N circa C B rotata describit (196) hæc resistentia erit ut $\frac{p a \times M N \times n r^3}{n N^2}$; eodemque modo patet resistentiam superficiè



ex rotatione lineæ Q n genitæ exponi posse per $\frac{p a \times m n \times Q s^3}{Q n^2}$. Fingatur curvam hanc in aliam mutari Q h N inter puncta N, Q ductam et Q s, n r tanquam magnitudine datas as-

quovis N ad axem AB demittatur perpendicularum NM , et a puncto dato G ducatur recta GR quæ parallela sit rectæ figuram tangenti in N , et axem productum secet in R , fuerit MN ad GR ut GR cub. ad $4BR \times GBq$; solidum quod figuræ hujus revolutione circa



axem AB factâ describitur, in medio raro prædicto ab A versus B movendo, minus resistetur quam aliud quodvis eâdem longitudine et latitudine descriptum solidum circulare.

sumi variantibus Nr , et ns , dicanturque constantes $MN = b$, $mn = c$, $nr = f$, $Qs = g$ et variables $Nn = v$, $nQ = z$, $Nr = m$, $ns = n$, et resistentia superficiei quam arcus Qn in N circa C B rotando describit, exponetur per $\frac{pabf^3}{vv} + \frac{pacg^3}{zz}$, si curva Qn in N sit ea quæ minimam resistentiam patitur, hujus quantitatis fluxio (40 et per Hyp.) nihilo æquanda est, et indè habetur $-\frac{2pabf^3vdv}{v^4} - \frac{2pacg^3zdz}{z^4} = 0$. Productâ ergo lineâ sn ,

usque ad novum punctum h , ad quod ducuntur lineæ Nh , Qh , in has cadant perpendiculara ne , nt , et evanescente nh , erit $th = dz$ et $eh = -dv$. Quia verò, evanescente nh triangula neh , nrN , et ntN , QsN , similia sunt; erit $Nn(v) : Nr(m) = nh(e) : eh(-dv)$, et $sn(nv) : Qn(z) = th(dz) : nh$, idè quæ ex æquo, $nv : mz = dz : -dv = \frac{mzdz}{nv}$.

Loco $-dv$, scribatur hic ipsius valor in æquatione modò inventâ, et illa in hanc migrabit $\frac{2pabf^3mzvdz}{nv^5} = \frac{2pacg^3zdz}{z^4}$, et

hinc fit $\frac{2pabf^3m}{v^4} = \frac{2pacg^3n}{z^4}$ seu $\frac{2pa \times MN \times nr^3 \times Nr}{Nn^4} = \frac{2pa \times mn \times Qs^3 \times ns}{Qn^4}$.

Undè manifestum est quantitatem $\frac{MN \times nr^3 \times Nr}{Nn^4}$ pro quolibet curvæ puncto N , datam seu constantem esse.

* Quæ quidem curva $DNFG$ (vide figuram textûs) talis esse debet, ut angulus quem facit in G cum lineâ BG sit semi-recti complementum per notam 200. illic ergo lineâ BG data, est ipsa ordinata MN et triangulum nrN est rectangulum æquicrurum, idè quæ $Nr = nr$ et $Nn^2 = 2nr^2$ ergo quantitas constans $\frac{MN \times nr^3 \times Nr}{Nn^4}$ in hanc abit $\frac{GB \times nr^4}{4nr^4}$

$= \frac{GB}{4}$. Talis ergo est hujus curvæ natura ut

quovis in puncto ducatur ordinata MN sit semper $\frac{MN \times nr^3 \times Nr}{Nn^4} = \frac{GB}{4}$, sive ponendo pro MN , y ; pro nr , dy ; pro Nr , dx ; pro Nn^2 , $dx^2 + dy^2$, erit $\frac{ydy^3dx}{dx^2 + dy^2} = \frac{GB}{4}$: sive adhibendo constructionem Newtoni,

si ducatur GR tangenti parallela, ob triangula GBR , nrN ubique similia, erit $\frac{GB}{GR} = \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$ et $\frac{BR}{GR} = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$

idè quæ $\frac{GB^3 \times BR}{GR^4} = \frac{dx^3}{dy^3 dx}$ et

$\frac{MN \times GB^3 \times BR}{GR^4} = \frac{GB}{4}$ sive $MN \times GB^2 \times 4BR = GR^4$ unde est $MN : GR = GR^3 : GB^2 \times 4BR$. Q. e. d.

Dicatur $GB = a$, fiet $\frac{ydy^3dx}{(dx^2 + dy^2)^2} =$

$\frac{a}{4}$ idè quæ $4ydx dy^3 = a(dx^2 + dy^2)^2$,

ex quâ curvæ $LN D$ per logarithmicam constructio eruitur. Ponatur $dx = \frac{zdy}{a}$, et loc

valore loco dx in æquatione ad curvam substituto, habetur $\frac{4yzdy^4}{a} = \frac{a(zz + aa)^2 dy^4}{a^4}$,

undè invenitur $y = \frac{(zz + aa)^2}{4a^2z} = \frac{z^3}{4aa} +$

$\frac{1}{2}z + \frac{aa}{4z}$, et (sumptis fluxionibus) $dy =$

$\frac{3z^2dz}{4aa} + \frac{1}{2}dz - \frac{aadz}{4zz}$; loco dy scribatur

hic ipsius valor in æquatione assumptâ $dx = \frac{zdy}{a}$, et sit $dx = \frac{3z^3dz}{4a^3} + \frac{zdz}{2a} - \frac{adz}{4z}$,

sumptisque fluentibus $x = \frac{3z^4}{16a^3} + \frac{zz}{4a} - \frac{1}{4}aLz$

+ Q const. Porro si assumatur abscissæ initium in loco B , ubi ordinata BL est omnium minima, id est (40) ubi $dy = 0$ quo supposito,

fit $\frac{5z^2dz}{4aa} + \frac{1}{2}dz - \frac{aadz}{4zz} = 0$, ideóque

$$3z^2 + 2aa = \frac{a^4}{z^2} \text{ et } z^4 + \frac{2}{3}a^2z^2 =$$

$\frac{1}{3}a^4$ undè habetur $z = a\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$ (et $y = \frac{4}{3}a\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$),

substituto hoc valore loco z , in æquatione quæ dat abscissæ x valorem, habebitur ex hypothesi initium axeos eritque $x = 0 = \frac{5a}{48} - \frac{1}{4}aL.a\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$

$$+ Q. \text{ const. et ideò } Q = -\frac{5a}{48} + \frac{1}{4}aL.a\sqrt[3]{\frac{1}{3}}.$$

* Erit igitur abscissa $x = \frac{5z^4}{16a^3} + \frac{zz}{4a} - \frac{5a}{48}$ $-\frac{1}{4}a \times L.z - L.a\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$ et ut habetur origo abscissarum, notandum quod ordinata in B sive G B æqualis sit a , ex suprâ demonstratis; cùm

itaque sit ubique $y = \frac{(zz + aa)^2}{4a^2z}$ erit in eo puncto $a = \frac{(zz + aa)^2}{4a^2z}$ ex quâ æquatione si

eruatut valor z invenietur $z = a$, ac per consequens erit $x = \frac{3a^4}{16a^3} + \frac{aa}{4a} - \frac{5a}{48} - \frac{1}{4}aL.a\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$

$$= \frac{a}{3} - \frac{1}{4}aL.\frac{1}{\sqrt[3]{3}} = \frac{a}{3} - \frac{1}{4}a \times L.\sqrt[3]{3}.$$

Describatur ergo logarithmica X V, asymptoto Y Z et subtangente æquali $\frac{1}{3}GB$, sive $\frac{1}{3}a$, in quâ sumatur ubivis ordinata p m, quæ producat in r donec p r = 3 p m, ducatur ad logarithmicam r t quæ sit asymptoto parallela, erit $\frac{1}{2}rt$ æqualis logarithmo $\sqrt[3]{3}$ in logarithmica cujus subtangens $\frac{1}{4}a$, itaque $\frac{GB}{5} - \frac{1}{2}rt = x$, quo valore transiatio ex

B ad A in axe producto habetur A origo abscissarum: in eo puncto A ductâ perpendiculari A L g, describatur logarithmica S X cujus ea linea A L g sit asymptotus, et $\frac{1}{4}GB$ sive $\frac{1}{4}a$ subtangens, et quæ producto axe in E ut sit A E = $a\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$ transeat per punctum E et sumptâ A R magnitudinis arbitrarie pro z , ductâque R S parallelâ A L logarithmicæ occurrente in S

capiatur abscissa A M, seu $x = \frac{5z^4}{16a^3} +$

$\frac{zz}{4a} - \frac{5a}{48} + R S$ nimirum $- R S$, cum est $A R > A E$, et $+ R S$ ubi $A R < A E$; ac denique capiatur ordinata M N, seu $y = \frac{(zz + aa)^2}{4a^2z}$; punctum N erit in curvâ quæsitâ

L D. Quod ut pateat, demonstrandum superest, esse $+ R S = -\frac{1}{4}a(L.z - L.a\sqrt[3]{\frac{1}{3}})$

Hoc autem manifestum est; nam $R S$, est differentia logarithmorum correspondentium quantitibus A R et A E, sive z et $a\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$ sumptorum in logistica cujus subtangens est $\frac{1}{4}a$, et hæc differentia positiva est, ubi $A R(z) > A E(a\sqrt[3]{\frac{1}{3}})$ negativa ubi $A R(z) < A E(a\sqrt[3]{\frac{1}{3}})$, et nulla, cùm fit $A R = A E$, seu $z = a\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$,

ut oportet. Quarè cùm A R superat A E, est $- R S = -\frac{1}{4}a \times L.z - L.a\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$, et ubi A E superat A R, fit $+ R S = -\frac{1}{4}a \times L.z - L.a\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$. Est igitur semper $+ R S = -\frac{1}{4}a \times L.z - L.a\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$.

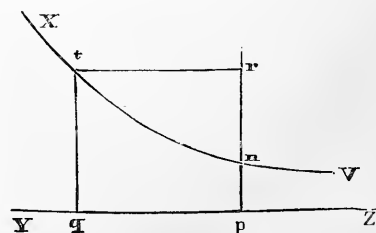
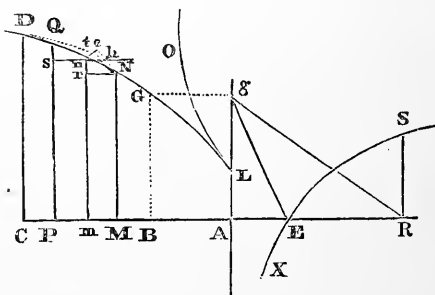
204. Datâ minimâ ordinatâ A L, curva L N D, describi potest. Nam cùm sit (ex dem.) $A L = \frac{4}{3}a\sqrt[3]{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}A E$, et G B sive A g = a, datâ A L dantur A g, A E, et subtangens logarithmicæ quæ proinde poterit describi.

205. Datis duabus ordinatis M N et C D magnitudine, curva describi potest. Si enim in æquatione $y = \frac{(zz + aa)^2}{4a^2z}$ loco y scribantur seorsim datæ M N, et C D dabuntur z et a

undè dabitur minima ordinata A L = $\frac{4}{3}a\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$.

206. Datâ ordinatâ quâlibet C D cum abscissa correspondente C A, curva describi potest.

Si enim in æquatione $y = \frac{(zz + aa)^2}{4a^2z}$, loco y scribatur data C D, habebitur z per a et datas quantitates; deinde si in æquatione alterâ $x = \frac{5z^4}{16a^3} + \frac{zz}{4a} - \frac{5a}{48} - \frac{1}{4}a \times L.z - L.a\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$, loco x substituatur data C A et loco z , ejus valor per a et datas inventus, dabitur æquatio inter a et datas quantitates, et ex hac æquatione invenietur linea a, quâ datâ, datur ordinata minima A L.



207. Recta g R, parallela est tangenti per punctum N ductæ. Est enim (per constr.) $dx = \frac{zdy}{a}$, ideóque $n r (dy) : r N (dx) = g A (a) : A R (z)$ ex quâ proportionem et propter angulum

rectum in r , et in A , patet triangula $n r N$, $g A R$, similia esse, et propterea $g R$ parallelam $n N$, seu tangenti per N ductæ. Hinc cum $A E$ sit æqualis $a \sqrt{\frac{1}{3}} = z$ ubi $z = o$ (103) erit $g E$ tangenti per L ductæ parallela, sitque $A g = a$ est $g E^2 = \frac{a^2}{3} + a^2 = \frac{4a^2}{3}$ atque adeo $g E = 2a \sqrt{\frac{1}{3}} = 2a E$ erit $g E$ ad $A E$ ut 2, ad 1, et ita sinus totus ad sinum anguli $A g E$, sive ad sinum anguli quem curva constituit cum minimâ ordinatâ $A L$, qui proindè est 50° .

208. Quoniam $A R$, in infinitum crescere ac decrescere potest si capiatur semper $B R > B E$, describetur curvæ ramus $L N D$, qui concavitatem axi $B C$ obvertit, et ab utroque axe $A C$, $A g$, in infinitum recedit; at si semper sumatur $B R < B E$, describetur alter curvæ ramus $L O$, qui priori $L D$ convexitatem offert, et ab utroque axe $B C$, $B g$, in infinitum abscedit; curva igitur $D L O$ punctum regressus habet in L , et solidum minimæ resistantiæ ex ejus circa axem $A C$ revolutione genitum, convexum vel concavum, et partim convexum, partim concavum esse potest.

209. Quoniam $d x = \frac{z dy}{a}$, erit aræ curvæ

elementum $y dx = \frac{z y dy}{a}$, elementum arcus

curvæ $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{dy \sqrt{aa + zz}}{a}$,

elementum superficiæ a curvâ circa axem $A C$ rotatâ genitæ = $\frac{2p y dy \sqrt{aa + zz}}{a}$ (si p

sit semi-peripheria circuli cujus radius est unitas); elementum solidi in eâdem revolutione descripti = $\frac{p z y^2 dy}{a}$; et resistentia superficiæ

$\frac{2p y dy \sqrt{aa + zz}}{a}$, erit $\frac{a dy^2}{dx^2 + dy^2} y dy =$

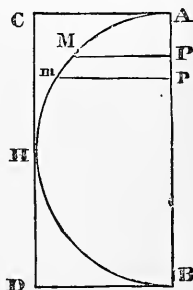
$\frac{dy^2 \times aa + zz}{aa + zz} y dy$ sive ut $\frac{y dy}{aa + zz}$. Porro si in his fluxionibus loco y , et dy , substituantur ipsarum valores qui ex æquationibus $y = \frac{(zz + aa)^2}{4aaa}$, et $dy = \frac{5z^2 dz}{4aa} + \frac{1}{2} dz$

$-\frac{aa dz}{4zz}$ habentur, fluens $S. y dx$, seu area curvæ inveniri poterit algebraicè, aliæ verò fluentes ab hyperbolæ quadraturâ perdent.

Schol. Quæ ad solidum minimæ resistantiæ spectant, ea ferè omnia mutuati sumus ex illis. Marchione Hospitalio, tum in Act. Lipsiens. an. 1699, tum in Monum. Paris. ejusdem anni. De eodem solido plurima etiam dederunt celeb. viri Joh. Bernoulli. in Act. Lips. an. 1699. 1700. Hermannus in Phoronomiâ, et Facio ad calcem Libri de Murorum Inclinatione, &c. Sed qui totam hanc Newtoni Propositionem maximâ universalitate pertractatam habere volunt, legant tractatum a clariss. Bouguero editum, et ab Academiâ Regiâ Parisiensi an. 1727. præmio condecoratum, cui titulus; De la mâtûre des Vaisseaux, nec non Monum. Paris. an. 1733.

in quibus elegantissima et universalissima legitur ultimæ scholii Newtoniani partis solutio. Rem a clariss. autore demonstratam hic observatu dignissimam judicamus, videlicet, solidum rotundum cujus constructionem modò dedimus, in quâlibet hujus solidi directione et juxtâ quamlibet fluidi impulsione, minimam omnium pati resistentiam, exceptis quibusdam casibus qui in navigationis praxi vix unquam occurrunt, cum scilicet directio solidi majores angulos cum axe constituit; et quod mirum est, in his casibus, solidum illud quod erat minimæ resistantiæ et navigationi aptissimum, solidum maximæ resistantiæ et ad usum navigationis omnium minime idoneum evadit. Quæ verò ad universalem solidorum in fluidis resistentiam pertinent, peti possunt ex auro Joh. Bernoulli Libello qui inscribitur: Essai d'une Nouvelle Theorie de la mænœuvre des Vaisseaux, et ex Hermannii Phoronomiâ.

210. Lemma. Sphæra est ad cylindrum circumscriptum ut duo ad tria. Sphæra generatur per revolutionem semi-circuli $A H B$ circa diametrum $A B$, et cylindrus sphære circumscriptus per revolutionem rectanguli $A C D B$, cujus latera $A C$, $B D$ circuli radio sunt æqualia. Ductis ordinatis infinitè propinquis $P M$, $p m$,



dicantur $AC = r$, semi-peripheria $A H B = p$, $AP = x$, $PM = dx$, et quia circulorum aræ sunt in ratione duplicatâ radiorum, erit quadratum radii CA , seu rr , ad aream circuli $A H B$, nempe rp , ut MP^2 , seu $2rx - xx$ ad aream circuli radio PM descripti, quæ ideo

erit $2px - \frac{p x x}{r}$; et hinc solidum ex rotatione

elementi $P M m p$, circa AB genitum, erit $2px dx - \frac{p x x dx}{r}$, sumptisque fluentibus,

solidum ex rotatione segmenti circularis $A M P$ ortum, erit $p x x - \frac{p x^3}{3r}$, et factâ $AP = AB$,

seu $x = 2r$, sphæra tota habetur = $4p r r - \frac{8}{3} p r r = \frac{4}{3} p r r$. Sed cylindrus sphære circumscriptus est factum ex aræ circuli radio $A C$

descripti in cylindri altitudinem AB , seu est $2p r r$. Quare sphæra est ad cylindrum circumscriptum ut $\frac{4}{3} p r r$ ad $2p r r$, id est, ut 4 ad 3,

sivè ut 2 ad 3. Q. e. d.

PROPOSITIO XXXV. PROBLEMA VII.

Si medium rarum ex particulis quam minimis quiescentibus æqualibus et ad æquales ab invicem distantias liberè dispositis constet : invenire resistentiam globi in hoc medio uniformiter progredientis.

Cas. 1. Cylindrus eâdem diametro et altitudine descriptus progredi intelligatur eâdem velocitate secundum longitudinem axis sui in eodem medio. Et ponamus quòd particulæ medii, in quas globus vel cylindrus incidit, vi reflexionis quam maximâ resiliant. Et cùm resistentia globi (per Propositionem novissimam) sit duplo minor quam resistentia cylindri, et globus sit ad cylindrum ut duo ad tria, et cylindrus incidendo perpendiculariter in particulas, ipsasque quàm maximè reflectendo, ^(x) duplam sui ipsius velocitatem ipsis communicet: cylindrus, quo tempore dimidiam longitudinem axis sui uniformiter progrediendo describit, communicabit motum particulis, ^(y) qui sit ad totum cylindri motum ut densitas medii ad densitatem cylindri; et globus, quo tempore totam longitudinem diametri suæ uniformiter progrediendo describit, ^(z) communicabit motum eundem particulis; ^(a) et quo tempore duas tertias partes diametri suæ describit, communicabit motum particulis, qui sit ad totum globi motum ut densitas medii ad densitatem globi. Et propterea globus resistentiam patitur, quæ sit ad vim quâ totus ejus motus vel auferri possit vel generari quo tempore duas tertias partes diametri suæ uniformiter progrediendo describit, ut densitas medii ad densitatem globi.

^(x) * *Duplam sui ipsius velocitatem, &c.* Cùm singulæ particulæ, cylindri respectu, minimæ sint, si nulla esset particularum medii reflexio, eâdem cum cylindro velocitate moverentur; ac accedente vi reflexionis perfectâ, velocitas illa duplicatur (53. Lib. I.).

^(y) * *Qui sit ad totum cylindri motum, &c.* Quantitates motûs sunt ut velocitates et massæ conjunctim; massæ verò sunt ut volumina et densitates; ideòque quantitates motûs ut velocitates et volumina et densitates conjunctim. Cùm igitur cylindrus quo tempore dimidiam longitudinem axis sui uniformiter progrediendo describit, medii volumen dimidio volumini cylindri æquale duplâ cum velocitate moveat, sitque proinde factum ex volumine cylindri in ipsius velocitatem æquale facto ex volumine medii moto in ejus velocitatem, motus particulis medii communicatus, erit ad totum cylindri motum ut densitas medii ad densitatem cylindri.

^(z) * *Communicabit motum eundem particulis,*

ob resistentiam globi resistentiâ cylindri duplo minorem (Prop. XXXIV. Lib. II.)

^(a) *Et quo tempore duas tertias partes, &c.*

* Huc redit compositio rationum a Newtono indicata: totus globi motus est ad cylindri motum, ut 2 ad 3, hæc enim est utriusque massæ ratio; totus cylindri motus est ad motum a cylindro communicatum quo tempore dimidiam suam longitudinem describit ut densitas cylindri (sive globi) ad densitatem medii, motus ille a cylindro communicatus idem est cum motu a globo communicato dum totam suam diametrum percurrit; denique motus ille a globo communicatus dum totam suam diametrum percurrit est ad motum ab eo globo communicatum dum percurrit duas diametri suæ tertias partes ut 3 ad 2, ideòque totus globi motus est ad motum ab eo communicatum dum percurrit duas diametri suæ partes conjunctim ut 2 ad 3, ut densitas globi ad densitatem medii, et ut 3 ad 2, sive primâ ratione et hac ultimâ sese compensantibus ut densitas globi ad densitatem medii. Q. e. d.

Cas. 2. Ponamus quòd particulæ mediæ in globum vel cylindrum incidentes non reflectantur; et cylindrus incidendo perpendiculariter in particulas simplicem suam velocitatem ipsis communicabit, ideóque resistantiam patitur duplo minorem quàm in priore casu, et resistantia globi erit etiam duplo minor quàm prius.

Cas. 3. Ponamus quòd particulæ mediæ vi reflexionis neque maximâ neque nullâ, sed mediocri aliquâ resiliant a globo; et resistantia globi erit in eâdem ratione mediocri inter resistantiam in primo casu et resistantiam in secundo. Q. e. i.

Corol. 1. Hinc si globus et particulæ sint infinitè dura, et vi omni elasticâ, et propterea etiam vi omni reflexionis destituta: resistantia globi erit ad vim quâ totus ejus motus vel auferri possit vel generari, quo tempore globus quatuor tertias partes diametri suæ describit, ut densitas mediæ ad densitatem globi.

Corol. 2. (b) Resistentia globi, cæteris paribus, est in duplicatâ ratione velocitatis.

Corol. 3. (†) Resistentia globi, cæteris paribus, est in duplicatâ ratione diametri.

Corol. 4. Resistentia globi, cæteris paribus, est ut densitas mediæ.

Corol. 5. Resistentia globi est in ratione quæ componitur ex duplicatâ ratione velocitatis et duplicatâ ratione diametri et ratione densitatis mediæ.

Corol. 6. Et motus globi cum ejus resistantia sic exponi potest. Sit A B tempus quo globus per resistantiam suam uniformiter continuatam totum suum motum amittere potest. Ad A B erigantur perpendiculara A D, B C. Sitque B C motus ille totus, et per punctum C asymptotis

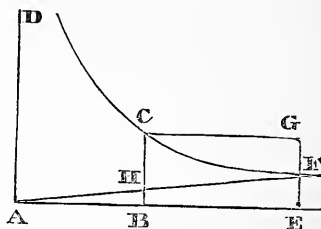
(b) * *Resistentia globi, cæteris paribus, est in duplicatâ ratione velocitatis.*

* Sint globi æquales in eodem medio moti diversâ cum velocitate; motus totus uniuscujusque est ad motum ab ipso communicatum tempore quo duas tertias suæ diametri percurrit, ut densitates globorum ad densitates mediorum, ideóque ex hypothesi in eâdem ratione, ergo etiam velocitas unius est ad velocitatem alterius ut motus ab illis communicati temporibus quibus duas tertias suarum diametrorum (æquales quippe longitudines) percurrunt. Dividantur illa tempora in partes minimas utrinque æquales, et quia resistantia singulis momentis, ejusdem globi respectu, uniformis censetur, resistantiæ momentaneæ erunt directè ut motus amissi et inversè ut tempora quibus amittuntur, sed motus amissi sunt ut velocitates directè et tempora sunt inversè ut velocitates, quia æquales longitudines percurruntur

motibus qui uniformes, saltem quam proximè, censentur, ergo resistantiæ momentaneæ sunt bis ut velocitates, hoc est in ratione duplicatâ velocitatis.

(†) * *Resistentia globi, cæteris paribus, est in duplicatâ ratione diametri.* * Sint globi æquivalentes, æquè densi, in eodem medio moti, sed diversæ sint earum diametri, fingantur duo cylindri ejusdem cum iis diametri, et etiam æquivalentes et æquè densi, resistantiæ quas patientur cylindri singulis momentis erunt ut numerus partium in quas incurrunt, illi verò numeri partium sunt ut quadrata diametrorum: sed facile liquet resistantias cylindrorum et globorum æquivalentium, ejusdem diametri, in eodem medio esse in datâ ratione, ergo ut resistantia unius cylindri ad resistantiam alterius, ita resistantia unius globi ad resistantiam alterius, sunt ergo globorum resistantiæ ut quadrata diametrorum.

A D, A B describatur hyperbola C F. Producatur A B ad punctum quodvis E. Erigatur perpendicularum E F hyperbolæ occurrens in F. Compleatur parallelogrammum C B E G, et agatur A F ipsi B C occurrens in H. Et si globus tempore quovis B E, motu suo primo B C uniformiter continuato, in medio non resistente describat spatium C B E G per aream parallelogrammi expositum, idem in medio resistente describet spatium C B E F per aream hyperbolæ expositum, et motus ejus in fine temporis illius exponetur per hyperbolæ ordinatam E F, amissâ motus ejus parte F G. (c) Et resistentia ejus in fine temporis ejusdem exponetur per longitudinem B H, amissâ resistentiæ parte C H. Patent hæc omnia per Corol. 1. et 3. Prop. V. Lib. II.



Corol. 7. Hinc si globus tempore T per resistentiam R uniformiter continuatam amittat motum suum totum M: idem globus tempore t in medio resistente per resistentiam R in duplicatâ velocitatis ratione decrescentem, (d) amittet motûs sui M partem $\frac{t M}{T + t}$, manente parte

$\frac{T M}{T + t}$; et describet spatium quod sit ad spatium motu uniformi M eodem

tempore t descriptum, ut logarithmus numeri $\frac{T + t}{T}$ multiplicatus per

numerus 2, 302585092994 est ad numerum $\frac{t}{T}$, (e) propterea quod area hyperbolica B C F E est ad rectangulum B C G E in hac proportionem.

(c) Et resistentia ejus in fine, &c. Resistentia sub initio ubi velocitas est B C, exponatur per eandem lineam B C, et quia resistentiæ sunt ut velocitatum quadrata, atque B C ad F E, ut velocitas sub initio ad velocitatem in fine temporis B E ad F E², ut B C ad lineam quæ resistentiam exponit in fine temporis B E, ideoque linea hæc = $\frac{F E^2}{B C}$. Sed (per Theor. IV. de Hyp.) et ob similitudinem triangulorum A B H, A E F, est B C : F E = A E : A B = F E : H B, et hinc H B = $\frac{F E^2}{B C}$. Quare recta H B exponet resistentiam in fine temporis B E, et proinde recta C H partem amissam resistentiæ illius quæ sub initio exponebatur per lineam B C.

(d) * Amittet motûs sui partem, &c. Pars motûs M in fine temporis t residua dicitur m, et quia (ex dem.) T : t = A B : B E, et hinc T + t : T = A E : A B, et præterea M : m = C B : F E = A E : A B; erit T + t : T = M : m, unde habetur m = $\frac{M T}{T + t}$, et inde motûs M pars amissa est M - $\frac{M T}{T + t} = \frac{t M}{T + t}$.

(e) * Propterea quod area hyperbolica. Dicantur A B = a, B C = b, B E = x, A E = a + x; et quia (Theor. IV. de Hyp.) F E = $\frac{a b}{a + x}$, elementum areæ C F E B, erit $\frac{a b d x}{a + x}$, et area ipsa C F E B = a b S. $\frac{d x}{a + x}$,

Scholium.

In hac Propositione exposui resistantiam et retardationem projectilium sphaericorum in mediis non continuis, et ostendi quod hæc resistantia sit ad vim quâ totus globi motus vel tolli possit vel generari quo tempore globus duas tertias diametri suæ partes velocitate uniformiter continuata describat, ut densitas medii ad densitatem globi, si modo globus et particulæ medii sint summè elastica et vi maximâ reflectendi polleant: quodque hæc vis sit duplo minor ubi globus et particulæ medii sunt infinitè dura et vi reflectendi prorsus destituta. In mediis autem continuis qualia sunt aqua, oleum calidum, et argentum vivum, in quibus globus non incidit immediatè in omnes fluidi particulas resistantiam generantes, sed premit tantum proximas particulas et hæc premunt alias et hæc alias, resistantia est adhuc duplò minor. Globus utique in hujusmodi mediis fluidissimis resistantiam patitur quæ est ad vim quâ totus ejus motus vel tolli possit vel generari quo tempore, motu illo uniformiter continuato, partes octo tertias diametri suæ describat, ut densitas medii ad densitatem globi. Id quod in sequentibus conabimur ostendere.

PROPOSITIO XXXVI. PROBLEMA VIII.

Aquæ de vase cylindrico per foramen in fundo factum effluentis definire motum.

Sit A C D B vas cylindricum, A B ejus orificium superius, C D fundi horizonti parallelum, E F foramen circulare in medio fundi, G cen-

quæ fluens ita sumenda est ut evanescat ubi fit $x = 0$, sed fluens S. $\frac{dx}{a+x}$ ita sumpta est logarithmus numeri $\frac{a+x}{a}$, desumptus ex logistica, cujus subtangens est unitas, aut quod idem est, ex hyperbolâ cujus dignitas unitati æqualis est (382. Lib. I. et 40. Lib. II.); si enim ponatur $x = 0$, numerus $\frac{a+x}{a}$, evadit $= 1$, et ideò

L. $\frac{a+x}{a} = 0$. Quare area B C F E $= a b \times$

L. $\frac{a+x}{a}$; rectangulum verò B C G E $= b x$. Est ergò area hyperbolica B C F E ad rectangulum B C G E, ut $a b$ L. $\frac{a+x}{a}$ ad

$b x$, hoc est, dividendo per $a b$, ut L. $\frac{a+x}{a}$

ad $\frac{x}{a}$. Verum (ex dem. et Hyp.) $\frac{a+x}{a} =$

$\frac{T+t}{T}$ et $\frac{x}{a} = \frac{t}{T}$; quare area hyperbolica

B C F E, est ad rectangulum B C G E, ut

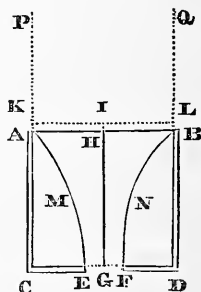
L. $\frac{T+t}{T}$ ad $\frac{t}{T}$. Superest igitur inveniendus

logarithmus numeri $\frac{T+t}{T}$; per logarithmicam

cujus subtangens est unitas. Porro ejusdem numeri logarithmi diversæ speciei sunt inter se in datâ ratione (38) et numerus 2, 302585092994 est logarithmus numeri denarii sumptus in logarithmicâ cujus subtangens est unitas, et ejusdem numeri denarii logarithmus in tabulis sumptus est 1, 0000000 $= 1$; quare ut 1, ad 2, 302585092994,

ita logarithmus numeri $\frac{T+t}{T}$ in tabulis sumptus ad logarithmum ejusdem numeri sumptum in

trum foraminis, et G H axis cylindri horizonti perpendicularis. Et finge cylindrum glaciei A P Q B ejusdem esse latitudinis cum cavitate vasis, et axem eundem habere, et uniformi cum motu perpetuo descendere, et partes ejus quam primum attingunt superficiem A B liquescere, et in aquam conversas gravitate suâ defluere in vas; et cataractam vel columnam aquæ A B N F E M cadendo formare, et per foramen E F transire, idemque adæquatè implere. Ea verò sit uniformis velocitas glaciei descendantis ut et aquæ contiguæ in circulo A B, quam aqua cadendo ^(f) et casu suo describendo altitudinem I H acquirere potest; et jaceant I H et H G in directum, et per punctum I ducatur recta K L horizonti parallela et lateribus glaciei occurrens in K et L. Et velocitas aquæ effluentis per foramen E F ^(g) ea erit quam aqua cadendo ab I et casu suo describendo altitudinem I G acquirere potest. ^(h) Ideoque per Theoremata Galilæi erit I G ad I H in duplicatâ ratione velocitatis aquæ per foramen effluentis ad velocitatem aquæ in circulo A B, hoc est, in duplicatâ ratione circuli A B ad circumulum E F; ⁽ⁱ⁾ nam hi circuli sunt reciproci ut velocitates aquarum quæ per ipsos eodem tempore et æquali quantitate, adæquatè transeunt. De velocitate aquæ horizontem versùs hîc agitur. Et motus horizonti parallelus, quo partes aquæ cadentis ad invicem accedunt, cum non oriatur a gravitate, nec motum horizonti perpendicularem a gravitate oriundum mutet, hic non consideratur. Supponimus quidem quod partes aquæ aliquantulum cohærent, et per cohæSIONEM suam inter



logarithmicâ cujus subtangens est unitas, vel in hyperbolâ cujus dignitas est 1; habetur ergò logarithmus quæsitus, si logarithmus numeri $\frac{T+t}{T}$ ex tabulis sumptus multiplicetur per numerum 2, 302585092994.

^(f) * Et casu suo describendo altitudinem I H. Hâc igitur hypothesi idem præstatur ac si in loco A B nova superficies aquæ continuò crearetur, cum motu initiali qualem cadendo ex altitudine I H singula ejus superficiei particula acquirere potuisset, et deinde particulæ aquæ e loco A B vi propriæ gravitatis cadendo sese mutuò attraherent horizontaliter ad cataractam vel columnam A B N F E M formandam.

^(g) * Ea erit quam aqua (per Hyp.).

^(h) * Ideoque per Theoremata Galilæi XXVIII. Lib. I.

⁽ⁱ⁾ 271. Nam hi circuli, &c. Quoniam aqua per totam cataractam A B N F E M, eodem semper tenore fluere supponitur, necesse est ut

eadem aquæ quantitas per singulas cataractæ sectiones axi I G perpendiculares, seu per singulos circulos A B, M N, E F horizonti parallelos eodem tempore transeat. Nam si dato tempore major vel minor aquæ copia per circumulum A B quam per circumulum M N transiret; aqua inter illos circulos vel intumesceret vel decresceret, et cataractæ figuram mutaret (contrâ Hyp.). Quantitas aquæ per circumulum quemlibet M N, dato tempore fluentis æquatur cylindro aqueo, cujus basis est circumulus M N, et altitudo est æqualis longitudini quam superficies aquæ M N, cum velocitate acquisitâ uniformiter progrediendo eodem tempore dato describeret; et longitudo illa est ut aquæ per circumulum M N fluentis velocitas (5. Lib. I.) et ideò quantitas aquæ per circumulum M N dato tempore fluentis, est ut circumulus M N et velocitas conjunctim. Quare cum data sit quantitas aquæ per singulos circulos dato tempore transeuntis, circumulus M N est reciprocè ut velocitas aquæ quæ per ipsum transit. Q. e. d.

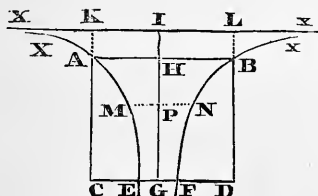
cadendum accedant ad invicem per motus horizonti parallelos, ut unicam tantum efforment cataractam et non in plures cataractas dividantur; sed motum horizonti parallelum, a cohæsione illâ oriundum, hic non consideramus.

Cas. 1. Concipe jam cavitatem totam in vase, in circuitu aquæ cadentis A B N F E M, glacie plenam esse, ut aqua per glaciem tanquam per infundibulum transeat. Et si aqua glaciem tantum non tangat, vel, quod perinde est, si tangat et per glaciem propter summam ejus polituram quam liberrimè et sine omni resistantiâ labatur; hæc defluet per foramen E F eâdem velocitate ac prius, ^(k) et pondus totum columnæ aquæ A B N F E M impendetur in defluxum ejus generandum uti prius, et fundum vasis sustinebit pondus glaciei columnam ambientis.

Liquescat jam glacies in vase; et effluxus aquæ, quoad velocitatem, idem manebit ac prius. ^(l) Non minor erit, quia glacies in aquam resoluta conabitur descendere: non major, quia glacies in aquam resoluta

272. His ita constitutis, facile est cataractæ figuram geometricè definire. Secet M N axem I G in P; et quia altitudo I P est in duplicatâ ratione velocitatis aquæ in P, hæc vero velocitas est inverse ut circulus M N, et denique circulus M N est in ratione duplicatâ radii M P, et ideò I P seu abscissa in ratione quadruplicatâ inversa radii seu ordinatæ M P, sive I P ut $\frac{1}{M P^4}$, et ideò $M P^4 \propto I P$, quantitas data. Est igitur curva E M A, hyperbola quarti gradûs, asymptotos habens I G, I K, quibus convexitatem

E M A X. Et si semi-peripheria circuli cujus radius est unitas, dicatur p, erit circuli E F area $= p y y$, et cylindrus E G $\propto 2 I G = 2 p y y x = \frac{2 p a^5}{y y}$. Cum verò sit $x = \frac{a^5}{y^4}$, ac proinde $d x = -\frac{4 a^5 d y}{y^5}$, cataractæ elementum $p y y d x = -\frac{4 p a^5 d y}{y^3} = -4 p a^5 y - 3 d y$, et sumptis fluentibus, tota cataracta ad asymptotum usque X x producta, erit $= \frac{2 p a^5}{y y} = 2 E F \propto I G$. Q. e. d.



obvertit. Producantur arcus E M A, et asymptotus I K ad partes X in infinitum, et figura E A X X I G circa asymptotum seu axem I G, rotata cataractam describet in infinitum ad partes X, x, productam; figura verò E M A H G, hanc cataractæ partem quæ intra vas A B D C, continetur, generabit.

273. Tota cataracta E A X x B F, æquatur cylindro cujus basis est circulus E F, et altitudo 2 I G. Sint enim altitudo I G $= x$, ordinata E G $= y$, a linea data, et (272) $x = \frac{a^5}{y^4} x$, ideòque $y^4 = a^5$ æquatio ad hyperbolam

^(k) 274. Et pondus totum, &c. Pondus quidem totum columnæ aquæ A B N F E M in defluxum ejus generandum impenditur; attamen totum aquæ motum non generat, cum motus illius pars pendeat a motu superficiei A B, quæ (per Hyp.) eam habet velocitatem quam aqua cadendo et casu suo describendo altitudinem I H acquirere potest. Sed totum aquæ defluxum mathematicè considerare possumus tanquam genitum pondere aquæ totius, quæ in cataractâ E A X x B F, usque ad asymptotum X x producta continetur, quæque æqualis est cylindro aqueo basi E F et altitudine 2 I G, descripto (273).

^(l) * Non minor erit, quia glacies in aquam resoluta conabitur descendere, atquè ita aquæ descensum accelerare; non tamen major erit, quia glacies in aquam resoluta, ob reactionem actioni æqualem et contrariam, non potest descendere, nisi impediendo descensum aquæ alterius descensui suo æqualem. Idem igitur manet in aquâ totâ ad descendendum et per foramen E F effluentem conatus. At eadem vis eandem aquæ effluentis velocitatem generare debet.

nis hujus circularis ad diametrum venæ ut 25 ad 21 quàmproximè. Aqua igitur transeundo per foramen, convergit undique, et postquam effluxit ex vase, tenuior redditur convergendo, et per attenuationem acceleratur donec ad distantiam semissis digiti a foramine pervenerit, et ad distantiam illam tenuior ^(o) et celerior fit quàm in ipso foramine in ratione 25×25 ad 21×21 seu 17 ad 12 quàmproximè, id est in subduplicatâ ratione binarii ad unitatem circiter. ^(p) Per experimenta verò

iverim perexiguam aliquam differentiam interesse inter contractiones aquæ effluentis ex minoribus foraminibus, et aquæ contractiones ex majoribus effluentis. Antea descripti foraminis in laminâ ferreâ diametrum ad diametrum aquæ contractæ fuit in eâ ratione quam habet numerus 52 ad 41; cùm Newtoniana sit ratio numeri 50 ad 42. sic omnino eadem lege, non semper contrahi aquæ venas ostendunt variæ contractiones in aquæ a variis frustis conicis effluxu observatæ, quin etiam huc debentur referri illæ quas animadverti differentia inter diametros ad perpendicularum sumptas, et diametros secundum lineam horizonti parallelam mensas. At quanta sit differentia inter aquæ contractiones non ausim definire; neque verò illa Newtoniana ratio inter diametrum foraminis et contractæ aquæ diametrum sumi debet ceu præcisa, cùm ipse vir summus in citato opere hæc habeat; existente ejus (nempè aquæ contractæ) diametro ad diametrum foraminis ut 5 ad 6, vel 5 et $\frac{1}{2}$ ad 6 et $\frac{1}{2}$, quàmproximè, si modò diametros rectè dimensus sum." Bernoullius verò Sect. IV. parag. 7. hæc habet; "interim assumptis laminâ tenui, vase amplissimo, foramine ad 4 vel 6 lineas in diametro assurgente, solet ratio inter foramen et sectionem venæ contractæ non multum recedere ab illâ quam Newtonus statuit." Verùm utriusque authoris experimenta demonstrant, rationem illam diametri venæ contractæ ad diametrum foraminis multum variari, si per oblongos variæque figuræ canales, non verò ex simplici foramine in tenuissimâ laminâ insculpto e vase effluat aqua.

^(o) * Et celerior fit quàm in ipso foramine. Nam velocitates sunt reciprocæ ut circuli per quos aqua eodem tempore transit (171), circuli verò sunt in ratione duplicatâ diametrorum; et ideò velocitas aquæ per sectionem circularem venæ contractæ transeuntis est ad velocitatem aquæ per foramen effluentis ut 25×25 ad 21×21 hoc est, 625 ad 441; quod utrumque divisum per 37 dat rationem 17 ad 12, vel utrumque divisum per 441, dat rationem 1.41, &c. ad 1, est verò radix binarii numeri 1.41, &c., est ergo velocitas aquæ per venam contractam ad velocitatem per foramen in ratione radices binarii numeri ad unitatem.

^(p) Per experimenta verò constat. Datâ quantitate aquæ per datum foramen seu per datam venæ contractæ sectionem dato tempore effluentis, sic illius velocitas inquiritur. Quo-

niam data aquæ quantitas æquatur cylindro vel prismati cujus basis est foramen datum aut venæ contractæ sectio, et altitudo spatium quod aqua tempore dato cum illâ velocitate quam in foramine aut venæ sectione habet, uniformiter progrediendo describeret, dividitur quantitas aquæ data per foraminis aut sectionis venæ aream, et quotiens erit spatium quod aqua dato tempore uniformiter progrediendo describeret, atquè ita nota fit aquæ velocitas cujus dimidium est altitudo ex quâ cadere debuit ut eam velocitatem acquireret. Sit jam a altitudo quam corpus grave tempore minuti unius secundi sine resistentiâ cadendo describit, v velocitas hoc casu acquisita, et ideò 2 a spatium quod velocitate uniformi v tempore minuti unius secundi describi potest (30. Lib. I.) sit b altitudo aquæ in vase stagnantis, c celeritas quam grave per altitudinem b sine resistentiâ cadendo acquirat, et s spatium quod cum celeritate c uniformiter progrediendo tempore minuti unius secundi describeret, erit $a : b = v v : c c$ (28. Lib. I.) et $2a : s = v : c$ (5. Lib. I.) ideòque $a : b = 4 a a : s s$; undè habetur $s = 4 a b$, et $s = \sqrt{4 a b}$. Si igitur aqua e vase per venæ contractæ sectionem effluat cum velocitate c quam grave cadendo et casu suo describendo altitudinem b aquæ in vase stagnantis acquirat, spatium s quod ex quantitate aquæ tempore minuti unius secundi e vase effluentis, ut suprâ dictum est, habetur, debet esse æquale $\sqrt{4 a b}$. Hinc si altitudo a, sit pedum Paris. 14, erit $s = 56 b$, quæ est ipsa regula quam D. Pitot in Monum. Acad. Paris. an. 1730. tradidit. At si altitudo a ponatur esse pedum

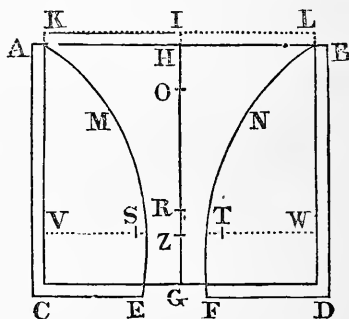
Paris. $15\frac{1}{2}$ seu $\frac{181}{12}$ (471. Lib. I.) erit $s =$

$\frac{181}{3} b$. Verùm ut aquæ in vase stagnantis alti-

tudo et velocitas per foramen effluentis quo tempore experimentum capitur, eadem ad sensum maneant, ut oportet, usurpari potest vas satis amplum exiguo pertusum foramine, vel si vas paulò angustius adhibeatur, tantum aquæ affundi supernè debet quantum per inferius lumen effluit, et cavendum est ne affusa aqua cum aliquo impetu cadendi extimam aquæ in vase stagnantis superficiem attingat. Quibus autem artibus id possit effici fusè exponunt locis suprâ citatis Marchio Polenus et Daniel Bernoullius quos lector consulere potest. Attamen his adhibitis cautelis, velocitas aquæ per venæ contractæ sectionem effluentis paulò minor per experimenta

constat quòd quantitas aquæ, quæ per foramen circulare in fundo vasis factum, dato tempore effluit, ea sit quæ cum velocitate prædictâ, non per foramen illud, sed per foramen circulare, cujus diameter est ad diametrum foraminis illius ut 21 ad 25, eodem tempore effluere debet. Ideoque aqua illa effluens velocitatem habet deorsum in ipso foramine quam grave cadendo et casu suo ⁽¹⁾ describendo dimidiam altitudinem aquæ in vase stagnantis acquirere potest quamproximè. Sed postquam exivit ex vase, acceleratur convergendo donec ad distantiam a foramine diametro foraminis prope æqualem pervenerit, et velocitatem acquisiverit majorem in ratione subduplicatâ binarii ad unitatem circiter; quam utique grave cadendo, et casu suo describendo totam altitudinem aquæ in vase stagnantis, acquirere potest quamproximè.

In sequentibus igitur diameter venæ designetur per foramen illud minus quod vocavimus E F. Et plano foraminis E F parallelum duci intelligatur planum aliud superius V W ad distantiam diametro foraminis æqualem circiter et foramine majore S T pertusum; per quod utique vena cadat, quæ adæquatè impleat foramen inferius E F, atque ideò cujus diameter sit ad diametrum foraminis inferioris ut 25 ad 21 circiter. Sic enim vena per foramen inferius perpendiculariter transibit; et quantitas aquæ effluentis, pro magnitudine foraminis hujus, ea erit quam solutio Problematis postulat quamproximè. Spatium verò, quod planis duobus et venâ cadente clauditur, pro fundo vasis haberi potest. Sed ut solutio Problematis simplicior sit et magis mathematica, præstat adhibere planum solum inferius pro fundo vasis, et fingere quod aqua quæ per glaciem ceu per infundibulum defluebat, et e vase per foramen E F in plano inferiore factum egrediebatur, motum



quàm per theoriam invenitur, quod variis resistentiis tribuendum esse videtur, et certè illustr. Marchio Polenus, cùm in Libro de Castellis pag. 64. opinatus fuisset velocitatem illam in experimentis valde esse minorem quàm in theoriâ, pluribus deinde experimentis ad calculos revocatis priorem sententiam mutavit in Epistolâ ad Marinonium.

⁽¹⁾ Describendo dimidiam altitudinem. Velocitas quam corpus quodlibet grave, sine resistentiâ cadendo et casu suo describendo dimidiam altitudinem aquæ in vase stagnantis acquirit, est ad velocitatem ejus per totam altitudinem aquæ

cadendo acquisitam ut 1 ad $\sqrt{2}$ (28. Lib. I.) Sed, ex suprâ ostensis, velocitas aquæ per vasis foramen transeuntis est ad velocitatem per venâ contractæ sectionem fluentis, id est, ad velocitatem quam grave cadendo per totam altitudinem aquæ in vase stagnantis acquirit, in eâdem ratione 1, ad $\sqrt{2}$; quare velocitas quam grave per dimidiam altitudinem aquæ stagnantis cadendo acquirit, æqualis est velocitati aquæ per foramen effluentis, modò tamen aqua per simplex foramen in tenuissimâ laminâ factum, ut suprâ expositum est, effluat e vase.

suum perpetuo servet, (r) et glacies quietem suam. In sequentibus igitur sit ST diameter foraminis circularis centro Z descripti per quod cataracta effluit ex vase ubi aqua tota in vase fluida est. Et sit EF diameter foraminis per quod cataracta cadendo adæquatè transit, sive aqua exeat ex vase per foramen illud superius ST , sive cadat per medium glaciei in vase tanquam per infundibulum. Et sit diameter foraminis superioris ST ad diametrum inferioris EF ut 25 ad 21 circiter, et distantia perpendicularis inter plana foraminum æqualis sit diametro foraminis minoris EF . Et velocitas aquæ e vase per foramen ST exeuntis ea erit in ipso foramine deorsum quam corpus cadendo a dimidio altitudinis IZ acquirere potest: velocitas autem cataractæ utriusque cadentis ea erit in foramine EF , quam corpus cadendo ab altitudine totâ IG (*) acquireret.

Cas. 2. Si foramen EF non sit in medio fundi vasis, sed fundum alibi perforetur: aqua effluet eâdem cum velocitate ac priùs, si modò eadem sit foraminis magnitudo. Nam grave majori quidem tempore descendit ad eandem profunditatem (t) per lineam obliquam quàm per lineam perpendicularem, sed descendendo eandem velocitatem acquirit in utroque casu, (u) ut Galilæus demonstravit.

Cas. 3. Eadem est aquæ velocitas effluentis per foramen in latere vasis. Nam si foramen parvum sit, (x) ut intervallum inter superficies

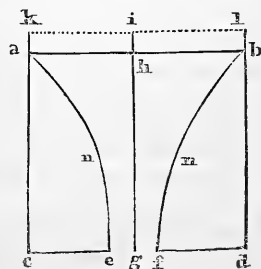
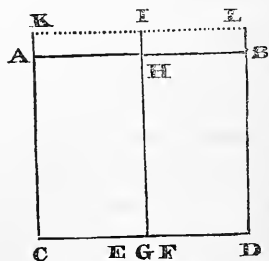
(*) * *Et glacies quietem suam.* Sunt vasa duo æqualia $ABDC$, $abcd$, in quorum primo glacies omnis in aquam resoluta sit, et in altero glacies quietem suam conservet, ut aqua cataractam $abmfe n$ formando effluat per foramen $e f$ sectioni venæ contractæ e foramine EF exilientis æquale; et loco vasis $ABDC$, in Problematis solutione substitui poterit vas alterum $abcd$, in quo aquæ per lumen $e f$ effluentis eadem est velocitas quam aqua e vase $ABDC$ exiliens habet in sectione venæ contractæ, eademque proinde aquæ quantitas in defluxum impenditur, et propterea idem aquæ pondus fundo incumbit in utroque vase. Quoniam enim cataractæ $abmfe n$ figura et lex secundum quam aqua cataractâ illâ movetur notæ sunt, Problematis solutio et faciliior et magis mathematica fiet, si loco vasis $ABDC$ mente substituaturs vas $abcd$.

(t) * *Acquireret.* Hæc ex suprâ demonstratis patent.

(t) * *Per lineam obliquam.* In hoc secundo casu pars aquæ per lineas ad foramen obliquas descendit.

(u) * *Ut Galilæus demonstravit* (81. et 85. Lib. I.).

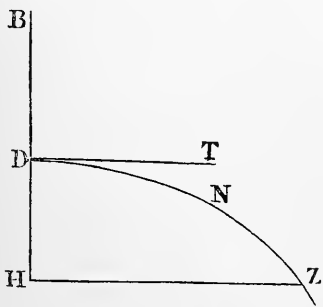
(x) 275. * *Ut intervallum inter superficies AB et KL . $I H$ est ad $I G$ in ratione quadruplicatâ diametri EF ad diametrum AB*



A B et K L quoad sensum evanescat, et vena aquæ horizontaliter exilientis figuram parabolicam efformet: ⁽⁵⁾ ex latere recto hujus parabolæ colligetur, quod velocitas aquæ effluentis ea sit quam corpus ab aquæ in vase stagnantis altitudine H G vel I G cadendo acquirere potuisset. Facto utique experimento inveni quod, si altitudo aquæ stagnantis supra foramen esset viginti digitorum et altitudo foraminis supra planum horizonti parallelum esset quoque viginti digitorum, vena aquæ prosilientis incidere in planum illud ad distantiam digitorum 37 circiter a perpendicularo quod in planum illud a foramine demittebatur captam. Nam sine resistentiâ, vena ⁽²⁾ incidere debuisset in planum illud ad distantiam digitorum 40, existente venæ parabolicæ latere recto digitorum 80.

Cas. 4. Quin etiam aqua effluens, si sursum feratur, eâdem egreditur cum velocitate. Ascendit enim aquæ exilientis vena parva motu perpendiculari ad aquæ in vase stagnantis altitudinem G H vel G I, nisi quâtenus ascensus ejus ab aëris resistentiâ aliquantulum impediatur; ⁽²⁾ ac proinde eâ effluit cum velocitate quam ab altitudine illâ cadendo acquirere potuisset. Aquæ stagnantis particula unaquæque undique premitur æqualiter (per Prop. XIX. Lib. II.) et pressioni cedendo æquali impetu in omnes partes fertur, sive descendat per foramen in fundo vasis, sive horizontaliter effluat per foramen in ejus latere, sive egrediatur in canalem et inde ascendat per foramen parvum in superiore canalis parte factum. Et velocitatem quâ aqua effluit eam esse, quam in hâc Propositione as-

(272), aut quod idem est, in ratione duplicatâ areæ circuli E F ad aream circuli A B, ideóque si ratio E F ad A B parva sit, minor adhuc erit ratio I H ad I G, et H G, I G erunt ad sensum æquales.



⁽⁵⁾ * Ex latere recto hujus parabolæ. Aquæ gutta e loco D, secundum directionem quamlibet D T exiliat cum eâ velocitate quam per altitudinem B D cadendo acquirere potest, et sublata mediî resistentiâ, describat parabolam D N Z, cujus vertex D, tangens D T, et dia-

meter D H seu verticalis B D producta (40. Lib. I.), capiatur abscissa D H æqualis altitudini B D, ducaturque ordinata H Z, quæ tangenti D T parallela erit; et quo tempore gutta aquæ vi gravitatis cadendo altitudinem B D vel D H describit uniformi illâ velocitate quam casu per B D acquisivit, describit longitudinem H Z ipsius B D vel D H duplam, (30. Lib. I.). Latus rectum parabolæ D N Z, pertineus ad diametrum D H est $\frac{H Z^2}{D H}$ (Theor. I. de parab.)

ideóque cum sit $H Z = 2 D H = 2 B D$, latus rectum est 4 B D. Igitur altitudo B D quam aqua cadendo describere debet ut velocitatem acquirat cum quâ e loco D exilit, est quarta pars lateris recti ad diametrum D H parabolæ D N Z pertinentis.

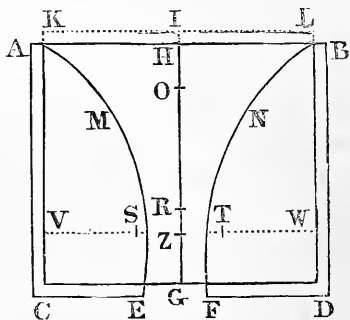
⁽²⁾ * Incidere debuisset in planum illud. Sit enim altitudo B D = D H digit. 20, et quia B D est pars quarta lateris recti parabolæ D N Z, quam aqua sine resistentiâ describeret, latus illud rectum est digit. 80, et ordinata H Z æqualis 2 D H est digit. 40. differentia 3. digit. inter distantias 40. et 37. digit. resistentiis tribuenda est.

⁽³⁾ * Ac proinde eâ effluit cum velocitate (25. 26. Lib. I.).

signavimus, non solùm ratione colligitur, sed etiam per experimenta notissima jam descripta manifestum est.

Cas. 5. Eadem est aquæ effluentis velocitas, sive figura foraminis sit circularis, sive quadrata vel triangularis aut alia quæcunque circulari æqualis. Nam velocitas aquæ effluentis non pendet a figurâ foraminis, sed oritur ab ejus altitudine infra planum K L.

Cas. 6. Si vasis $A B D C$ pars inferior in aquam stagnantem immergatur et altitudo aquæ stagnantis supra fundum vasis sit $G R$: velocitas quâcum aqua quæ in vase est, effluet per foramen $E F$ in aquam stagnantem, ea erit quam aqua cadendo et casu suo describendo altitudinem $I R$ acquirere potest. Nam pondus aquæ omnis in vase quæ inferior est superficie aquæ stagnantis, sustinetur in æquilibrio per pondus aquæ stagnantis, ideóque motum aquæ descendentis in vase minimè accelerabit. Patebit etiam et hic casus per experimenta, ^(b) mensurando scilicet tempora quibus aqua effluit.



(^c) *Corol.* 1. Hinc si aquæ altitudo C A producat^{ur} ad K, ut sit A K ad C K in duplicatâ ratione aræ foraminis in quâvis fundi parte facti, ad aream circuli A B: velocitas aquæ effluentis æqualis erit velocitati quam aqua cadendo et casu suo describendo altitudinem K C acquirere potest.

(^d) *Corol. 2.* Et vis, quâ totus aquæ exilientis motus generari potest,

(b) * *Mensurando scilicet tempora quibus aqua effluit, et quantitates aquæ iisdem temporibus effluentis.*

(^c) * *Corol.* 1. Patet per not. 275. et cas. 2.
ac 5.

(4) * *Corol. 2.* De hujus Corollarii veritate diu multumque disputatum est inter Comitem Riccatum, Danieleum Bernoullium, Petrum Antonium Michelottum, Jacobum Jurinum, aliosque eruditissimos viros. Cum enim in primâ Principiorum editione, Newtonus, nondum observatâ contractione venæ, statuisset, vim quâ totus aquæ exilientis motus generari potest, æqualem esse ponderi cylindricæ columnæ aquæ, cujus basis est foramen E F, et altitudo G I, et in secundâ editione, habitâ ratione venæ contractæ, vim illam duplam fecisset, priorem vis illius mensuram adversus Comitem Riccatum et Jurinum tuebatur cum Michelotto Daniel Bernoullius, quorum Dissertationes videre est in *Exercitationibus Mathematicis* quæ an. 1724.

Venetis editæ sunt. Verùm Daniel Bernoulli paragr. 9. Sect. XIII. Hydrodynamicæ posteriori sententiæ Newtoni ita suffragatur: "Ista sententia a me olim et ab aliis fuit impugnata, ab aliis rursus confirmata. Nunc autem postquam hanc aquarum motarum theoriam meditatus sum, lis ita dirimenda mihi videtur ut cum aquæ ad motum uniformem pervenerint, quæ quidem hypothesis est Newtoni, tunc rectè altitudine $2\ G\ I$, vis illa definiatur, sed ab initio fluxûs, ubi velocitas adhuc nulla est, vis simpliciter altitudinî $G\ I$ respondeat, moxque crescente velocitate, simul vis aquam ad effluxum animans crescat, et tandem ad eam magnitudinem exurgat quam Newtonus assignavit. . . . Rectè etiam ill. Riccatus, cum quo mihi de hoc argumento res erat, interrogatus, undè vis illa duplè aquarum altitudinî conveniens oriri possit, cum obturato orificio, gutta eidem imminens vi simpliciter altitudinis urgeri manifestè appareat, respondit distinguendum esse statum quietis a statu

lis erit differentiae cylindrorum, id est, cylindro cujus basis est AB et altitudo $2HO$. Et propterea aqua tota in vase $ABDC$ est ad aquam totam cadentem in solido $ABNFEM$ ^(b) ut HG ad $2HO$, id est, ut $HO + OG$ ad HO , seu $IH + IO$ ad $2IH$. Sed pondus aquae totius in solido $ABNFEM$ in aquae defluxum ⁽ⁱ⁾ impenditur: ac proinde pondus aquae totius in vase est ad ponderis partem quae in defluxum aquae impenditur, ut $IH + IO$ ad $2IH$, ^(k) atque ideò ut summa circularum EF et AB ad duplum circulum EF .

⁽ⁱ⁾ *Corol. 4.* Et hinc pondus aquae totius in vase $ABDC$ est ad ponderis partem alteram quam fundum vasis sustinet, ut summa circularum AB et EF ad differentiam eorundem circularum.

^(m) *Corol. 5.* Et ponderis pars, quam fundum vasis sustinet, est ad ponderis partem alteram, quae in defluxum aquae impenditur, ut differentia circularum AB et EF ad duplum circulum minorem EF , sive ut area fundi ad duplum foramen.

⁽ⁿ⁾ *Corol. 6.* Ponderis autem pars, quâ solâ fundum urgetur, est ad pondus aquae totius, quae fundo perpendiculariter incumbit, ut circulus AB ad summam circularum AB et EF , sive ut circulus AB ad excessum dupli circuli AB supra fundum. Nam ponderis pars, quâ solâ fundum urgetur, est ad pondus aquae totius in vase, ut differentia circularum AB et EF ad summam eorundem circularum, per *Cor. 4.*: et pondus aquae totius in vase est ad pondus aquae totius quae fundo perpendiculariter incumbit, ut circulus AB ad differentiam circularum AB et EF . Itaque ex æquo perturbatè, ponderis pars, quâ solâ fundum urgetur, est ad pondus aquae totius, quae fundo perpendiculariter incumbit, ut circulus

vitatis suae e loco I per H ad G cadendo describit altitudinem HG .

^(h) * *Ut HG ad $2HO$, &c.* Volumen aquae in vase $ABDC$ contentae æquatur capacitati vasis seu cylindro cujus basis est circulus AB , et altitudo HG ; et propterea aqua tota in vase $ABDC$, est ad aquam totam cadentem in solido $ABNFEM$, ut HG ad $2HO$ (ex dem.), id est, ut $HO + OG$ ad $2HO$, et quia (per Hyp.) $IH : IO = IO : IG = IO - IH : IO - IO = HO : OG$, erit $HO + OG : 2HO = IH + IO : 2IH$.

⁽ⁱ⁾ *Impenditur*, ut probatum est initio cas. 1.

^(k) * *Atque ideò ut summa circularum.* Quoniam enim (per Hyp.) est IH ad IO ut IO ad IG , erit etiam $IH + IO$ ad $2IH$ ut $IG + IO$ ad $2IO$, sed (ex modò dem.) circulus AB est ad circulum EF ut IG ad IO , ideòque summa circularum AB et EF ad duplum circulum EF ut $IG + IO$ ad $2IO$

seu ut $IH + IO$ ad $2IH$. Quare patet propositum.

^(l) * *Corol. 4.* Pondus aquae totius in vase $ABDC$ sit P ponderis illius pars quae in defluxum impenditur sit p et hinc $P - p$, pars ponderis totius quae fundo vasis seu plano æquali differentiae circularum CD et EF sustinetur et in defluxum non impenditur. Et (per *Cor. 5.*) erit $P : p = AB + EF : 2EF$, ac proinde $P : P - p = AB + EF : AB - EF$.

^(m) * *Corol. 5.* Cum sit $P : p = AB + EF : 2EF$, erit quoque $P - p : p = AB - EF : 2EF$. Est autem area fundi æqualis differentiae circularum AB et EF .

⁽ⁿ⁾ * *Corol. 6.* Ponderis autem pars, quâ solâ fundum urgetur, sive pondus aquae quae in spatio solido $CEMADEFNB$ continetur, est ad pondus aquae totius, quae fundo perpendiculariter incumbit et quae æquatur solido aequo cujus basis est differentia circularum AB et EF , et altitudo GH , ut circulus, &c.

lumna P H Q convexa erit versus cataractam, et propterea major cono cujus basis est circellus ille P Q et altitudo G H, id est, major tertiâ parte cylindri eâdem base et altitudine descripti. Sustinet autem circellus ille pondus hujus columnæ, id est, pondus quod pondere cono seu tertiæ partis cylindri illius majus est.

Corol. 8. Pondus aquæ quam circellus valde parvus P Q sustinet, minus esse videtur pondere duarum tertiarum partium cylindri aquæ cujus basis est circellus ille et altitudo est H G. Nam stantibus jam positis, describi intelligatur dimidium sphæroidis cujus basis est circellus ille et semi-axis sive altitudo est H G. ^(q) Et hæc figura æqualis erit duabus tertiis partibus cylindri illius et comprehendet columnam aquæ congelatæ P H Q cujus pondus circellus ille sustinet. Nam ut motus aquæ sit maximè directus, columnæ illius superficies externa concurret cum basi P Q ^(r) in angulo nonnihil acuto, propterea quod aqua cadendo perpetuò acceleratur et propter accelerationem fit tenuior; et cùm angulus ille sit recto minor, hæc columna ad inferiores ejus partes ^(s) jacebit intra dimidium sphæroidis. ^(t) Eadem verò sursum acuta erit seu cuspidata, ne horizontalis motus aquæ ad verticem sphæroidis sit infinitè velocior quàm

P Q sustinet pondus columnæ aquæ P H Q, id est, pondus quod majus est pondere tertiæ partis cylindri aquæ cujus basis est circellus P Q et altitudo G H.

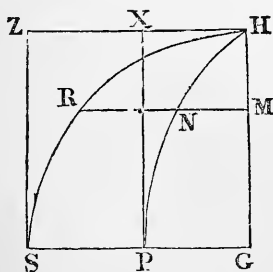
^(q) * Et hæc figura æqualis erit, &c. Centro G, et semi-axibus conjugatis G H et G P, describatur ellipseos quadrans H N P, et centro eodem G ac radio G H circuli quadrans H R S, compleanturque rectangula H G P X et H G S Z. Ducatur in circulo ordinata quævis R M, ellip-

tanguli H G P X genitum; undè (per Cor. Lem. IV. Lib. I.) hemisphærium ex revolutione quadrantis circuli H R S G genitum, est ad hemisphæroidem ex rotatione quadrantis ellipseos H N P G in eâdem ratione. Cum igitur hemisphærium sit ad cylindrum circumscriptum ut 2 ad 3 (170. Lib. II.) erit etiam hemisphæroidis ad cylindrum circumscriptum qui per rotationem rectanguli H G P X generatur, in eâdem ratione 2 ad 3. Q. e. d.

^(r) * In angulo nonnihil acuto. Nam quemadmodum angulus quem cataractæ A B N F E M superficies externa A M E, B N F cum basi C E, D F constituit, est semper acutus, quia aqua cadendo semper acceleratur (272.). Sic etiam, ob eandem rationem, columnæ P H Q superficies externa concurret cum basi P Q in angulo acuto H P Q, H Q P. Quia verò circulo P Q evanescente, seu coincidente H P cum axe H G, angulus ille H P G rectus evadit; si circulus est valdè parvus; angulus H P G erit fere rectus seu nonnihil acutus.

^(s) * Jacebit intra dimidium sphæroidis. Quia (ex naturâ ellipseos) in quâ tangentes per axium vertices ductæ angulos rectos cum axibus constituunt, sphæroidis superficies cum circello P Q, concurret in angulo recto.

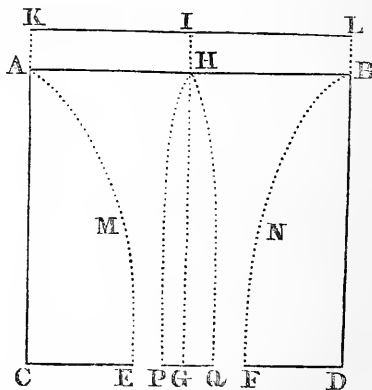
^(t) * Eadem verò sursum acuta erit. Cùm enim partes aquæ duplici motu ciantur in H, alio verticali qui lapsu per altitudinem I H acquiritur, alio horizontali quo partes aquæ ad cataractam formandam ad se mutuò accedunt, uti suprâ antè cas. 1. dictum est, atquè idèò guttula



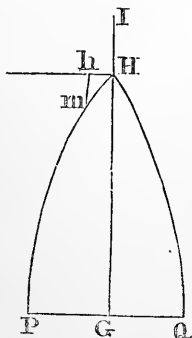
occurrens in N, erit R M ad N M, in datâ ratione S G ad P G (247. Lib. I.) et propterea si figuræ illæ circa axem H G revolvantur, circulus quem radius M R in hac revolutione describet, erit ad circumulum radio M N descriptum in datâ ratione $S G^2$ ad $P G^2$, seu in datâ ratione cylindri quem rectangulum H G S Z rotando describit ad cylindrum ex rotatione rec-

ejus motus horizontem versus. ^(u) Et quò minor est circellus PQ , eò acutior erit vertex columnæ; et circello in infinitum diminuto, angulus, $P H Q$ in infinitum diminuetur et propterea columna jacebit intra dimidium sphæroidis. Est igitur columna illa minor dimidio sphæroidis, seu duabus tertiis partibus cylindri cujus basis est circellus ille et altitudo GH . Sustinet autem circellus vim aquæ ponderi hujus columnæ æqualem, cùm pondus aquæ ambientis in defluxum ejus impendatur.

Corol. 9. Pondus aquæ quam circellus valde parvus PQ sustinet, æquale est ponderi cylindri aquæ cujus basis est circellus ille et altitudo est $\frac{1}{2} GH$ quamproximè. ^(*) Nam pondus hocce est medium arithmeticum inter pondera coni et hemisphæroidis prædictæ. At si circellus ille non sit valde parvus, sed augeatur donec æquet foramen EF ; hic sustinebit pondus aquæ totius sibi perpendiculariter imminētis, id est, pondus cylindri aquæ cujus basis est circellus ille et altitudo est GH .



aquæ in H , lineam curvam HP motu composito describat, necesse est ut angulus PHG sit acutus, et proinde columna PHQ cuspidata in H . Describat enim guttula aquæ lineam



quam minimam Hh , motu horizontali, et eodem temporis momento lineam hm , motu verticali, atque arcum Hm motu composito; et velocitas horizontalis erit ad velocitatem verticalem ut Ih h ad hm , id est, ut sinus hm H seu m HG ad sinum anguli h Hm . Sed evanescente au-

gulo h Hm , seu angulo m HG recto existente, sinus anguli m HG , infinitè major est sinu anguli h Hm . Quare si angulus m HG rectus sit, horizontalis motus aquæ erit infinitè major quam motus ejus verticalis. Quod absurdum est; angulus igitur m HG acutus est.

^(u) * Et quò minor est circellus PQ . Nam si circellus PQ ita augeatur, ut adæquet foramen EF illudque occludat, columna PHQ evadet cylindrica, et recta mh coincidente cum Hh angulus m HG rectus erit; et contrà circello in infinitum diminuto, coincidet Hm P , cum axe HG , angulusque m HG evanescet. Columna igitur tam ad superiores partes versùs H , quam ad inferiores partes versùs P et Q , jacebit intra dimidium sphæroidis.

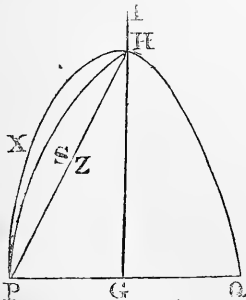
^(*) * Nam pondus hocce est medium arithmeticum. Cùm enim columna illa aquæ, quam circellus valde parvus sustinet, major sit tertiâ parte cylindri cujus basis est circellus ille et altitudo HG (Cor. 7.), et minor duabus tertiis partibus ejusdem cylindri (Cor. 8.), erit ferè æqualis medio arithmetico inter cylindros $\frac{1}{3} PQ \times HG$, et $\frac{2}{3} PQ \times HG$. Est autem medium illud arithmeticum æquale dimidiæ summæ illorum cylindrorum, id est, cylindro $\frac{1}{2} PQ \times HG$, cujus basis est circellus PQ , et altitudo $\frac{1}{2} HG$.

Corol. 10. Et (quantum sentio) pondus quod circellus sustinet, est semper ad pondus cylindri aquæ, cujus basis est circellus ille et altitudo est $\frac{1}{2}$ G H, (7) ut E F q ad E F q — $\frac{1}{2}$ P Q q, sive ut circulus E F ad excessum circuli hujus supra semissem circelli P Q quamproximè.

(7) * Ut E F q ad E F q — $\frac{1}{2}$ P Q q. Hæc enim suppositio superioribus determinationibus satisfacit. Nam sit p pondus aquæ quam circellus sustinet; P pondus cylindri aquæ cujus basis est circellus ille et altitudo G H; et si (juxtà Cor. hoc 10.) ponatur p : $\frac{1}{2}$ P = E F² : E F² — $\frac{1}{2}$ P Q², erit p = $\frac{\frac{1}{2} P \times E F^2}{E F^2 - \frac{1}{2} P Q^2}$. Sed quantitas $\frac{\frac{1}{2} P \times E F^2}{E F^2 - \frac{1}{2} P Q^2} = \frac{P \times E F^2}{2 E F^2 - P Q^2}$ semper major est quantitate $\frac{1}{2}$ P, quod Cor. 7. satisfacit. Et contrà quantitas illa $\frac{P \times E F^2}{2 E F^2 - P Q^2}$ minor est quàm $\frac{2}{3}$ P, ubi circellus est, satis parvus seu quamdiu $2 P Q^2 < E F^2$ (cùm enim fit $P Q^2 = \frac{E F^2}{2}$, tunc illa quantitas p est

$\frac{2 P \times E F^2}{3 E F^2} = \frac{2}{3}$ P, (quæ est determinatio Cor. 8.). Tandem ubi circellus infinitè minor est quàm foramen E F, fit $\frac{P \times E F^2}{2 E F^2 - P Q^2} = \frac{1}{2}$ P, et ubi circellus adæquat foramen E F, est $\frac{P \times E F^2}{2 E F^2 - P Q^2} = P$, quæ duo cum Cor. 9. determinationibus congruunt.

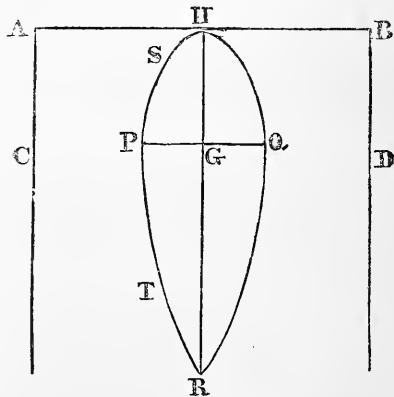
277. Si circellus P Q sit valdè parvus, et vertice P axe P G describatur per punctum H, parabolæ arcus P S H, et figura P S H G circà



H G convolvatur, solidum inde genitum columnam aquæ quam circellus sustinet exhibebit quam proximè. Nam angulus S P G quem parabola cum axe P G, continet, rectus est, et ideò quam proximè æqualis angulo quem prædictæ columnæ superficies cum circello valdè parvo P Q efficit (Cor. 8.); et evanescente P G, angulus S H G arcu parabolæ S H et rectâ H G comprehensus fit infinitè parvus, ut oportet (per idem Cor. 8.).

Præterea si jungatur recta P Z H, et centro G, ac semi-axibus conjugatis G H, et G P describatur ellipseos quadrans P X H, et figuræ P Z H G, P S H G, P X H G circà axem H G convolvantur, solidum quod per revolutionem figuræ parabolæ P S H G generatur, majus erit cono ex rotatione trianguli P Z H G genito, et minus hemisphæroide quam figura P X H G rotata describit, quod Cor. 7. et 8. satisfacit. Tandem, calculo inito, facile patet solidum quod per convolutionem figuræ P S H G, gignitur, esse ad cylindrum cujus basis est circellus P Q, et altitudo G H, ut 8 ad 15, quæ ratio non multum aberrat a ratione 1 ad 2 quam Newtonus in Cor. 9. invenit.

278. Si circulus P Q valdè parvus maneant respectu foraminis E F, foramen verò E F quantumvis augeatur finitum sit, et vas A B D C infinitum evadat, æquales erunt altitudines I G et H G, et velocitas aquæ in loco P Q, ea erit



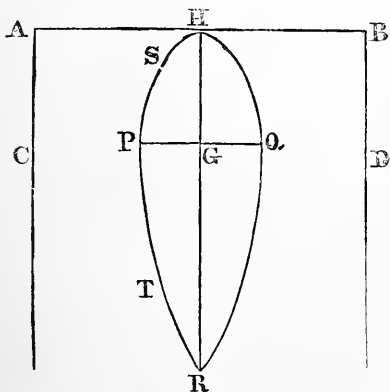
quam aqua cadendo et casu suo describendo altitudinera H G, acquirere potest (per Cor. 1. Prop. hujus XXXVI.). Iisdem positis, si vas A B D C infrà circulum P Q continetur, et aqua postquam pervenit ad locum P Q, solâ vi insitâ pergat uniformiter moveri cum illâ velocitate quam habet in loco P Q, sitque P Q R columna aquæ congelatæ, cujus fluiditas ad promptissimum alterius aquæ motum non requiritur, ut suprâ de columnâ P H Q dictum est; erit G R = 2 G H et P T R ferè arcus parabolæ cujus vertex P axis P G, et ordinata G R. Nam * fingatur considerari lapsum ejus aquæ quæ per conoidem H P Q moveretur seorsim a lapsu reliquæ aquæ vasis, liquet quod eo tempore quo

LEMMA IV.

Cylindri, qui secundum longitudinem suam uniformiter progreditur, resistentia ex auctâ vel diminutâ ejus longitudine non mutatur; ideoque eadem est cum resistentia circuli eâdem diametro descripti et eâdem velocitate secundum lineam rectam plano ipsius perpendicularem progredientis.

(²) Nam latera cylindri motui ejus minimè opponuntur: et cylindrus, longitudine ejus in infinitum diminutâ, in circulum vertitur.

aquæ gutta motu verticali uniformiter accelerato cadit ex H in G effluet bis ea aquæ copia quæ in conoide H P Q continetur; ea ergo aquæ copia erit æqualis cylindro cujus altitudo erit H G, et basis circulus P Q, particula verò G celeritate ex lapsu per H acquisita describet 2 H G sive G R, tota ergo aqua quæ per conoidem H P Q movebitur occupabit figuram cujus



basis est circulus P Q, cujus altitudo est 2 H G, et soliditas dimidium cylindri cujus P Q foret basis et altitudo 2 H G, sed per præcedentem paraboloides est ferè dimidium cylindri circumscripti: ergo aqua quæ per conoidem effluit tum paraboloidem occuparet: est ergo columna P Q R columna aquæ congelatæ quæ ad promptissimum aquæ reliquæ circumpositæ motum non requiritur. Hæc ad demonstrationem scholii proximi hic adnectenda visa sunt; utrum satis rectè Newtonianæ demonstrationis indolem simus assecuti, videat B. Lector,

Si quid novisti rectiùs istis

Candidus imperti; si non, his utere mecum.

(²) * Nam latera cylindri, &c. Hic enim latera cylindri esse politissima, et mediæ tenacitatem et frictionem esse nullam supponitur.

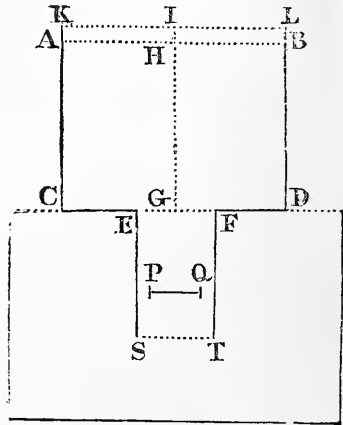
279. Lemma. *Vires uniformes sunt directè ut quantitates motus quas generant, et inversè ut tempora quibus illas generant, (13. et 15. Lib. I.); et quia motus quantitates sunt ut massæ et velocitates conjunctim, sive ut volumina et densitates et velocitates, vires uniformes sunt etiam in ratione compositâ ex rationibus directis voluminum, densitatum et velocitatum et ratione inversâ temporum quibus velocitates illas generant; cumque tempora illa sint ut spatia descripta directè et velocitates inversè (31. Lib. I.); vires uniformes sunt quoque in ratione compositâ ex rationibus directis voluminum, densitatum et quadratorum velocitatis et ratione inversâ spatiorum descriptorum, et quia velocitates sunt ut spatia descripta directè et tempora inversè, vires uniformes sunt etiam in ratione compositâ ex ratione voluminum, densitatum et spatiorum descriptorum, et ratione inversâ duplicatâ temporum, quibus spatia illa describuntur.*

280. Corol. Quoniam cylindrorum volumina sunt ut eorum altitudines et diametrorum quadrata conjuncta: vires uniformes quibus urgentur cylindri, sunt in ratione quæ componitur ex rationibus directis altitudinum cylindrorum, quadratorum diametrorum, densitatum et velocitatum a viribus illis genitarum, et ratione inversâ temporum quibus velocitates illas generant; sunt etiam in ratione quæ componitur ex rationibus directis altitudinum, quadratorum diametrorum, densitatum et quadratorum velocitatum, et ratione inversâ spatiorum descriptorum; sunt quoque vires illæ in ratione compositâ ex rationibus directis altitudinum cylindrorum, quadratorum diametrorum, densitatum et spatiorum descriptorum, et ratione inversâ duplicatâ temporum, quibus spatia illa describuntur. Ubi prædictarum quantitatum, ex quibus virium ratio composita est, aliquæ datæ sunt, iis deletis habetur virium ratio.

PROPOSITIO XXXVII. THEOREMA XXIX.

Cylindri, qui in fluido compresso infinito et non elastico secundum longitudinem suam uniformiter progreditur, resistentia, quæ oritur a magnitudine sectionis transversæ, est ad vim quâ totus ejus motus, interea dum quadruplum longitudinis suæ describit, vel tolli possit vel generari, ut densitas medii ad densitatem cylindri quamproximè.

Nam si vas $A B D C$ fundo suo $C D$ superficiem aquæ stagnantis tangat, et aqua ex hoc vase per canalem cylindricum $E F T S$ horizonti perpendicularem in aquam stagnantem effluat, locetur autem circellus $P Q$ horizonti parallelus ubivis in medio canalis, et producat $C A$ ad K , ut sit $A K$ ad $C K$ in duplicatâ ratione quam habet excessus orificii canalis $E F$ supra circellum $P Q$ ad circellum $A B$: manifestum est (per Cas. 5. Cas. 6. et Cor. 1. Prop. XXXVI.) quod velocitas aquæ transeuntis per spatium annulare inter circellum et latera vasis, ea erit quam aqua cadendo et casu suo describendo altitudinem $K C$ vel $I G$ acquirere potest.



Et (per Corol. 10. Prop. XXXVI.) si vasis latitudo sit infinita, ^(a) ut lineola $H I$ evanescat et altitudines $I G$, $H G$

æquantur: vis aquæ defluentis in circellum erit ad pondus cylindri cujus basis est circellus ille et altitudo est $\frac{1}{2} I G$, ut $E F q$ ad $E F q - \frac{1}{2} P Q$ quamproximè. Nam vis aquæ, ^(b) uniformi motu defluentis per totum canalem, eadem erit in circellum $P Q$ in quâcunque canalis parte locatum.

Claudantur jam canalis orificia $E F$, $S T$, et ascendat circellus in fluido undique compresso, et ascensu suo cogat aquam superiorem descendere per spatium annulare inter circellum et latera canalis: et velocitas circelli ascendentis erit ad velocitatem aquæ descendentis ^(c) ut differentia circulorum $E F$ et $P Q$ ad circulum $P Q$, et velocitas circelli ascendentis ad

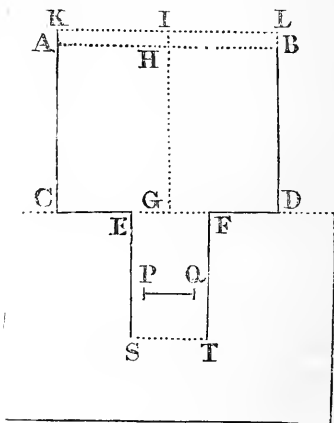
^(a) * Ut lineola $H I$ evanescat. Per Cor. 1. Prop. XXXVII. aut (per not. 275.).

^(b) * Uniformi motu defluentis (per Cas. 6. Prop. XXXVI.).

^(c) * Ut differentia circulorum. Velocitates

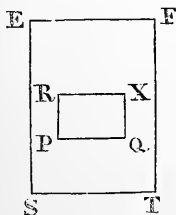
uniformes sunt ut spatia eodem tempore descripta; sed intereadum circulus $P Q$ spatium solidum, seu cylindrum $P Q X R$ describit, descendit aquæ quantitas huic cylindro æqualis, et prop-
terea altitudo verticalis per quam aqua descen-

summam velocitatum, ^(d) hoc est, ad velocitatem relativam aquæ descendentis quâ præterfluit circellum ascendentem, ut differentia circulorum EF et PQ ad circumulum EF, sive ut $EFq - PQq$ ad EFq . Sit illa velocitas relativa æqualis velocitati, quâ supra ostensum est aquam transire per idem spatium annulare dum circellus interea immotus manet, id est, velocitati quam aqua cadendo et casu suo describendo altitudinem IG acquirere potest: et vis aquæ in circellum ascendentem eadem erit ac prius (per legem Corol. 5.) id est, resistentia circelli ascendentis erit ad pondus cylindri aquæ cujus basis est circellus ille et altitudo est $\frac{1}{2}$ IG, ut EFq ad $EFq - \frac{1}{2}PQq$ quamproximè. Velocitas autem circelli erit ad velocitatem, quam aqua cadendo et casu suo describendo altitudinem IG acquirit, ut $EFq - PQq$ ad EFq .



Augeatur amplitudo canalis in infinitum: et rationes illæ inter $EFq - PQq$ et EFq , interque EFq et $EFq - \frac{1}{2}PQq$ accedent ultimo ad rationes æqualitatis. Et propterea velocitas circelli ea nunc erit quam aqua cadendo et casu suo describendo altitudinem IG acquirere potest, resistentia verò ejus æqualis evadet ponderi cylindri cujus basis est circellus ille et altitudo dimidium est altitudinis IG, a quâ cylindrus cadere debet ut velocitatem circelli ascendentis acquirat; ^(e) et hâc velo-

dit, æquatur longitudini quæ habetur dividendo valorem cylindri PQXR per valorem sectionis annularis inter circumulum PQ et vasis latera ES, FT comprehensam, ideòque si \overline{EF}^2 et \overline{PQ}^2 ,



circulos, et RP, lineam rectam significent, altitudo illa per quam aqua descendit est $\frac{\overline{PQ}^2 \times RP}{\overline{EF}^2 - \overline{PQ}^2}$. Quare velocitas circuli ascen-

dentis est ad velocitatem aquæ descendentis ut altitudo RP, ad altitudinem $\frac{\overline{PQ}^2 \times RP}{\overline{EF}^2 - \overline{PQ}^2}$, id est, ut $\overline{EF}^2 - \overline{PQ}^2$ ad \overline{PQ}^2 , sive ut differentia circulorum EF et PQ ad circumulum PQ.

^(d) * Hoc est, ad velocitatem relativam. Cum circulus ascendat et aqua descendat, velocitas relativa æqualis est summæ velocitatum oppositarum circuli et aquæ. Velocitas absoluta circuli ascendentis dicatur V, velocitas absoluta aquæ descendentis v, et quia circuli sunt ut diametrorum quadrata, si EF, et PQ, pro circulorum diametris sumantur; erit (ex dem.) $V : v = EF^2 - PQ^2 : PQ^2$, et ideò $V : V + v = EF^2 - PQ^2 : EF^2$.

^(e) * Et hâc velocitate, cylindrus tempore cadendi duplum longitudinis IG, seu quadruplum longitudinis suæ $\frac{1}{2}$ IG, describet (30. Lib. I.).

citare cylindrus, tempore cadendi, quadruplum longitudinis suæ describet. Resistentia autem cylindri, hæc velocitate secundum longitudinem suam progredientis, eadem est cum resistentiâ circelli (per Lemma IV.) ideóque æqualis est vi quâ motus ejus, intereadum quadruplum longitudinis suæ describit, (f) generari potest quamproximè.

Si longitudo cylindri augeatur vel minuat, motus ejus ut et tempus, quo quadruplum longitudinis suæ describit, (g) augebitur vel minuetur in eadem ratione, ideóque vis illa, quâ motus auctus vel diminutus, tempore pariter aucto vel diminuto, generari vel tolli possit, non mutabitur; ac proinde etiamnum æqualis est resistentiæ cylindri, nam et hæc quoque immutata manet per Lemma IV.

(h) Si densitas cylindri augeatur vel minuat, motus ejus ut et vis quâ motus eodem tempore generari vel tolli potest, in eadem ratione augebitur vel minuetur. Resistentia itaque cylindri cujuscunque erit ad vim quâ totus ejus motus, intereadum quadruplum longitudinis suæ describit, vel generari possit vel tolli, ut densitas medii ad densitatem cylindri quamproximè. Q. e. d.

Fluidum autem comprimi debet ut sit continuum, (i) continuum verò esse debet et non elasticum, ut pressio omnis, quæ ab ejus compressione oritur, propagetur in instanti, et in omnes moti corporis partes æqualiter agendo resistentiam non mutet. Pressio utique, quæ a motu corporis oritur, impenditur in motum partium fluidi generandum et resistentiam creat. Pressio autem quæ oritur a compressione fluidi, utcunque fortis sit, si propagetur in instanti, nullum generat motum in partibus fluidi continui, nullam omnino inducit motus mutationem; ideóque resistentiam

(f) * *Generari potest quamproximè.* Quo enim tempore cylindrus cum prædictâ velocitate uniformiter progrediendo, describit spatium 2 I G, proprio pondere cadendo describeret altitudinem I G, et velocitatem illam acquireret (30. Lib. I.). Cum igitur resistentia æqualis sit ponderi cylindri, patet propositum.

(g) * *Augebitur vel minuetur.* Quantitas motus in cylindro cujus basis, densitas et velocitas datæ sunt, augeatur vel minuitur in ratione longitudinis cylindri seu voluminis, et tempus quo cylindrus datâ illâ velocitate uniformiter progrediendo quadruplum longitudinis suæ describit, augeatur vel minuitur in eadem longitudinis auctæ vel diminutæ ratione (5. Lib. I.) ideóque (179) vis illa quâ motus auctus, &c.

(h) * *Si densitas cylindri cæteris manentibus, augeatur vel minuat, motus ejus ut et vis quâ motus eodem tempore generari vel tolli potest, in eadem ratione augebitur vel minuetur* (279). Cum igitur cylindri cujuscunque resistentia æqualis sit vi quâ motus cylindri aquæ ejusdem

basis, altitudinis et velocitatis, intereadum quadruplum longitudinis suæ describit, generari vel tolli possit, et vis hæc sit ad vim quâ totus prioris cylindri motus eodem tempore generari possit vel tolli, ut densitas aquæ ad densitatem cylindri, consequens est ut resistentia cylindri cujuscunque sit ad vim quâ totus ejus motus, intereadum quadruplum longitudinis suæ describit, generari vel tolli potest, ut densitas aquæ ad densitatem cylindri quamproximè.

(i) * *Continuum verò esse debet et non elasticum.* Nam si fluidum esset elasticum, ipsius partes per compressionem condensarentur, et deinde rarefierent, atque ita pressio per motum progressivum, qui instantaneus esse non potest, propagaretur. At si fluidum continuum sit et densari compressione nequeat, pressio propagabitur in instanti. Experimentis verò constat aquam in statu naturali constitutam vix posse condensari, seu in spatium minus compressione redigi; cum e contra aër maximæ condensationis et rarefactionis sit capax.

nec auget nec minuit. Certè actio fluidi, quæ ab ejus compressione oritur, fortior esse non potest in partes posticas corporis moti quàm in ejus partes anticas, ideòque resistentiam in hac Propositione descriptam minuere non potest: et fortior non erit in partes anticas quàm in posticas, si modo propagatio ejus infinitè velocior sit quàm motus corporis pressi. Infinitè autem velocior erit et propagabitur in instanti, si modo fluidum sit continuum et non elasticum.

(^k) *Corol. 1.* Cylindrorum, qui secundum longitudines suas in mediis continuis infinitis uniformiter progrediuntur, resistentiæ sunt in ratione quæ componitur ex duplicatâ ratione velocitatum et duplicatâ ratione diametrorum et ratione densitatis mediorum.

(^l) *Corol. 2.* Si amplitudo canalís non augeatur in infinitum, sed cylindrus in medio quiescente incluso secundum longitudinem suam progre-

(^k) *Corol. 1.* Sic demonstratur. Resistentia cylindri cujusque est directè ut densitas medií et vis uniformis quâ totus cylindri motus, quo tempore quadruplum longitudinis suæ describit vel generari vel tolli possit, et inversè ut densitas cylindri (ex dem.); sed vis illa uniformis est in ratione composita ex rationibus directis longitudinis cylindri, quadrati dianetri, densitatis et quadrati velocitatis et ex ratione inversâ spatii descripti, seu ex ratione inversâ longitudinis cylindri (280.). Quarè (per compositionem rationum et ex æquo), resistentia cylindri cujuscumque, si conferatur cum resistentiâ alterius cylindri, est in ratione quæ componitur ex ratione densitatis medií, et ratione duplicatâ dianetri et duplicatâ ratione velocitatis.

(^l) * *Corol. 2.* Sic demonstratur. * Si canalis non sit infinitus respectu baseos cylindri inclusi, resumantur ea quæ sub initium Theor. istius XXXVII. dicebantur; primo nempe quod ascendente circello in canali clauso, velocitas relativa aquæ semper sit ad ejus velocitatem ut basis canalís E F ad annulum E P sive ad differentiam circulorum E F et P Q sive ut $E F^2$ ad $E F^2 - P Q^2$; quærat igitur altitudo I G talis ut velocitas lapsu per eam acquisita sit ad velocitatem circelli, ut $E F^2$ ad $E F^2 - P Q^2$, et si fingatur circellus immotus in medio foraminis E F et aqua cadens ex altitudine I G ex vase amplissimo A B D B per illud foramen, cum velocitas aquæ juxta circellum transiens eadem sit ac velocitas respectiva aquæ juxta cylindrum in canali clauso motum, actio aquæ in circellum utrinque æqualis censenda est, sed actio aquæ sive ejus pondus in circellum per Cor. 10. Prop. XXXVI. est ad cylindrum cujus basis est circellus altitudo $\frac{1}{2}$ I G sicut $E F^2$ ad $E F^2 - \frac{1}{2} P Q^2$, hæc itaque erit ratio resistentiæ ad pondus cylindri aquei cujus basis est circellus et altitudo $\frac{1}{2}$ I G; sed gravitas est vis quæ tempore quo percurritur uniformiter quadruplum longitudinis $\frac{1}{2}$ I G sive 2 I G velocitate lapsu per I G acquisitâ, generare potest

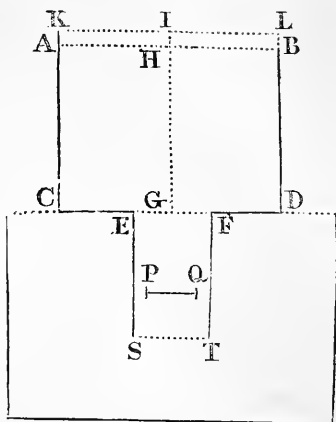
eam ipsam velocitatem, et pondus cylindri est ipsa gravitas per massam cylindri multiplicata, ergo pondus cylindri, est vis quæ dum percurrit quadruplum longitudinis cylindri velocitate lapsu per I G acquisitâ, generare potest motum ejus cylindri eâ velocitate moti.

Cùm verò celeritas quæ lapsu per I G acquiritur sit ad eam cum quâ cylindrus movetur ut $E F^2$ ad $E F^2 - \frac{1}{2} P Q^2$. Quadruplum longitudinis cylindri propriâ suâ celeritate alio tempore percurreret quàm si moveatur celeritate lapsu per I G acquisitâ. Gravitas ergo cylindri, erit ad eam vim quâ cylindri velocitas acquiritur tempore quo quadruplum longitudinis suæ propriâ suâ celeritate describitur, directè ut celeritates quæ iis viribus acquiruntur et inversè ut tempora quibus acquiruntur, quæ tempora (cum agatur de describendo uniformiter eodem spatio quadruplo nempe longitudinis cylindri) sunt inversè ut velocitates, ideòque pondus cylindri est ad vim quâ ejus cylindri motus acquiritur tempore quo quadruplum longitudinis suæ propriâ suâ celeritate describitur bis directè ut celeritas lapsu per I G acquisita, ad celeritatem cylindri, sive bis ut $E F^2$, ad $E F^2 - P Q^2$.

Ergo ex æquo resistentia est ad eam vim sicut $E F^2$ ad $E F^2 - \frac{1}{2} P Q^2$ et bis ut $E F^2$ ad $E F^2 - P Q^2$. At, nec resistentia nec ea vis mutantur longitudine cylindri mutata, sed tantum densitate mutata ut ex ipsa Propositionis demonstratione liquet, est autem vis quâ motus in cylindro aqueo generatur, dato tempore quo quadruplum suæ longitudinis suâ cum velocitate percurrit, ad eam vim qua motus in æquali cylindro, sed diversæ densitatis æquali cum velocitate moto, eodem tempore generatur, ut densitas aquæ sive medií, ad densitatem cylindri, ergo tandem resistentia est ad vim quâ motus in cylindro generari vel tolli potest quo tempore quadruplum suæ longitudinis propriâ cum velocitate describit, ut $E F^2$ ad $E F^2 - \frac{1}{2} P Q^2$ et bis ut $E F^2$ ad $E F^2 - P Q^2$ et ut densitas medií ad densitatem cylindri. Q. e. d.

diatur, et interea axis ejus cum axe canalis coincadat: resistentia ejus erit ad vim quâ totus ejus motus, quo tempore quadruplum longitudinis suæ describit, vel generari possit vel tolli, in ratione quæ componitur ex ratione $E F q$ ad $E F q - \frac{1}{2} P Q q$ semel, et ratione $E F q$ ad $E F q - P Q q$ bis, et ratione densitatis medii ad densitatem cylindri.

Corol. 3. Iisdem positis, et quod longitudo L sit ad quadruplum longitudinis cylindri in ratione quæ componitur ex ratione $E F q - \frac{1}{2} P Q q$ ad $E F q$ semel, et ratione $E F q - P Q q$ ad $E F q$ bis: ^(m) resistentia cylindri erit ad vim quâ totus ejus motus, interera dum longitudinem L describit, vel tolli possit vel generari, ut densitas medii ad densitatem cylindri.



Scholium.

In hâc Propositione resistentiam investigavimus quæ oritur a solâ magnitudine transversæ sectionis cylindri, neglectâ resistentiæ parte quæ ab obliquitate motuum oriri possit. Nam quemadmodum in Casu primo Propositionis XXXVI. obliquitas motuum, quibus partes aquæ in vase, undique convergebant in foramen $E F$, impedivit effluxum aquæ illius per foramen: sic in hâc Propositione, obliquitas motuum, quibus partes aquæ ab anteriore cylindri termino pressæ, cedunt pressioni ⁽ⁿ⁾ et undique divergunt, retardat eorum transitum per loca in circuitu termini illius antecedentis versus posteriores partes cylindri, efficitque ut fluidum ad majorem distantiam commoveatur et resistentiam auget, ^(o) idque in eâ

^(m) * *Resistentia cylindri erit ad vim.* Nam (per Cor. 2. et Hyp.) resistentia cylindri est ad vim quâ totus ejus motus, quo tempore quadruplum longitudinis suæ uniformiter describit vel generari possit vel tolli, in ratione compositâ ex ratione quadruplæ longitudinis cylindri ad longitudinem L et ratione densitatis medii ad densitatem cylindri, et (279) vis quâ totus cylindri motus, intereadum quadruplum longitudinis suæ describit, generari vel tolli possit, est ad vim quâ idem ejusdem cylindri motus quo tempore longitudinem L uniformiter describit vel tolli possit vel generari, in ratione inversâ temporum, sive ob eandem utrinque celeritatem in ratione in-

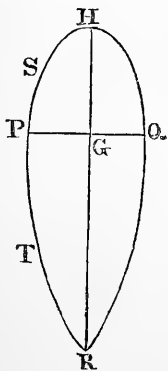
versâ spatiorum, hoc est, in ratione longitudinis L ad quadruplum longitudinis cylindri. Quare (ex æquo) resistentia cylindri est ad vim quâ totus ejus motus, intereadum longitudinem L uniformiter describit tolli possit vel generari, ut densitas medii ad densitatem cylindri.

⁽ⁿ⁾ * *Et undique divergunt.* Vid. Prop. XLI. et XLII. Lib. hujus.

^(o) * *Idque in eâ ferè ratione.* Eodem enim ferè modo motus obliqui in aquæ partibus excitantur, sive aqua in planum circuli immotum impingat, sive circulus eâdem cum velocitate in aquâ quiescente feratur.

ferè ratione quâ effluxum aquæ e vase diminuit, id est in ratione duplicatâ 25 ad 21 circiter. Et quemadmodum, in Propositionis illius casu primo, effecimus ut partes aquæ perpendiculariter et maximâ copiâ transirent per foramen E F, ponendo quod aqua omnis in vase quæ in circuitu cataractæ congelata fuerat, et cujus motus obliquus erat et inutilis, maneret sine motu: sic in hâc Propositione, ut obliquitas motuum tollatur et partes aquæ motu maximè directo et brevissimo cedentes facillimum præbeant transitum cylindro, et sola maneat resistentia, quæ oritur a magnitudine sectionis transversæ, quæque diminui non potest nisi diminuendo diametrum cylindri, concipiendum est quod partes fluidi, quarum motus sunt obliqui et inutiles et resistentiam creant, quiescant inter se ad utrumque cylindri terminum, et cohærant ^(P) et cylindro jungantur. Sit A B C D rectangulum, et sint A E et B E arcus duo parabolici axe A B descripti, latere autem recto quod sit ad spatium H G, describendum a cylindro cadente dum velocitatem suam acquirit, ut H G ad $\frac{1}{2}$ A B. Sint etiam C F et D F arcus alii duo parabolici, axe C D et latere recto quod sit prioris lateris recti quadruplum descripti; et convolutione figuræ circum axem E F generetur solidum cujus media pars A B D C sit

^(P) * Et cylindro jungantur. Ut num. 277. 278. factum est, ubi circulo P Q in quem aqua influebat cum eâ velocitate quam cadendo et casu suo describendo altitudinem H G acquirit et deinde movebatur uniformiter junctæ sunt glaciæ columnæ duæ parabolicæ P H Q et P R Q, quæ aquas exhibent, quarum fluiditas



ac motus sunt inutiles, et parabolæ P S H, P T S erat vertex principalis P, axis P G, et ordinatæ G H, ac G R, ideòque parabolæ P S H, latus rectum $\frac{G H^2}{P G}$, et parabolæ

P T R latus rectum $\frac{G R^2}{P G}$ seu $\frac{4 G H^2}{P G}$ prioris $\frac{G H^2}{P G}$, quadruplum (per Theor. I. de parab.).

Hinc si aqua quiescat et circulus P Q in aquâ moveatur cum eadem velocitate quam grave cadendo et casu suo describendo altitudinem H G acquirit, columnæ illæ P H Q et P R Q aquas fere exponent quarum fluiditas ac motus inutiles sunt ut partes aquæ motu maximè directo et brevissimo cedentes facillimum præbeant transitum circulo. Sed (per Lem. IV.) loco circuli P Q substitui potest cylindrus A B D C eadem velocitate motus, et cujus bases A B, C D circulo P Q æquales sint, quibus proinde basibus adjungendæ sunt columnæ duæ A E B, C F D columnis P H Q, P R Q æquales respectivè, atque idipsum est quod Newtonus in hoc scholio fecit. Siquidem junctâ E F, mediis basibus A B, C D, occurrente in L et K, et positis A B et C D ipsi P Q æqualibus; est (per Newt.

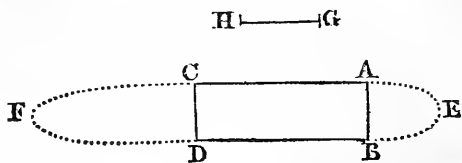
constr.) parabolæ A E latus rectum $\frac{H G^2}{A L} =$

$\frac{H G^2}{P G} = \frac{E L^2}{A L}$, et ideò E L = H G. Et

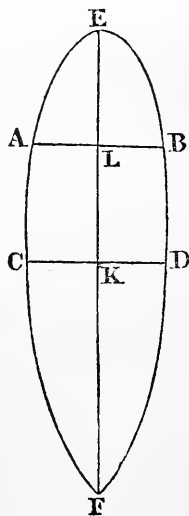
simili modo parabolæ C F, Newtonianâ constructione descriptæ, latus rectum est $\frac{4 H G^2}{P G}$

$= \frac{K F^2}{C K} = \frac{K F^2}{P G}$, ac proindè K F = 2 H G = G R. Columnæ igitur A E B et C F D, non differunt a columnis P H Q et P R Q.

cylindrus de quo agimus, et partes extremæ $A B E$ et $C D F$ contineant partes fluidi inter se quiescentes et in corpora duo rigida concretas, quæ cylindro utrinque tanquam caput et cauda adhæreant. Et solidi $E A C F D B$, secundum longitudinem axis sui $F E$ in partes versus E progredientis, resistentia ea erit quamproxime quam in hac Propositione descripsimus, id est, quæ rationem illam habet ad vim quâ totus cylindri motus, interea dum longitudo $4 A C$ motu illo uniformiter continuato describatur vel tolli possit vel generari, quam densitas fluidi habet ad densitatem cylindri quamproximè. ⁽⁹⁾ Et hæc vi resistentia minor esse non potest quàm in ratione 2 ad 3. per Corol. 7. Prop. XXXVI.



⁽⁹⁾ * Et hæc vi resistentia minor esse non potest, &c. Resistentia (per Cor. 7. Prop. XXXVI.) minor esse non potest pondere cylindri aquæ, cujus basis est circellus $P Q$ (sive $A B$) et altitudo $\frac{1}{3} E L$ seu $\frac{1}{3} H G$. (Vid. figuras superiores.) Velocitas quam hic cylindrus aquæ, vi ponderis sui cadendo et casu suo describendo altitudinem $E L$ acquirit, æqualis est velocitati cum quâ cylindrus $A C D B$, in aquâ movetur (ex dem.) et ideò cum basis $A B$ sit etiam utrique cylindro communis, pondus cylindri aquæ erit ad vim quâ totus cylindri $A B D C$ motus, quo tempore longitudinem $4 A C$ uniformiter describit, generari possit vel tolli, in ratione compositâ ex ratione densitatis aquæ ad densitatem cylindri $A B D C$, et ratione altitudinis $\frac{1}{3} E L$ ad altitudinem $A C$, et ratione spatii $4 A C$ ad spatium $2 E L$ (280), id est, in ratione compositâ ex ratione densitatis aquæ ad densitatem cylindri $A B D C$ et ratione 2 ad 3. Si itaque vis quâ totus cylindri $A B D C$ motus, intereadum longitudinem $4 A C$, uniformiter describit, generari vel tolli possit, sit ad vim aliquam P , ut densitas cylindri $A B D C$ ad densitatem aquæ, erit (ex æquo) pondus prædicti cylindri aquæ ad vim P ut 2 ad 3, atquæ ideò pondus cylindri aquæ, quo resistentia minor esse non potest; quam in ratione 2 ad 3.



LEMMA V.

Si cylindrus, sphaera et sphærois, quorum latitudines sunt æquales, in medio canalis cylindrici ita locentur successivè ut eorum axes cum axe canalis coincident : hæc corpora fluxum aquæ per canalem æqualiter impediunt.

(^r) Nam spatia inter canalem et cylindrum, sphaeram, et sphæroidem per quæ aqua transit, sunt æqualia : et aqua per æqualia spatia æqualiter transit.

Hæc ita se habent ex hypothesi, quòd aqua omnis supra cylindrum sphaeram vel sphæroidem congelatur, cujus fluiditas ad celerrimum aquæ transitum non requiritur, ut in Corol. 7. Prop. XXXVI. explicui.

LEMMA VI.

Iisdem positis, corpora prædicta æqualiter urgentur ab aquâ per canalem fluente.

Patet per Lemma V. et motus legem tertiam. Aqua utique et corpora in se mutuo æqualiter agunt.

LEMMA VII.

Si aqua quiescat in canali, et hæc corpora in partes contrarias æquali velocitate per canalem ferantur : æquales erunt eorum resistentiæ inter se.

Constat ex Lemmate superiore, nam motus relativi iidem inter se manent.

Scholium.

Eadem est ratio corporum omnium convexorum et rotundorum, quorum axes cum axe canalis coincidunt. Differentia aliqua ex majore vel minore frictione oriri potest; sed in his Lemmatis corpora esse politissima supponimus, et medii tenacitatem et frictionem esse nullam, et quod partes fluidi, quæ motibus suis obliquis et superfluis fluxum aquæ per canalem perturbare, impedire, et retardare possunt, quiescant inter se tanquam gelu constrictæ, et corporibus ad ipsorum partes anticæ et posticæ ad-

(^r) * Nam spatia inter canalem et transversas et sphæroidis per quæ aqua transit, sunt æqualia. sectiones, seu latitudines maximas cylindri, sphaeræ Vid. schol. sequens.

hæreant, perinde ut in scholio Propositionis præcedentis exposui. Agitur enim in sequentibus de resistentiâ omnium minimâ quam corpora rotunda, datis maximis sectionibus transversis descripta, habere possunt.

Corpora fluidis innatantia, ubi moventur in directum, efficiunt ut fluidum ad partem anticam ascendat, ad posticam subsidat, præsertim si figura sint obtusa; et inde resistentiam paulo majorem sentiunt quàm si capite et caudâ sint acutis. Et corpora in fluidis elasticis mota, si ante et post obtusa sint, fluidum paulo magis condensant ad anticam partem et paulo magis relaxant ad posticam; et inde resistentiam paulo majorem sentiunt quam si capite et caudâ sint acutis. Sed nos in his Lemmatis et Propositionibus non agimus de fluidis elasticis, sed de non elasticis; non de insidentibus fluido, sed de altè immersis. Et ubi resistentia corporum in fluidis non elasticis innotescit, augenda erit hæc resistentia aliquantulum tam in fluidis elasticis; qualis est aër, quàm in superficiebus fluidorum stagnantium, qualia sunt maria et paludes.

PROPOSITIO XXXVIII. THEOREMA XXX.

Globi, in fluido compresso infinito et non elastico uniformiter progredientis, resistentia est ad vim quâ totus ejus motus, quo tempore octo tertias partes diametri suæ describit, vel tolli possit vel generari, ut densitas fluidi ad densitatem globi quamproximè.

(*) Nam globus est ad cylindrum circumscriptum ut duo ad tria; et propterea vis illa, quæ tollere possit motum omnem cylindri interea dum cylindrus describat longitudinem quatuor diametrorum, globi motum omnem tollet interea dum globus describat duas tertias partes hujus longitudinis, id est, octo tertias partes diametri propriæ. Resistentia autem cylindri est ad hanc vim quamproximè ut densitas fluidi ad densitatem cylindri vel globi per Prop. XXXVII. et resistentia globi æqualis est resistentiæ cylindri per Lem. V. VI. VII. Q. e. d.

(†) *Corol. 1.* Globorum, in mediis compressis infinitis, resistentiæ sunt

(*) *Nam globus est ad cylindrum circumscriptum ut duo ad tria* (170. Lib. I.) et propterea, cum eadem sit globi et cylindri densitas eademque velocitas (ex Hyp.) quantitas motûs globi est ad quantitatem motûs cylindri ut duo ad tria, et tempus quo globus octo tertias partes diametri propriæ uniformiter describit, est ad tempus quo cylindrus eadem uniformi velocitate quadruplum longitudinis suæ, seu duodecim tertias diametrorum globi describit, etiam ut duo ad tria. Quare (178) vis uniformis quâ totus

globi motus intereadum octo tertias partes diametri propriæ describit tolli possit vel generari, est ad vim uniformem quâ totus cylindri motus, quo tempore longitudinem quatuor diametrorum globi describit vel tolli vel generari possit ut duo ad tria directè et duo ad tria inversè, id est, in ratione æqualitatis. *Resistentia autem cylindri, &c.*

(†) * *Corol. 1.* Patet per Cor. 1. Prop. XXXVII., quia resistentia globi æqualis est resistentiæ cylindri circumscripti.

in ratione quæ componitur ex duplicatâ ratione velocitatis, et duplicatâ ratione diametri, et ratione densitatis mediorum.

Corol. 2. Velocitas maxima quâcum globus, vi ponderis sui comparativi, in fluido resistente potest descendere, ea est quam acquirere potest globus idem, eodem pondere, sine resistantiâ cadendo et casu suo describendo spatium quod sit ad quatuor tertias partes diametri suæ ut densitas globi ad densitatem fluidi. Nam globus tempore casus sui, cum velocitate cadendo acquisitâ, ^(u) describet spatium quod erit ad octo tertias diametri suæ, ut densitas globi ad densitatem fluidi; et vis ponderis motum hunc generans, erit ad vim quæ motum eundem generare possit, quo tempore globus octo tertias diametri suæ eâdem velocitate describit, ^(x) ut densitas fluidi ad densitatem globi: ideóque per hanc Propositionem, vis ponderis æqualis erit vi resistantiæ, et propterea globum accelerare non potest.

^(y) *Corol. 3.* Datâ et densitate globi et velocitate ejus sub initio motus,

^(u) * Describet spatium quod erit ad octo tertias partes diametri suæ, &c. Describet enim spatium duplum illius quod vi ponderis sui comparativi sine resistantia cadendo descripsit (30. Lib. 11.), id est, spatium quod erit ad octo tertias partes, &c.

^(x) * Ut densitas fluidi ad densitatem globi. Sit D diameter globi, 2 F spatium quod sit ad $\frac{8}{3}$ D ut densitas globi ad densitatem fluidi; et tempus quo globus uniformiter describit spatium $\frac{8}{3}$ D, erit ad tempus quo eâdem uniformi velocitate describit spatium 2 F, ut $\frac{8}{3}$ D ad 2 F (5. Lib. 1.), id est, ut densitas fluidi ad densitatem globi. Cum igitur vires uniformes sint reciproce ut tempora quibus motus æquales generant (279), patet propositum.

^(y) 282. Cor. 3. Datâ et densitate globi et velocitate ejus sub initio motus et densitate fluidi datur ad omne tempus et velocitas globi, et ejus resistantia et spatium ab eo descriptum. * Primum, ex datâ densitate globi, et densitate fluidi, invenitur, per Cor. 2, vis æqualis resistantiæ cum velocitas ea est quam acquirere potest is globus, cadendo in vacuo per vim sui ponderis comparativi et describendo spatium quod sit ad quatuor tertias diametri suæ ut densitas globi ad densitatem fluidi.

Secundò, ex datâ hac resistantiâ invenitur resistantia quæ competit velocitati globi de quo agitur sub initio ejus motus, quia resistantiæ hic supponuntur esse ut quadrata velocitatum; istâ autem resistantiâ cognitâ dabitur tempus quo si hæc resistantia uniformiter ageret, totam velocitatem quam habet globus sub initio motus destruere posset, sique si B C designet eam velo-

citatem initio motus simulque resistantiam ipsi competentem, designeturque per A B illud tempus quo ea velocitas per resistantiam uniformem destrui potest, et erecto perpendicularo A D, asymptotis A D, A B per punctum C describatur hyperbolâ, ex ejus hyperbolæ constructione dabitur ad quodlibet tempus (quod designabitur per B E) velocitas residua E F, resistantia B H, et spatium descriptum C B E F; quâ autem ratione hæc singula ad calculum revocantur, dicendum.

I. Vis illa quæ resistantiæ æqualis esse debet cum corpus habet velocitatem maximam quam lapsu suo in fluido dato acquirere potest, est ipsum pondus comparativum corporis, sit ergo A ejus pondus, densitas data corporis est ad densitatem fluidi, ut A ad pondus æqualis voluminis fluidi, quo invento, detrahatur illud ex pondere A, relinquitur pondus comparativum globi in fluido quod dicatur B.

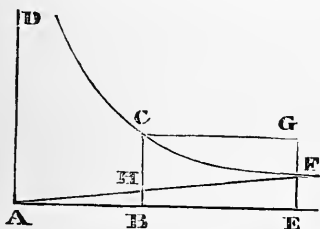
Ut præterea determinetur tempus quo eo pondere B corpus percurrent cadendo spatium quod sit ad quatuor tertias diametri suæ ut ejus densitas ad densitatem fluidi, sive, si dicatur D diameter et dicatur F spatium quod sit ad $\frac{4}{3}$ D ut densitas globi ad densitatem mediæ, ut determinetur tempus quo globus pondere B cadendo percurrent spatium F posito quod grave cadendo in vacuo pondere A tempore unius minuti secundi pedes Parisienses $15\frac{1}{2}$ percurrent, et cum spatia diversis viribus acceleratricibus descripta eodem tempore sint ut illæ vires, spatium $15\frac{1}{2}$ pedum pondere A uno minuto secundo percursum est ad spatium eodem tempore pondere B percursum ut A ad B. Ut autem est illud spatium, ad spatium F, ita quadratum minuti unius secundi ad quadratum temporis quo eo pondere

ut et densitate fluidi compressi quiescentis in quo globus movetur; datur ad omne tempus et velocitas globi et ejus resistentia et spatium ab eo descriptum, per Corol. 7. Prop. XXXV.

(^z) Corol. 4. Globus in fluido compresso quiescente ejusdem secum densitatis movendo, dimidiam motus sui partem prius amittet quam longitudinem duarum ipsius diametrorum descripserit, per idem Corol. 7.

B spatium F percurratur, quod tempus dicatur G, cumque velocitate per lapsum acquisitâ duplum spatii lapsu percurri uniformiter describatur ipso lapsus tempore, ideò velocitate p ndere B tempore G acquisitâ, eodem tempore G describeretur 2 F, cumque velocitas omnis exprimitur per spatium divisum per tempus, erit ea velocitas maxima $\frac{2 F}{G}$ quæ in posterum dicatur H.

II. Datâ autem quâvis aliâ ejusdem globi velocitate in eodem fluido eaque dicatur M, resistentia ipsi competens ita obtinetur, ut quadratum velocitatis H ad quadratum velocitatis hujusce M, ita est resistentia adversus velocitatem H cui



pondus B æquipollet, ad resistentiam adversus velocitatem M, quam vocabo R; cum ergo prius data sit ratio A ad B dabitur etiam ratio A ad R ideòque dabitur spatium quod actione vi R uniformi suppositâ per unum minutum secundum describeretur, siquidem spatia per diversas vires uniformes acceleratrices descripta iisdem temporibus sunt ut illæ vires, ideòque A ad R ut $15\frac{1}{12}$ ped. ad spatium uno minuto secundo descriptum, ejus spatii duplum per unum minutum secundum divisum exprimit velocitatem vi R per unum minutum secundum productam. Unde invenietur tempus quo per eam vim R uniformiter agentem velocitas M produci vel etiam destrui posset, velocitates enim per eandem vim acquisitæ sunt ut tempora quibus acquiruntur; ergo velocitas tempore unius minuti secundi acquisita est ad velocitatem M, ut unum minutum secundum ad tempus quo vis R velocitatem M generare vel tollere posset. Unde tandem in hyperbolæ constructione datur valor temooris per lineam A B designati.

Sumatur ergo B E quod sit ad A B ut tempus quod assumere lubet ad tempus illud quo vis R velocitatem M quæ per B C exprimitur gene-

rare vel tollere potest uniformiter agendo, et ducatur ordinata E F, ea designabit velocitatem globi eo tempore superstitem quæ ex naturâ hyperbolæ habebitur, est enim A E, ad A B, sicut B C sive M ad E F, unde cum sit A E = A B + B E; sitque A B tempus mox inventum, B E tempus assumptum, B C sive M velocitas data, datur etiam E F.

Datur pariter resistentia B H, est enim B C ² ad E F ² ut R ad hancce novam resistentiam, quæ, prioribus datis, etiam dabitur.

Denique datur spatium a corpore descriptum, datur enim spatium quod velocitate constanti M tempore B E percurritur; est verò area B C G E ad spatium hyperbolicum B C F E, ut spatium velocitate constanti M tempore B E percursum, ad spatium percursum cum velocitate per resistentiam decrescente, at ex naturâ logarithmorum hyperbolicorum spatium hyperbolicum B C F E

est logarithmus quantitatis $\frac{A E}{A B}$, et quia logarithmi earumdem quantitatum in diversis logarithmorum seriebus sumpti sunt proportionales, sumatur logarithmus illius quantitatis $\frac{A E}{A B}$ in

tabulis vulgaribus, fiatque ut logarithmus denarii numeri in tabulis (sive unitas) ad 2.30258509 qui est logarithmus hyperbolicus ejusdem denarii numeri, ita logarith. quantitatis $\frac{A E}{A B}$ ex tabulis

desumptus ad logarithmum hyperbolicum ejus quantitatis, habebitur area B C F E, sit ergo dignitas hyperbolæ = 1, erit B C = $\frac{1}{A B}$ et

area B C G E = $\frac{1}{A B} \times B E$, ideòque ut $\frac{B E}{A B}$, ad logarithmum quantitatis $\frac{A E}{A B}$ e tabulis desumptum et multiplicatum per 2.30258509. Ita spatium velocitate constanti B C tempore B E percursum, ad spatium percursum cum velocitate per resistentiam decrescente. Q. e. i.

(^z) * Corol. 4. ; * cum globus et fluidum ejusdem densitatis supponantur, resistentia isto in casu erit æqualis vi quâ totus motus globi generari vel tolli posset quo tempore octo tertias diametri suæ uniformiter describeret, itaque sit B C motus globi, erit A B tempus quo uniformiter percurreret octo tertias suæ diametri, sit E F, dimidium B C, quoniam E F exprimit residuum motum, B E erit tempus quo dimidia pars motus amissa fuerit, sed B C ad E F ut A E ad A B et est B C ad E F ut 2 ad 1, per const. ergo etiam A E = 2 A B et B E = A B,

PROPOSITIO XXXIX. THEOREMA XXXI.

Globi, per fluidum in canali cylindrico clausum et compressum uniformiter progredientis, resistentia est ad vim, quâ totus ejus motus, interea dum octo tertias partes diametri suæ describit, vel generari possit vel tolli, in ratione quæ componitur ex ratione orificiî canalîs ad excessum hujus orificiî supra dimidium circuli maximi globi, et ratione duplicatâ orificiî canalîs ad excessum hujus orificiî supra circumulum maximum globi, et ratione densitatis fluidi ad densitatem globi quamproximè.

Patet per Corol. 2. Prop. XXXVII. procedit verò demonstratio (a) quemadmodum in Propositione præcedente.

Scholium.

In Propositionibus duabus novissimis (perinde ut in Lem. V.) suppono quòd aqua omnis congelatur quæ globum præcedit, et cujus fluiditas auget resistentiam globi. Si aqua illa omnis liquescat, augebitur resistentia aliquantulum. Sed augmentum illud in his Propositionibus parvum erit et negligi potest, propterea quòd convexa superficies globi totum ferè officium glaciei faciat.

PROPOSITIO XL. PROBLEMA IX.

Globi, in medio fluidissimo compresso progredientis, invenire resistentiam per phenomena.

Sit A pondus globi in vacuo, B pondus ejus in medio resistente, D diameter globi, F spatium quod sit ad $\frac{4}{3}$ D ut densitas globi ad densitatem

ideòque dimidium motum amittet quo tempore percurreret uniformiter octo tertias diametri suæ; sed illud spatium uniformiter percursum est ad spatium percursum velocitate per resistentiam

decescente ut $\frac{B E}{A B}$ (sive $\frac{1}{1}$) ad logarithmum e

tabulis desumptum quantitatis $\frac{A E}{A B}$ (sive $\frac{2}{1}$)

multiplicatum per 2.50258509, et ille logarithmus est .5010300, productum ergo erit .6931, &c. ideò 1. ad .6931, &c. ut $\frac{8}{9}$ D, ad 1.84852 X D, quod quidem paulo minus est quam 2 D, ideò globus in fluido ejusdem densitatis dimidium sui motus partem prius describet quam

longitudinem duarum ipsius diametrorum descripserit. Q. e. d.

(a) * Quemadmodum in Propositione præcedente. Demonstratio eadem manet, quæ in nota 281. adjungenda tantum hæc sunt: resistentia autem cylindri est ad hanc vim quam proximè in ratione quæ componitur ex ratione orificiî canalîs ad excessum hujus orificiî supra dimidium circuli maximi globi, et ratione duplicata orificiî canalîs ad excessum hujus orificiî supra circumulum maximum globi, et ratione densitatis fluidi ad densitatem globi (per Corol. 2. Prop. XXXVII.); et resistentia globi æqualis est resistentiæ cylindri, per Lem. V. VI. VII. Q. e. d.

0, 4342944819 $\frac{2}{G} P$, sitque L logarithmus numeri $\frac{N+1}{N}$: et velocitas cadendo acquisita erit $\frac{N-1}{N+1} H$, altitudo autem descripta erit $\frac{2}{G} \frac{P F}{G} - 1, 3862943611 F + 4, 605170186 L F$. ^(d) Si fluidum satis profundum sit negligi potest terminus $4, 605170186 L F$; et erit $\frac{2}{G} \frac{P F}{G} - 1, 386294611 F$ altitudo descripta quamproximè. Patent hæc per Libri secundi Propositionem nonam et ejus Corollaria, ex hypothesi quod globus nullam aliam patiatur resistentiam nisi quæ oritur ab inertia materiæ. Si verò aliam insuper resistentiam patiatur, descensus erit tardior, et ex retardatione innotescet quantitas hujus resistentiæ.

Ut corporis in fluido cadentis velocitas et descensus facilius innotescant, composui tabulam sequentem, cujus columna prima denotat tempora descensus, secunda exhibet velocitates cadendo acquisitas existente velocitate maximâ 100000000, tertia exhibet spatia temporibus illis cadendo descripta existente $2 F$ spatio quod corpus tempore G cum velocitate maximâ describit, et quarta exhibet spatia iisdem temporibus cum velocitate maximâ descripta. Numeri in quartâ columnâ sunt $\frac{2}{G} \frac{P}{G}$, et subducendo numerum $1, 3862944 - 4, 6051702 L$, inveniuntur numeri in tertiâ columnâ, et multiplicandi sunt hi numeri per spatium F ut habeantur spatia cadendo descripta. Quinta his insuper adjecta est columna, quæ continet spatia descripta iisdem temporibus a corpore, vi ponderis sui comparativi B , ^(e) in vacuo cadente.

2, 302585092994, seu per 2, 302585093. Hic numerus dicatur M , logarithmus numeri 4 in tabulis sumptus Q , et logarithmus etiam tabularis numeri $\frac{N+1}{N}$ sit L ; et erit $S = \frac{2}{G} \frac{P F}{G} - M Q F + 2 M L F$. Est autem $2 M = 4, 605170186$, et Q in tabulis vulgaribus est 0, 60206; seu accuratius 0, 60205999133, ideoque $M Q = 1, 3862943611$ quamproximè. Quare altitudo S , quam globus in medio resistente cadendo tempore P describit, est $\frac{2}{G} \frac{P F}{G} - 1, 3862943911 F + 4, 605170186 L F$, uti Newtonus definit.

^(d) * *Si fluidum satis profundum sit*, id est, si altitudo S quam globus tempore P cadendo describit, satis magna fuerit, negligi potest terminus $4, 605170186 L F$. Cum enim sit L logarithmus numeri $\frac{N+1}{N}$, ubi N est numerus satis magnus, seu ubi numerus $\frac{N+1}{N}$ est fere æqua-

lis unitati, logarithmus L evanescit quam proximè. Sed, si velocitas maxima dicatur H , et velocitas tempore P casu globi acquisita V , est $H : V = a : x$ (285), et ideò $\frac{H+V}{H-V} = \frac{a+x}{a-x} = N$, et quando spatium descriptum S satis magnum est, fit $V = H$ quam proximè, ac proinde $\frac{H+V}{H-V}$ seu N numerus satis magnus, ut ex sequenti tabula manifestum est. Patet ergo propositum.

^(e) * *In vacuo cadente*. Hujus tabulæ constructio paulo fusiùs exponenda videtur. Numeri singuli columnæ primæ, quibus exprimitur ratio temporis P ad tempus G , assumuntur pro lubitu; numeri verò in columna quarta correspondentes facillimè reperiuntur. Cum enim spatium tempore G velocitate maximâ H uniformiter descriptum sit $2 F$, et spatia eâdem uniformi velocitate descripta temporibus, quibus describuntur, proportionalia sint; numeri co-

<i>Tempora P</i>	<i>Velocitates ca- dentis in fluido.</i>	<i>Spatia caden- do descripta in fluido.</i>	<i>Spatia motu maximo de- scripta.</i>	<i>Spatia caden- do descripta in vacuo.</i>
0,001G	99999 $\frac{2}{3}$	0,000001F	0,002F	0,000001F
0,01G	999967	0,0001F	0,2F	0,0001F
0,1G	9966799	0,0099834F	0,2F	0,01F
0,2G	19737532	0,0397361F	0,4F	0,04F
0,3G	29131261	0,0886815F	0,6F	0,09F
0,4G	37994896	0,1559070F	0,8F	0,16F
0,5G	46211716	0,2402290F	1,0F	0,25F
0,6G	53704957	0,3402706F	1,2F	0,36F
0,7G	60436778	0,4545405F	1,4F	0,49F
0,8G	66403677	0,5815071F	1,6F	0,64F
0,9G	71629787	0,7196609F	1,8F	0,81F
1G	76159416	0,8675617F	2F	1F
2G	96402758	2,6500055F	4F	4F
3G	99505475	4,6186570F	6F	9F
4G	99932930	6,6143765F	8F	16F
5G	99990920	8,6137964F	10F	25F
6G	99998771	10,6137179F	12F	36F
7G	99999834	12,6137073F	14F	49F
8G	99999980	14,6137059F	16F	64F
9G	99999997	16,6137057F	18F	81F
10G	99999999 $\frac{2}{3}$	18,6137056F	20F	100F

lumnæ quartæ, duplicatis numeris columnæ primæ correspondentibus, habentur. Quia verò spatia, a corpore vi ponderis sui comparativi B sine resistentia cadente, descripta, sunt in duplicatâ ratione temporum quibus describuntur, et tempore G describitur spatium F; numeri columnæ quintæ sunt quadrata numerorum correspondentium in columna prima. Numeri columnæ secundæ velocitatem acquisitam cadendo

in fluido tempore P indicant quæ est $\frac{N-1}{N+1}$

× H, sicque inveniuntur: assumpto in columna prima termino quovis, exempli causâ, 2 G pro

P, fit $\frac{2P}{G} = \frac{4G}{G} = 4$, et hinc 0,4342944819

$\frac{2P}{G} = 1,7371779276$. Huic logarithmo in ta-

bulis congruit numerus absolutus 54, 59815

= N; unde fit $\frac{N-1}{N+1} = \frac{5359815}{5559815}$ et quia

H = 10000000 (per Hyp.), velocitas tempore

P, sive 2 G, acquisita $\frac{N-1}{N+1}$ H, est 96402758,

uti Newtonus in tabula posuit. Inventis hoc modo numeris columnæ secundæ, inveniuntur

quoque numeri columnæ tertię, videlicet $\frac{2P}{G}$

— 1, 386293611 + 4, 6051702 L. Quoniam

enim datus est numerus $\frac{2P}{G}$, et jam inventus fuit

numerus N, cognoscetur numerus $\frac{N+1}{N}$ cum

ipsius logarithmo L; atque ita obtinebitur numerus columnæ tertię.

286. Ex hac porro tabulâ patet verum esse posse, quod nonnulli se observasse testantur, nimirum gravia in mediis resistentibus cadentia brevi satis tempore ad maximam quam acquirere possint velocitatem pervenire et postea moveri uniformiter; licet per theoriam non nisi tempore infinito, seu nunquam, possint maximam illam velocitatem reverâ acquirere. Nam si tempus P quo globus in fluido quocumque cadit, sit æquale tempori 5 G; globi velocitas acquisita erit ad velocitatem maximam ut 9999092 ad 10000000, seu ut 1. ad 1,0000908, quamproximè, et spatium hoc tempore 5 G descriptum erit 8,6137964 F, et deinde spatia descripta crescent fere in progressionem arithmetica ad modum temporum. Elapso igitur tempore 4 G vel 5 G globus uniformiter descendere videbitur, licet ejus velocitas reverâ perpetuò crescat. Si verò assumatur tempus P æquale 10 G, tum velocitas acquisita est ad velocitatem maximam ut 99999999 $\frac{2}{3}$ ad 100000000, et tantorum numerorum differentia $\frac{2}{3}$ prorsus insensibilis est oculis humanis.

Scholium.

Ut resistantias fluidorum investigarem per experimenta, paravi vas ligneum quadratum, longitudine et latitudine internâ digitorum novem ^(f) pedis Londinensis, profunditate pedum novem cum semisse, idemque implevi aquâ pluviali; et globis ex cerâ et plumbo incluso formatis, notavi tempora descensus globorum, existente descensus altitudine 112 digitorum pedis. Pes solidus cubicus Londinensis continet 76 libras Romanas aquæ pluvialis, et pedis hujus digitus solidus continet $\frac{1}{3}\frac{9}{8}$ uncias libræ hujus ^(g) seu grana 253 $\frac{1}{3}$; et globus aqueus diametro digiti unius descriptus continet grana 132, 645 in medio aëris, ^(h) vel grana 132, 8 in vacuo; ⁽ⁱ⁾ et globus quilibet alius est ut excessus ponderis ejus in vacuo supra pondus ejus in aquâ.

Exper. 1. Globus, cujus pondus erat 156 $\frac{1}{4}$ granorum in aëre et 77 granorum in aquâ, altitudinem totam digitorum 112 tempore minutorum quatuor secundorum descripsit. Et experimento repetito, globus iterum cecidit eodem tempore minutorum quatuor secundorum.

^(k) Pondus globi in vacuo est 156 $\frac{1}{3}\frac{5}{8}$ gran. et excessus hujus ponderis supra pondus globi in aquâ est 79 $\frac{1}{3}\frac{5}{8}$ gran. ^(l) Unde prodit globi diameter 0, 84224 partium digiti. Est autem ut excessus ille ad pondus globi

^(f) * *Pedis Londinensis.* Pes Londinensis est ad pedem Parisiensem ut 15 ad 16; uterque in digitos 12, et digitus in 12 lineas dividitur.

^(g) * *Seu grana.* Libra Romana uncias 12, uncia 480. grana continet.

^(h) 287. * *Vel grana 132, 8 in vacuo.* Corpus quodlibet ponderis sui partem amittit in aëre æqualem ponderi paris voluminis aëris; corporum vero pondera absoluta sub paribus voluminibus sunt ut eorum densitates, et densitas aquæ, juxta Newtonum, est ad densitatem aëris ut 860 ad 1. Quare, cum globi aquei pondus in aëre parum differat ab ejusdem pondere in vacuo, dicendum est, ut 860 ad 1, ita pondus globi aquei granorum 132, 645 ad pondus æqualis globi aëris, quod proinde erit granorum 0, 1543 quam proximè. Addatur pondus hoc ponderi granorum 132, 645, et summa gran. 132, 799 $\frac{1}{3}$, seu gran. 132, 8 erit pondus prædicti globi aquæ in vacuo quam proximè. Dato igitur pondere globi cujuslibet aquei in aëre, invenitur ejus pondus in vacuo, si ponderi dato addatur id quod ex divisione ejusdem ponderis per numerum 860 habetur.

⁽ⁱ⁾ 288. * *Et globus quilibet, &c.* Globus quilibet E est ad globum æquem C diametro digiti unius descriptum, ut excessus ponderis globi E in vacuo supra pondus ejus in aqua, ad

pondus granorum 132, 8. Nam excessus ponderis globi E in vacuo supra pondus ejus in aquâ est pondus globi aquæ ejusdem cum globo E diametri; sed globi aquæ homogenei sunt ut eorumdem pondera: est igitur globus E ad globum C ut excessus ponderis globi E in vacuo supra pondus ejus in aqua, ad pondus 132, 8 granorum.

^(k) * *Pondus globi in vacuo est 156 $\frac{1}{3}\frac{5}{8}$ gran.* Si enim ex pondere globi in aëre gran. 156 $\frac{1}{4}$ subducatur pondus ejus in aqua, quod est gran. 77, residuum erit pondus globi aquæ ejusdem voluminis gran. 79 $\frac{1}{3}$; et propterea (287) ut habeatur pondus globi in vacuo, ponderi gran. 156 $\frac{1}{4}$ addendum est pondus gran. $\frac{79\frac{1}{3}}{860}$, et prodit

pondus globi in vacuo gran. 156 $\frac{1}{3}\frac{5}{8}$ quam proximè.

^(l) * *Unde prodit globi diameter, &c.* Est enim (288) pondus gran. 132, 8 ad excessum 79 $\frac{1}{3}\frac{5}{8}$, ut globus diametro digiti unius descriptus ad globum quæsitum; idèoque ut diametri 1 digiti cubus 1 ad diametri globi quæsitii cubum,

qui proinde erit $\frac{79\frac{1}{3}\frac{5}{8}}{132,8}$ partium digiti cubici.

Hujus fractionis radix cubica, seu globi diameter, est 0, 84224 partium digiti quam proximè.

in vacuo, ^(m) ita densitas aquæ ad densitatem globi, ⁽ⁿ⁾ et ita partes octo tertiæ diametri globi (viz. 2, 24597 dig.) ad spatium 2 F, ^(o) quod proinde erit 4, 4256 dig. Globus tempore minuti unius secundi, toto suo pondere granorum $156\frac{1}{3}$, ^(p) cadendo in vacuo describet digitos $193\frac{1}{3}$, et pondere granorum 77, eodem tempore sine resistantiâ cadendo in aquâ ^(q) describet digitos 95, 219; ^(r) et tempore G, quod sit ad minutum unum secundum in subduplicatâ ratione spatii F seu 2, 2128 dig. ad 95, 219 dig. describet 2, 2128 dig. et velocitatem maximam H acquireret quâcum potest in aquâ descendere. ^(s) Est igitur tempus G 0'', 15244. Et hoc tempore G, cum velocitate illâ maximâ H, globus describet spatium 2 F digitorum 4, 4256; ^(t) ideoque tempore minutorum quatuor secundorum describet spatium digitorum 116, 1245. ^(u) Subducatur spatium 1, 3862944 F seu 3, 0676 dig. et manebit spatium 113, 0569 digitorum quod globus cadendo in aquâ, in vase amplissimo, tempore minutorum quatuor secundorum describet. Hoc spatium, ob angustiam vasis lignei prædicti, ^(x) minui

^(m) * Ita densitas aquæ ad, &c. (283).

⁽ⁿ⁾ * Et ita partes octo tertiæ diametri globi, &c. Per Prop. XL. Lib. II.

^(o) * Quod proinde erit 4, 4256 dig. Nam $79\frac{1}{3} : 156\frac{1}{3} = 3015 : 5941 = 2, 24597 : 4, 4256$, quam proximè.

^(p) 289. * Cadendo in vacuo describet digitos $193\frac{1}{3}$. Quoniam corporis, præsertim gravioris, oscillationes quæ in minoribus arcubus fiunt, iisdem quam proximè temporibus peraguntur in aëre et in vacuo (per Cor. 2. Prop. XXVII. Lib. II.); spatium quod grave cadendo in vacuo tempore minuti unius secundi describit, est pedum Parisiensium $15\frac{1}{2}$, seu accuratius digitorum $181\frac{1}{6}$ quam proximè (471. Lib. I.); et quia pes Londinensis pede Parisiensi minor est in ratione 15 ad 16, erit spatium illud digitorum Londinensium $193\frac{1}{3}$, seu fere $193\frac{1}{4}$. Hoc spatium augeri paululum debet ob pondus in aëre oscillantis diminutum, et ideò poni potest digit. Lond. $193\frac{1}{3}$ quam proximè.

^(q) * Describet digitos 95, 219. Nam vires uniformes sunt ut spatia quæ corpus viribus illis agitato dato tempore describit (179); et propterea $156\frac{1}{3}$ est ad 77 ut $193\frac{1}{3}$ dig. ad spatium quod globus vi ponderis granorum 77 tempore minuti unius secundi sine resistantiâ cadendo describit; unde spatium hoc prodit 95, 219 digit. quam proximè.

^(r) * Et tempore G, quod sit, &c. Spatia quæ corpus vi ponderis sui comparati 77 gran. sine resistantiâ cadendo describit, sunt in duplicatâ ratione temporum quibus describuntur (27. Lib. I.). Ergo tempus G, quo corpus vi ponderis sui comparati sine resistantiâ cadendo describit spatium F (per Prop. XL.), est ad minutum unum secundum in subduplicatâ ratione spatii F seu 2, 2128 dig. ad 95, 219 digit.

^(s) 290. * Est igitur tempus G 0'', 15244. Si juxta notam 286, multiplicetur hæc fractio per numerum 5, productum erit 0'', 7622 seu $46''$ ferè. Quare globus, cujus diameter est 0, 84224 partium digiti et pondus in aëre $156\frac{1}{3}$ gran., in aqua cadendo tempore $46''$ describet spatium 19 dig. circiter et maximam suam velocitatem acquirere atque postea uniformi velocitate descendere videbitur (286).

^(t) * Ideoque tempore minutorum quatuor secundorum, &c. Sunt enim tempora ut spatia velocitate uniformi H descripta, et 0'', 15244 est ad $4''$ ut 4, 4256 ad 116, 1245 ferè.

^(u) * Subducatur spatium, &c. Tempus P est minutorum secundorum quatuor, et ut G ad $\frac{2PF}{G}$, P ita est 2 F ad digitos 116, 1245 $= \frac{2PF}{G}$, sed (per Prop. XL.) spatium quod globus in aqua cadendo tempore P describit, est $\frac{2PF}{G} = 1, 3862944$ F, neglecto, scilicet, termino 4, 60517016 L F, qui ob parvitatem hic potest tutò contemni.

^(x) 291. * Minui debet in ratione, &c. Globi datâ velocitate moti resistantia in vase amplissimo sit r, in vase angustiore R, hujus vasis orificium æquale sit circulo c, circulus globi maximus sit m, densitas globi δ , densitas fluidi d; vis uniformis quâ totus globi motus, quo tempore octo tertias partes diametri suæ uniformiter describeret tolli possit vel generari, sit p. Et (per Prop. XXXVIII.) erit $p : r = \delta : d$; et (per Prop. XXXIX.) $R : p = d c^3 : \delta [c - \frac{1}{2} m] \times [c - m]^2$; et propterea, conjunctis his rationibus, $R : r = c^3 : [c - \frac{1}{2} m] \times [c - m]^2$. Datâ igitur velocitate globi, resistantia in vase amplissimo est ad resistantiam in vase angustiore in datâ ratione $[c - \frac{1}{2} m] \times [c - m]^2$ ad c^3 . Brevitatis causâ ponatur r ad R ut 1 ad n.

debet in ratione quæ componitur ex subduplicatâ ratione orificii vasis ad excessum orificii hujus supra semi-circulum maximum globi et ex simplici ratione orificii ejusdem ad excessum ejus supra circumulum maximum globi, id est, in ratione 1 ad 0,9914. Quo facto, habebitur spatium 112,08 digitorum, quod globus cadendo in aquâ in hoc vase ligneo tempore minutorum quatuor secundorum per theoriam describere debuit quamproximè. Descripsit verò digitos 112 per experimentum.

Exper. 2. Tres globi æquales, quorum pondera seorsim erant $76\frac{1}{8}$ granorum in aëre et $5\frac{1}{16}$ granorum in aquâ, successivè demittebantur, et unusquisque cecidit in aquâ tempore minutorum secundorum quindecim, casu suo describens altitudinem digitorum 112.

(*γ*) Computum ineundo prodeunt pondus globi in vacuo $76\frac{5}{12}$ gran. excessus hujus ponderis supra pondus in aquâ $71\frac{7}{8}$ gran. diameter globi 0,81296 dig. octo tertiæ partes hujus diametri 2,16789 dig. spatium 2 F 2,3217 dig. spatium quod globus pondere $5\frac{1}{16}$ gran. tempore 1'' sine resistentiâ cadendo describat 12,808 dig. et tempus G 0'',301056. Globus igitur, velocitate maximâ quâcum potest in aquâ vi ponderis $5\frac{1}{16}$ gran. descendere, tempore 0'',301056 describet spatium 2,3217 dig. et tem-

Quando velocitas in vase amplissimo maxima est, seu H, resistentia æqualis est ponderi B globi in aqua, et F est spatium quod globus tempore G vi ponderis B sine resistentia cadendo describit ut velocitatem illam H acquirat. Sit h velocitas maxima globi in vase angustiore, quam cum acquisivit, resistentia ejus æqualis est ponderi B; et cum resistentia globi in vase angustiore æqualis sit n B ubi velocitas ejus est H (ex demonstratis), et resistentiæ sint ut quadrata velocitatum, erit H H : h h = n B : B = n : 1, ideòque H : h = \sqrt{n} : 1. Sit g tempus quo globus pondere B sine resistentiâ cadendo acquirit velocitatem h, et f spatium quod eodem

tempore describit; et erit H : h = $\frac{F}{G}$: $\frac{f}{g}$, ac

proinde $\frac{F}{G} : \frac{f}{g} = \sqrt{n}$: 1. Porro spatia in vase

amplissimo tempore P, quod satis magnam habet rationem ad tempus G, cadendo descripta, sunt quam proximè ut $\frac{2PF}{G}$, seu ut spatia eo-

dem tempore motu maximo descripta, ut ex Prop. XL. et ex tabulâ huic scholio præfixâ patet; et similiter spatium eodem tempore P in vase angustiore descriptum erit etiam ut $\frac{2Pf}{g}$

ferè. Quare cum sit $\frac{2PF}{G}$ ad $\frac{2Pf}{g}$ ut $\frac{F}{G}$ ad

$\frac{f}{g}$, id est (ex demonstr.) ut \sqrt{n} ad 1; spatium

tempore P in vase amplissimo descriptum erit ad spatium eodem tempore in vase angustiore descriptum, ut \sqrt{n} ad 1, id est, ut c $\frac{3}{2}$ ad [c - m]

$\times [c - \frac{1}{2}m]^{\frac{1}{2}}$, aut quod idem est, in ratione quæ componitur ex subduplicatâ ratione orificii vasis c ad excessum c - $\frac{1}{2}m$ orificii hujus supra semi-circulum maximum globi, et ex simplici ratione orificii ejusdem c ad excessum ejus c - m, supra circumulum maximum globi.

Sed vasis orificium c est 81 digitorum (ex dictis initio scholii hujus), et circuli m diameter inventa est 0,84224 partium digiti, ideòque si dicatur ut 7 ad 11 ita 0,84224 digit. ad semi-peripheriam circuli m, hæc invenietur digit. 1,32352, et hinc circulus m prodit 0,5573 partium digiti quadrati circiter; ex quibus habetur

$\frac{c}{c-m} = 1,0069$, et $\frac{c^{\frac{3}{2}}}{[c - \frac{1}{2}m]^{\frac{1}{2}}} = 1,0017$, ac

proinde $\frac{c^{\frac{3}{2}}}{[c-m] \times [c - \frac{1}{2}m]^{\frac{1}{2}}} = 1,00861$.

Quare spatium in vase amplissimo descriptum digit. 113,0569 est ad spatium in vase angustiore eodem tempore minutorum quatuor secundorum descriptum, ut 1,00861 ad 1, seu ut 1 ad 0,9914 ferè; unde hoc spatium prodit 111,08 digit.

(*γ*) * *Computum ineundo*, &c. Calculo experimenti primi fusè exposito, nulla superest difficultas in computo simili experimenti hujus.

pore 15'' spatium 115, 678 dig. Subducatur spatium 1, 3862944 F seu 1, 609 dig. et manebit spatium 114, 069 dig. quod proinde globus eodem tempore in vase latissimo cadendo describere debet. Propter angustiam vasis nostri detrahi debet spatium 0, 895 dig. circiter. Et sic manebit spatium 113, 174 dig. quod globus cadendo in hoc vase, tempore 15'' describere debuit per theoriam quamproximè. Descripsit veros digitos 112 per experimentum. Differentia est insensibilis.

Exper. 3. Globi tres æquales, quorum pondera seorsim erant 121 gran. in aëre et 1 gran. in aquâ, successive demittebantur; et cadebant in aqua temporibus 46'', 47'', et 50'', describentes altitudinem digitorum 112.

(^z) Per theoriam hi globi cadere debuerunt tempore 40'' circiter. Quod tardius ceciderunt, utrum minori proportioni resistantiæ quæ a vi inertiae in tardis motibus oritur, ad resistantiam quæ oritur ab aliis causis tribuendum sit; an potius bullulis nonnullis globo adhærentibus, vel rarefactioni ceræ ad calorem vel tempestatis vel manus globum demittentis, vel etiam erroribus insensibilibus in ponderandis globis in aquâ, incertum esse puto. Ideoque pondus globi in aquâ debet esse plurimum granorum, ut experimentum certum et fide dignum reddatur.

Exper. 4. Experimenta hactenus descripta cœpi, ut investigarem resistantias fluidorum, antequam theoria in propositionibus proximè præcedentibus exposita mihi innotesceret. Postea, ut theoriam inventam examinarem, paravi vas ligneum latitudine internâ digitorum 8 $\frac{3}{4}$, profunditate pedum quindecim cum triente. Deinde ex cerâ et plumbo incluso globos quatuor formavi, singulos pondere 139 $\frac{1}{4}$ granorum in aëre et 7 $\frac{1}{8}$ granorum in aquâ. Et hos demisi ut tempora cadendi in aqua per pendulum, ad semi-minuta secunda oscillans, mensurarem. Globi, ubi ponderabantur et postea cadebant, frigidi erant et aliquamdiu frigidi manserant; quia calor ceram rarefacit, et per rarefactionem diminuit pondus globi in aqua, et cera rarefacta non statim ad densitatem pristinam per

(^z) * Per theoriam hi globi cadere debuerunt tempore 40'' circiter. Cum pondus globi sit 121 granorum in aëre, et 1 grani in aqua, erit pondus æqualis globi aquæ granorum 120; et ideo pondus globi in vacuo gran. $121\frac{120}{360}$ seu $121\frac{5}{3}$ (287). Excessus hujus ponderis supra pondus globi in aqua est gran. $120\frac{5}{3}$. Unde prodeunt globi diameter 0, 9671 partium digiti, spatium 2 F 2, 6004 digitorum, spatium quod globus pondere 1 grani sine resistantia cadendo tempore minuti unius secundi describit digit. 1, 5959, et tempus G 0'', 9026. Hoc tempore globus cum

velocitate maximâ H uniformiter progrediendo describet spatium 2 F seu 2, 6004 dig. et tempore 40'' describet spatium 115, 2404 dig. Subducatur spatium 1, 3862944 F seu 1, 8024 dig. et manebit spatium 113, 438 dig. quod globus cadendo in aqua in vase amplissimo tempore 40'' describeret; et hoc spatium, propter angustiam vasis aliquantulum minui debet, nimirum in ratione 10049 ad 10025 circiter. Globi igitur per theoriam spatium 112 digitorum cadendo describere debuerunt tempore 40'' circiter.

frigus reducitur. Antequam caderent, immergebantur penitus in aquam ne pondere partis alicujus ex aquâ extantis descensus eorum sub initio acceleraretur. Et ubi penitus immersi quiescebant, demittebantur quam cautissimè, ne impulsus aliquem a manu demittente acciperent. Ceciderunt autem successivè temporibus oscillationum $47\frac{1}{2}$, $48\frac{1}{2}$, 50 et 51, describentes altitudinem pedum quindecim et digitorum duorum. Sed tempestas jam paulò frigidior erat quàm cum globi ponderabantur, ideoque iteravi experimentum alio die, et globi ceciderunt temporibus oscillationum 49, $49\frac{1}{2}$, 50 et 53, ac tertio temporibus oscillationum $49\frac{1}{2}$, 50, 51 et 53. Experimento sæpius capto, globi ceciderunt maximâ ex parte temporibus oscillationum $49\frac{1}{2}$ et 50. Ubi tardius cedere, suspicor eosdem retardatos fuisse impingendo in latera vasis.

Jam computum per theoriam ineundo, prodeunt pondus globi in vacuo $139\frac{2}{3}$ granorum. Excessus hujus ponderis supra pondus globi in aquâ $132\frac{1}{40}$ gran. Diameter globi 0, 99868 dig. Octo tertiæ partes diametri 2, 66315 dig. Spatium 2 F 2,8066 dig. Spatium quod globus pondere $7\frac{1}{8}$ granorum, tempore minuti unius secundi, sine resistentiâ cadendo describit 9, 88164 dig. Et tempus G 0'', 376843. Globus igitur, velocitate maximâ quâcum potest in aquâ vi ponderis $7\frac{1}{8}$ granorum descendere, tempore 0'', 376843 describit spatium 2, 8066 digitorum, et tempore 1'' spatium 7, 44766 digitorum, et tempore 25'' seu oscillationum 50 spatium 186, 1915 dig. Subducatur spatium 1, 386294 F, seu 1, 9454 dig. et manebit spatium 184, 2461 dig. quod globus eodem tempore in vase lattissimo describet. Ob angustiam vasis nostri, minuatur hoc spatium in ratione quæ componitur ex subduplicatâ ratione orificii vasis ad excessum hujus orificii supra semi-circulum maximum globi, et simplici ratione ejusdem orificii ad excessum ejus supra circulum maximum globi; et habebitur spatium 181, 86 digitorum, quod globus in hoc vase tempore oscillationum 50 describere debuit per theoriam quamproximè. Descripsit verò spatium 182 digitorum tempore oscillationum $49\frac{1}{2}$ vel 50 per experimentum.

Exper. 5. Globi quatuor pondere $154\frac{3}{8}$ gran. in aëre et $21\frac{1}{2}$ gran. in aquâ sæpe demissi, cadebant tempore oscillationum $28\frac{1}{2}$, 29, $29\frac{1}{2}$ et 30, et nonnunquam 31, 32 et 33, describentes altitudinem pedum quindecim et digitorum duorum.

Per theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum 29 quamproximè.

Exper. 6. Globi quinque pondere $212\frac{3}{8}$ gran. in aëre et $79\frac{1}{2}$ in aquâ sæpe demissi, cadebant tempore oscillationum 15, $15\frac{1}{2}$, 16,

17 et 18, describentes altitudinem pedum quindecim et digitorum duorum.

Per theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum 15 quamproximè.

Exper. 7. Globi quatuor pondere $293\frac{3}{8}$ gran. in aëre et $35\frac{7}{8}$ gran. in aquâ sæpe demissi, cadebant tempore oscillationum $29\frac{1}{2}$, 30, $30\frac{1}{2}$, 31, 32 et 33, describentes altitudinem pedum quindecim et digiti unius cum semisse.

Per theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum 28 quamproximè.

Causam investigando cur globorum, ejusdem ponderis et magnitudinis, aliqui citius alii tardius caderent, in hanc incidi; quod globi ubi primum demittebantur et cadere incipiebant, oscillarent circum centra, latere illo quod forte gravius esset primum descendente, et motum oscillatorium generante. Nam per oscillationes suas globus majorem motum communicat aquæ, quam si sine oscillationibus descenderet; et communicando, amittit partem motûs proprii quo descendere deberet: et pro majore vel minore oscillatione, magis vel minus retardatur. Quinetiam globus recidit semper a latere suo quod per oscillationem descendit, et recedendo appropinquat lateribus vasis et in latera nonnunquam impingitur. Et hæc oscillatio in globis gravioribus fortior est, in majoribus aquam magis agitât. Quâpropter, ut oscillatio globorum minor redderetur, globos novos ex cerâ et plumbo construxi, infigendo plumbum in latus aliquod globi prope superficiem ejus; et globum ita demisi, ut latus gravius, quoad fieri potuit, esset infimum ab initio descensus. Sic oscillationes factæ sunt multo minores quam prius, et globi temporibus minus inæqualibus ceciderunt, ut in experimentis sequentibus.

Exper. 8. Globi quatuor, pondere granorum 139 in aëre et $6\frac{1}{2}$ in aquâ, sæpe demissi, ceciderunt temporibus oscillationum non plurium quam 52, non pauciorum quam 50, et maximâ ex parte tempore oscillationum 51 circiter, describentes altitudinem digitorum 182.

Per theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum 52 circiter.

Exper. 9. Globi quatuor, pondere granorum $273\frac{1}{4}$ in aëre et $140\frac{3}{4}$ in aquâ, sæpius demissi, ceciderunt temporibus oscillationum non pauciorum quam 12, non plurium quam 13, describentes altitudinem digitorum 182.

Per theoriam verò hi globi cadere debuerunt tempore oscillationum $11\frac{1}{3}$ quamproximè.

Exper. 10. Globi quatuor, pondere granorum 384 in aëre et $119\frac{1}{2}$ in

aquâ, sæpe demissi, cadebant temporibus oscillationum $17\frac{3}{4}$, 18, $18\frac{1}{2}$ et 19, describentes altitudinem digitorum $181\frac{3}{4}$. Et ubi ceciderunt tempore oscillationum 19, nonnunquam audiui impulsus eorum in latera vasis antequam ad fundum pervenerunt.

Per theoriam verò cadere debuerunt tempore oscillationum $15\frac{5}{9}$ quamproximè.

Exper. 11. Globi tres æquales, pondere granorum 48 in aëre et $3\frac{2}{3}\frac{9}{2}$ in aquâ sæpe demissi, ceciderunt temporibus oscillationum $43\frac{1}{2}$, 44, $44\frac{1}{2}$, 45 et 46, et maximâ ex parte 44 et 45, describentes altitudinem digitorum $182\frac{1}{2}$ quamproximè.

Per theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum $46\frac{5}{9}$ circiter.

Exper. 12. Globi tres æquales, pondere granorum 141 in aëre et $4\frac{3}{8}$ in aquâ, aliquoties demissi, ceciderunt temporibus oscillationum 61, 62, 63, 64 et 65, describentes altitudinem digitorum 182.

Et per theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum $64\frac{1}{2}$ quamproximè.

Per hæc experimenta manifestum est quod, ubi globi tardè ceciderunt, ut in experimentis secundis, quartis, quintis, octavis, undecimis ac duodecimis, tempora cadendi rectè exhibentur per theoriam, at ubi globi velocius ceciderunt, ut in experimentis sextis, nonis ac decimis, ^(a) resistentia paulo major extitit quam in duplicatâ ratione velocitatis. Nam globi inter cadendum oscillant aliquantulum: et hæc oscillatio in globis levioribus et tardius cadentibus, ob motûs languorem citò cessat; in gravioribus autem et maioribus, ob motûs fortitudinem diutius durat, et non nisi post plures oscillationes ab aquâ ambiente coliberi potest. Quinetiam globi, quo velociores sunt, eo minus premuntur a fluido ad posticas suas partes; et si velocitas perpetuo augeatur, spatium vacuum tandem a tergo relinquent, ^(b) nisi compressio fluidi simul augeatur. Debet autem compressio fluidi (per Prop. XXXII. et XXXIII.) ^(c) augeri in duplicatâ ratione velocitatis, ut resistentia sit in eâdem duplicatâ ratione. Quoniam hoc non fit, globi velociores paulò minus premuntur a tergo, et defectu pres-

^(a) * *Resistentia paulo major extitit quam in duplicatâ ratione velocitatis.* Si enim resistentia accuratè esset in duplicatâ velocitatis ratione, tempora cadendi tam per experimenta quam per theoriam definita, æquarentur; at si resistentia major quam in duplicatâ ratione velocitatis, tempora quibus corpus cadendo datum spatium describit, majora esse debent in experimentis quam in teoriâ, quæ minorem resistentiam supponit.

^(b) * *Nisi compressio fluidi simul augeatur.* Tanta enim esse potest globi velocitas, ut fluidum

ad posticas illius partes satis citò recurrere et locum a globo relictum statim occupare nequeat, nisi fluidi compressio augeatur, ut per fluidum pressio et motus celerius propagentur.

^(c) * *Augeri in duplicatâ ratione velocitatis, &c.* Nam partes fluidi per compressionem in se mutuo agunt et reagent, et si vires quibus fluidi particulæ se mutuo agitant, augeantur in duplicatâ ratione velocitatis, resistentia est in eâdem ratione duplicatâ, per Cor. 2. Prop. XXXIII.

sionis hujus, resistentia eorum fit paulo major quàm in duplicatâ ratione velocitatis.

Congruit igitur theoria cum phænomenis corporum cadentium in aquâ, reliquum est ut examinemus phænomena cadentium in aëre.

Exper. 13. A culmine Ecclesiæ Sancti Pauli, in urbe Londini, mense Junio 1710 globi duo vitrei simul demittebantur, unus argenti vivi plenus, alter aëris; et cadendo describebant altitudinem pedum Londinensium 220. Tabula lignea ad unum ejus terminum polis ferreis suspendebatur, ad alterum pessulo ligneo incumbebat; et globi duo huic tabulæ impositi simul demittebantur, subtrahendo pessulum ope fili ferrei ad terram usque demissi ut tabula polis ferreis solummodo innixa super iisdem devolveretur, et eodem temporis momento pendulum ad minuta secunda oscillans, per filum illud ferreum tractum dmitteretur et oscillare inciperet. Diametri et pondera globorum ac tempora cadendi exhibentur ^(d) in tabulâ sequente.

<i>Globorum mercurio plenorum.</i>			<i>Globorum aëre plenorum.</i>		
<i>Pondera.</i>	<i>Diametri.</i>	<i>Tempora cadendi.</i>	<i>Pondera.</i>	<i>Diametri.</i>	<i>Tempora cadendi.</i>
908 <i>gran.</i>	0,8 <i>digit.</i>	4"	510 <i>gran.</i>	5,1 <i>digit.</i>	8½"
983	0,8	4—	642	5,2	8
866	0,8	4	599	5,1	8
747	0,75	4 +	515	5,0	8¼
808	0,75	4	483	5,0	8½
784	0,75	4 +	641	5,2	8

Cæterum tempora observata corrigi debent. Nam globi mercuriales (per theoriam Galilæi) minutis quatuor secundis ^(e) describent pedes Londinenses 257, et pedes 220 minutis tantum 3" 42". Tabula lignea utique, detracto pessulo, tardius devolvebatur quam par erat, et tardâ suâ devolutione impediēbat descensum globorum sub initio. Nam globi incumbe-

^(d) * In tabulâ sequente 4 — significat tempus cadendi minutis quatuor secundis paulo minus fuisse, et 4 + tempus minutis quatuor secundis paulo majus indicat.

^(e) * Describent pedes Londinenses, &c. Quoniam densitas mercurii est ad densitatem aëris ut 11890 ad 1 circiter, parum admodum minuitur mercurii pondus in aëre, et ideo globi mercurio pleni eadem ferē celeritate in aëre et in vacuo per breve tempus descendunt; sed gravia omnia in vacuo cadentia tempore minuti unius secundi describunt pedis Londinensis digitos 193½ (289), et spatia descripta sunt in duplicatâ ratione tem-

porum (27. Lib. I.). Quare ut 1 ad 16 ita 193½ dig. ad spatium quod globus mercurio plenus tempore 4" cadendo describit, quod proinde erit 3093 dig. seu 257 pedum Londinensium circiter. Simili modo, cum fit 3". 42" = 3".7, erit 1 ad 13.69 ut 193½ dig. ad spatium tempore 3". 42" descriptum quod prodit ped. Lond. 220 circiter. Sed globi mercurio pleni spatium hoc 220 ped. tempore 4" describunt in experimentis, et differentia temporum 4" et 3". 42" est 18". Tempora igitur prorogata fuerunt minutis tertiis octodecim circiter.

bant tabulæ prope medium ejus, et paulò quidem propiores erant axi ejus quam pessulo. Et hinc tempora cadendi prorogata fuerunt minutis tertiis octodecim circiter, et jam corrigi debent detrahendo illa minuta, præsertim in globis majoribus qui tabulæ devolventi paulo diutius incumbabant propter magnitudinem diametrorum. Quo facto tempora, quibus globi sex majores cecidère, evadent $8'' 12'''$, $7'' 42'''$, $7'' 42'''$, $7'' 57'''$, $8'' 12'''$, et $7'' 42'''$.

Globorum igitur aëre plenorum quintus, diametro digitorum quinque pondere granorum 483 constructus, cecidit tempore $8'' 12'''$, describendo altitudinem pedum 220. ^(f) Pondus aquæ huic globo æqualis est 16600 granorum; et pondus aëris eidem æqualis est $\frac{16600}{860}$ gran. seu $19\frac{5}{10}$ gran. ideóque pondus globi in vacuo est $502\frac{5}{10}$ gran. et hoc pondus est ad pondus aëris globo æqualis, ut $502\frac{5}{10}$ ad $19\frac{5}{10}$, et ita sunt 2 F ad octo tertias partes diametri globi, id est, ad $13\frac{1}{3}$ digitos. Unde 2 F prodeunt 28 ped. 11 dig. Globus cadendo in vacuo, toto suo pondere $502\frac{5}{10}$ granorum, tempore minuti unius secundi describit digitos $193\frac{1}{3}$ ut supra, et pondere 483 gran. describit digitos 185, 905, et eodem pondere 483 gran. etiam in vacuo describit spatium F seu 14 ped. $5\frac{1}{2}$ dig. ^(g) tempore $57''' 58'''$, et velocitatem maximam acquirit quâcum possit in aëre descendere. Hâc velocitate globus, tempore $8'' 12'''$, describet spatium pedum 245 et digitorum $5\frac{1}{3}$. Aufer 1, 3863 F seu 20 ped. $0\frac{1}{2}$ dig. et manebunt 225 ped. 5 dig. Hoc spatium igitur globus tempore $8'' 12'''$, cadendo describere debuit per theoriam. Descripsit verò spatium 202 pedum per experimentum. Differentia insensibilis est.

Similibus computis ad reliquos etiam globos aëre plenos applicatis, confeci tabulam sequentem.

^(f) * Pondus aquæ huic globo æqualis est 16600 granorum. Globus aqueus, cujus diameter est unius digiti continet grana 132, 8 (287), et globorum homogeneorum, pondera sunt ut diametrorum cubi, et propterea ut 1 ad 125 ita sunt 132, 8 grana ad pondus globi aquei cujus diameter est digitorum 5, quod proinde pondus est gran. 16600. Globorum æqualium pondera sunt ut illorum densitates, et densitas aquæ est ad densitatem aëris ut 860 ad 1. Quare pondus globi aëris diametro digitorum 5 descripti est $\frac{16600}{860}$ seu $19\frac{5}{10}$ gran. quam proximè. Hinc pondus globi vitrei aëre pleni in vacuo est gran.

$483 + 19\frac{5}{10}$ seu gran. $502\frac{5}{10}$, et hoc pondus est ad pondus aëris globo æqualis, id est, densitas globi, si homogeneous fingatur, ad densitatem aëris, ut $502\frac{5}{10}$ ad $19\frac{5}{10}$ et ita sunt 2 F, &c., cætera patent ut in superioribus calculis.

^(g) 292. * Tempore $57''' 58'''$. Hoc tempus, quod ante dictum est G, ducatur in numerum 5, et productum erit fere $5''$; et propterea (186) globus cujus diameter est 5 digit. et pondus in aëre gran. 483, tempore minutorum secundorum quinque describet spatium 124 pedum circiter, et deinde videbitur uniformiter descendere.

<i>Globorum pondera.</i>	<i>Diame- tri.</i>	<i>Tempora ca- dendī ab al- titudine pe- dum 220.</i>		<i>Spatia describen- da per theoriam.</i>	<i>Excessus.</i>	
510 gran.	5,1 dig.	8"	12"	226 ped. 11 dig.	6 ped. 11 dig.	
642	5,2	7	42	230	10	9
599	5,1	7	42	227	7	10
515	5	7	57	224	4	5
483	5	8	12	225	5	5
641	5,2	7	42	230	10	7

Exper. 14. Anno 1719. mense Julio, D. Desaguliers hujusmodi experimenta iterum cepit, formando vesicas porcorum in orbem sphæricum ope sphærae lignæ concavæ ambientis, quam madefactæ implere cogebantur inflando aërem; et hasce rarefactas et exemptas demittendo ab altiore loco in templi ejusdem turri rotunda fornicata, nempe ab altitudine pedum 272; et eodem temporis momento demittendo etiam globum plumbeum cujus pondus erat duarum librarum Romanarum circiter. Et interea aliqui stantes in supremâ parte templi, ubi globi demittebantur, notabant tempora tota cadendi, et alii stantes in Terrâ notabant differentiam temporum inter casum globi plumbei et casum vesicæ. Tempora autem mensurabantur pendulis ad dimidia minuta secunda oscillantibus. Et eorum qui in Terrâ stabant unus habebat horologium cum elatere ad singula minuta secunda quater vibrante; alius habebat machinam aliam affabrè constructam cum pendulo etiam ad singula minuta secunda quater vibrante. Et similem machinam habebat unus eorum qui stabant in summitate templi. Et hæc instrumenta ita formabantur, ut motus eorum pro lubitu vel inciperent vel sisterentur. Globus autem plumbeus cadebat tempore minutorum secundorum quatuor cum quadrante circiter. Et addendo hoc tempus ad prædictam temporis differentiam, colligebatur tempus totum quo vesica cecidit. Tempora, quibus vesicæ quinque post casum globi plumbei primâ vice ceciderunt, erant $14\frac{3}{4}''$, $12\frac{3}{4}''$, $14\frac{5}{8}''$, $17\frac{3}{4}''$ et $16\frac{7}{8}''$, et secundâ vice $14\frac{1}{2}''$, $14\frac{1}{4}''$, $14''$, $19''$ et $16\frac{2}{3}''$. Addantur $4\frac{1}{4}''$, tempus utique quo globus plumbeus cecidit, et tempora tota quibus vesicæ quinque ceciderunt, erant primâ vice $19''$, $17''$, $18\frac{7}{8}''$, $22''$ et $21\frac{1}{8}''$; et secundâ vice, $18\frac{3}{4}''$, $18\frac{1}{2}''$, $18\frac{1}{4}''$, $23\frac{1}{4}''$ et $21''$. Tempora autem in summitate templi notata, erant primâ vice $19\frac{3}{8}''$, $17\frac{1}{4}''$, $18\frac{3}{4}''$, $22\frac{1}{8}''$ et $21\frac{5}{8}''$; et secundâ vice $19''$, $18\frac{5}{8}''$, $18\frac{3}{8}''$, $24''$ et $21\frac{1}{4}''$. Cæterum vesicæ non semper rectâ cadebant, sed nonnunquam volitabant, et hinc inde oscillabantur inter cadendum. Et his motibus tempora cadendi prorogata sunt et

aucta nonnunquam dimidio minuti unius secundi, nonnunquam minuto secundo toto. Cadebant autem rectius vesica secunda et quarta primâ vice; et prima ac tertia secundâ vice. Vesica quinta rugosa erat et per rugas suas nonnihil retardabatur. Diametros vesicarum deducebam ex earum circumferentiis filo tenuissimo bis circumdato mensuratis. Et theoriam contuli cum experimentis in tabulâ sequente, assumendo densitatem aëris esse ad densitatem aquæ pluvialis ut 1 ad 860, et computando spatia quæ globi per theoriam ^(h) describere debuerunt cadendo.

<i>Vesicarum pondera.</i>	<i>Diametri.</i>	<i>Tempora cadendi ab altitudine pedum 272.</i>	<i>Spatia iisdem temporibus describenda per theoriam.</i>	<i>Differentia inter theor. et exper.</i>
128 gran.	5,28 dig.	19"	271 ped. 11 dig.	—0 ped. 1 dig.
156	5,19	17	272	+0 0 $\frac{1}{2}$
137 $\frac{1}{2}$	5,3	18 $\frac{1}{2}$	272	+0 7
97 $\frac{1}{2}$	5,26	22	277	+5 4
99 $\frac{1}{3}$	5	21 $\frac{1}{3}$	282	+10 0

Globorum igitur tam in aëre quàm in aquâ motorum resistentia prope omnis per theoriam nostram recte exhibetur, ac densitati fluidorum, paribus globorum velocitatibus ac magnitudinibus, proportionalis est.

In scholio, quod Sect. VI. subjunctum est, ostendimus per experimenta pendulorum quod globorum æqualium et æquivelocium in aëre, aquâ, et argento vivo motorum resistentiæ sunt ut fluidorum densitates. ⁽ⁱ⁾ Idem hic ostendimus magis accuratè per experimenta corporum cadentium in aëre et aquâ. Nam pendula singulis oscillationibus motum cient in fluido motui penduli redeuntis semper contrarium, et resistentia ab hoc motu oriunda, ut et resistentia fili quo pendulum suspendebatur, totam penduli resistentiam majorem reddiderunt quàm resistentia quæ per experimenta corporum cadentium prodiiit. Etenim per experimenta pendulo-

^(h) * *Describere debuerunt cadendo.* Exempli causâ calculum tentabimus experimenti cum tertia vesica facti. Hujus vesicæ diameter erat 5.3 digitorum et pondus in aëre granorum 137.5. Globus aëris diametro digitorum 5.3 descriptus continet 23 grana quam proxime; unde vesicæ pondus in vacuo erat gran. 160,5, et ut 23 ad 160,5 ita sunt octo tertiæ partes diametri vesicæ seu digiti 14 $\frac{2}{15}$ ad spatium 2 F, quod ita prodit dig. 98,626. Vesica cadendo in vacuo toto suo pondere 160,5 gran. tempore minuti unius secundi describit digitos 193 $\frac{1}{3}$, et pondere 137,5 gran. describit digitos 165,628, et eodem pondere 137,5 gran. etiam in vacuo describit spatium F digitorum 49,313 tempore 0",5456 et

velocitatem maximam acquirit cum quâ possit in aëre descendere. Hâc velocitate vesica tempore minorum secundorum 18 $\frac{1}{2}$ describet spatium 277 ped. et 8. digit. circiter. Subducatur spatium 1,3863 F seu 5. ped. et 8 digit., et manebunt 273 pedes; cùm in tabula accuratiore calculo confecta spatium per theoriam describendum sit 272 ped. et 7 digit., et in experimento sit 272 ped.

⁽ⁱ⁾ * *Idem hic ostendimus, &c.* Nam theoria experimentis confirmata, cui superiores computationes nituntur, supponit resistentiam, cæteris paribus, esse in ratione compositâ ex ratione duplicatâ velocitatis mobilis et ratione simplici densitatis fluidi.

rum in scholio illo exposita, globus ejusdem densitatis cum aquâ, describendo longitudinem semi-diametri suæ in aëre, amittere deberet motûs sui partem $\frac{1}{3342}$. At per theoriam in hac septimâ Sectione expositam et experimentis cadentium confirmatam, globus idem describendo longitudinem eandem, (*) amittere deberet motûs sui partem tantum $\frac{1}{4586}$, posito quod densitas aquæ sit ad densitatem aëris ut 860 ad 1. Resistentiæ igitur per experimenta pendulorum majores prodire (ob causas jam descriptas) quàm per experimenta globorum cadentium, idque in ratione 4 ad 3 circiter. Attamen cum pendulorum in aëre, aquâ et argento vivo oscillantium resistantiæ a causis similibus similiter augeantur, proportio resistantiarum in his mediis, tam per experimenta pendulorum, quàm per experimenta corporum cadentium, satis rectè exhibebitur. Et inde concludi potest quod corporum in fluidis quibuscunque fluidissimis motorum resistantiæ, cæteris paribus, sunt ut densitates fluidorum.

(¹) His ita stabilitis, dicere jam licet quamnam motûs sui partem globus quilibet, in fluido quocunque projectus, dato tempore amittet quamproximè. Sit D diameter globi, et V velocitas ejus sub initio motus, et T tempus, quo globus velocitate V in vacuo describet spatium, quod sit ad spatium $\frac{3}{2}$ D ut densitas globi ad densitatem fluidi: et globus in fluido illo projectus, tempore quovis alio t amittet velocitatis suæ partem $\frac{t V}{T + t}$, manente parte $\frac{T V}{T + t}$, et describet spatium, quod sit ad spatium uniformi velocitate V eodem tempore descriptum in vacuo, ut logarithmus numeri $\frac{T + t}{T}$ multiplicatus per numerum 2,302585093 est ad numerum $\frac{t}{T}$, per Corol. 7. Prop. XXXV. In motibus tardis resistentia potest esse paulò minor, (^m) propterea quod figura globi paulò aptior sit ad motum

(*) * *Amittere deberet motûs sui partem tantum $\frac{1}{4586}$.* Sit D diameter globi V ejus velocitas sub initio motus in fluido, 2 F spatium quod sit ad $\frac{3}{2}$ D ut densitas globi ad densitatem aëris, hoc est, ut 860 ad 1, ideòque $2 F = \frac{6880}{3} D$; sit T tempus quo globus cum velocitate V uniformiter progrediendo describit spatium 2 F, et t tempus quo eadem uniformi velocitate describit spatium $\frac{1}{2} D$; et erit $t : T = \frac{1}{2} D : \frac{6880}{3} D = 3 : 13760$, et inde $t : T + t = 3 : 13763$, ideòque $\frac{t}{T + t} = \frac{3}{13763} = \frac{1}{4586}$

quam proximè. Est autem $\frac{t V}{T + t}$ velocitatis V

pars amissa tempore t (per Cor. 3. Prop. XXXVIII.). Globus igitur describendo longitudinem semi-diametri suæ in aëre, per theoriam in hac septimâ Sectione expositam amittere debet motûs sui partem $\frac{1}{4586}$.

(¹) * *His ita stabilitis, dicere jam licet quamnam motûs sui partem globus quilibet, in fluido quocunque projectus et solâ vi insit motus, dato tempore amittet quam proximè; theoriam enim cum experimentis consentire vidimus tum in fluidis elasticis, quale est aër, tum in fluidis non elasticis, quale est aqua. Quæ sequuntur, manifesta sunt per notam (282) ad Cor. 3. Prop. XXXVIII.*

(^m) * *Propterea quod figura globi, paulo aptior sit ad motum, &c. Nam in Lemmate VII.*

quàm figura cylindri eâdem diametro descripti. In motibus velocibus resistentia potest esse paulò major, propterea quod elasticitas et compressio fluidi ⁽ⁿ⁾ non augeantur in duplicatâ ratione velocitatis. Sed hujus modi minutias hic non expendo.

Et quamvis aër, aqua, argentum vivum et similia fluida, per divisionem partium in infinitum, subtiliarentur et fierent media infinitè fluida; tamen globis projectis haud minus resisterent. Nam resistentia, de quâ agitur in Propositionibus præcedentibus, oritur ab inertiâ materiæ; et inertia materiæ corporibus essentialis est et quantitati materiæ semper proportionalis. Per divisionem partium fluidi, resistentia quæ oritur a tenacitate et frictione partium diminui quidem potest: sed quantitas materiæ per divisionem partium ejus non diminuitur; et manente quantitate materiæ, manet ejus vis inertiae, cui resistentia, de quâ hic agitur, semper proportionalis est. Ut hæc resistentia, diminuatur, diminui debet quantitas materiæ in spatiis per quæ corpora moventur. Et propterea spatia coelestia, per quæ globi planetarum et cometarum in omnes partes liberrimè et sine omni motus diminutione sensibili perpetuo moventur, fluido omni corporeo destituuntur, si forte vapores longe tenuissimos et trajectos lucis radios excipias.

Projectilia utique motum cient in fluidis progrediendo, et hic motus oritur ab excessu pressionis fluidi ad projectilis partes anticâs supra pressionem ad ejus partes posticas, et non minor esse potest in mediis infinite fluidis quam in aëre, aquâ et argento vivo pro densitate materiæ in singulis. Hic autem pressionis excessus, pro quantitate suâ, non tantum motum cient in fluido, ^(o) sed etiam agit in projectile ad motum ejus retardandum: et propterea resistentia in omni fluido est ut motus in fluido a projectili excitatus, nec minor esse potest in æthere subtilissimo pro densitate ætheris, quam in aëre, aquâ et argento vivo pro densitatibus horum fluidorum.

Lib. II. et in sequentibus Propositionibus suppositum est, globi et cylindri, quorum eadem est diameter, æqualem esse resistentiam.

⁽ⁿ⁾ * Non augeantur in duplicatâ ratione ve-

locitatis, in quâ tamen augeri deberent, uti expositum est in experimento 12.

^(o) * Sed etiam agit in projectile, per motûs Legem III.

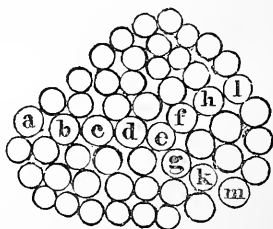
SECTIO VIII.

De motu per fluida propagato.

PROPOSITIO XLI. THEOREMA XXXII.

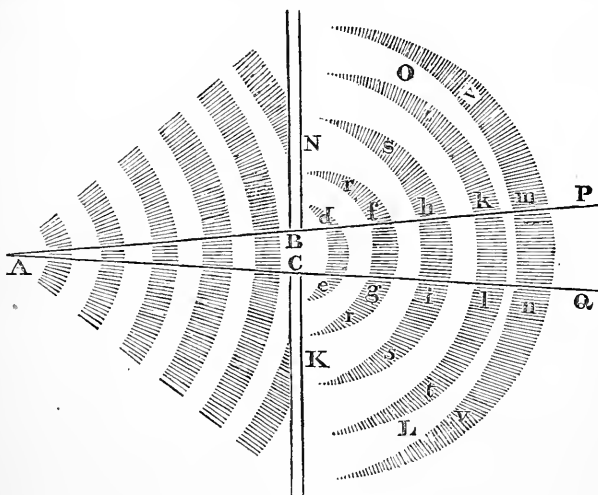
Pressio non propagatur per fluidum secundum lineas rectas, nisi ubi particulæ fluidi in directum jacent.

Si jaceant particulæ a, b, c, d, e in lineâ rectâ, potest quidem pressio directè propagari ab a ad e; at particula e urget particulas obliquè positas f et g obliquè, et particulæ illæ f et g non sustinebunt pressionem illatam, nisi fulciantur a particulis ulterioribus h et k; quâtenus autem fulciuntur, premunt particulas fulcientes; et hæ non sustinebunt pressionem nisi fulciantur ab ulterioribus l et m easque premant, et sic deinceps in infinitum. Pressio igitur, quam primum propagatur ad particulas quæ non in directum jacent, divaricare incipiet et obliquè propagabitur in infinitum; et postquam incipit obliquè propagari, si inciderit in particulas posteriores, quæ non in directum jacent, iterum divaricabit; idque toties, quoties in particulas non accuratè in directum jacentes inciderit. Q. e. d.



Corol. Si pressionis, a dato puncto per fluidum propagatæ, pars aliqua obstaculo intercipiatur; pars reliqua, quæ non intercipitur, divaricabit in spatia pone obstaculum. Id quod sic etiam demonstrari potest. A puncto A propagetur pressio quâquâversum, idque si fieri potest secundum lineas rectas, et obstaculo N B C K perforato in B C, intercipiatur ea omnis, præter partem coniformem A P Q, quæ per foramen circulare B C transit. Planis transversis d e, f g, h i distinguatur conus A P Q in frusta; et interea dum conus A B C, pressionem propagando, urget frustum conicum ulterius d e g f in superficie d e, et hoc frustum urget frustum proximum f g i h in superficie f g, et frustum illud urget frustum tertium, et sic deinceps in infinitum; manifestum est (per motûs Legem tertiam) quod frustum primum d e g f, reactione frusti secundi f g i h, tantum urgetur et premetur in superficie f g, quantum urget et premit

frustum illud secundum. Frustum igitur $d e f g$ inter conum $A d e$ et frustum $f h i g$ comprimitur utrinque, et propterea (per Corol. 6. Prop. XIX.) figuram suam servare nequit, nisi vi eâdem comprimatundique. Eodem igitur impetu quo premitur in superficiebus $d e, f g$, conabitur cedere ad latera $d f, e g$; ubique (cùm rigidum non sit, sed omnimodo



fluidum) excurreret ac dilatabitur, nisi fluidum ambiens adsit, quo conatus iste cohibeatur. Proinde conatu excurrendi, premet tam fluidum ambiens ad latera $d f, e g$ quam frustum $f g h i$ eodem impetu; et propterea pressio non minus propagabitur a lateribus $d f, e g$ in spatia $N O, K L$ hinc inde, quam propagatur a superficie $f g$ versus $P Q$. Q. e. d.

PROPOSITIO XLII. THEOREMA XXXIII.

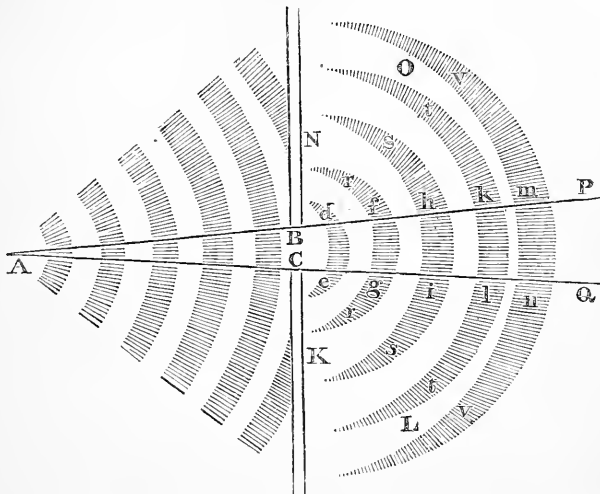
Motus omnis per fluidum propagatus divergit a recto tramite in spatia immota.

Cas. 1. Propagetur motus a puncto A per foramen $B C$, pergatque, si fieri potest, in spatio conico $B C Q P$, secundum lineas rectas divergentes a puncto A . Et ponamus primo quod ^(a) motus iste sit undarum in superficie stagnantis aquæ. Sintque $d e, f g, h i, k l$, &c. undarum

^(a) *Motus iste sit undarum, &c.* Vis quælibet deorsum directa in superficiem stagnantis aquæ agat in A , et cavitate factâ, cogat aquam circumquaque ascendere, aqua elevata vi propriæ gravitatis descendendo partim refluet in A , ad cavi-

tem replendam, partim in plagam oppositam feretur, et celeritate cadendo acquisitâ novam cavitatem formabit, atque itâ deinceps undæ motus per successivum ascensum et descensum propagabitur in orbem.

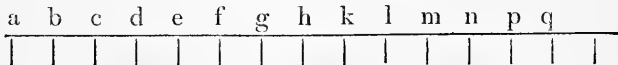
pagari concipe per successivas condensationes et rarefactiones medii, sic ut pulsus cujusque pars densissima sphaericam occupet superficiem circa centrum A descriptam, et inter pulsus successivos æqualia intercedant



intervalla. Designent autem lineæ d e, f g, h i, k l, &c. densissimas pulsum partes, per foramen B C propagatas. Et quoniam medium ibi densius est quam in spatiis hinc inde versus K L et N O, ^(e) dilatabit sese

sum propulsæ eant et condensentur, et ubi sunt densissimæ sphaericam superficiem circa centrum A descriptam occupare intelliguntur, tum vi elasticâ rarefiant et dilatatione suâ partim versus centrum A redeant, partim a centro illo quaqu-

dilatatur, et particulas a, b, c, &c. in pristina loca successivè repellit, dum interea aliæ particulæ ut g, h, &c. versus q progrediuntur; quo motu medium rursus condensatur versus q, e deinde utrinquè dilatatur, atquè itâ deinceps



versum recedant et partes vicinas propulsent; ita ut condensentur, atque itâ successivis condensationibus et dilatationibus agitetur totum medium. Quæ ut clarius intelligantur, motum particularum aëris in uno prædictæ sphaeræ radio contemplemur. Sint a, b, c, d, &c. puncta physica medii quiescentis in rectâ a q, ad æquales ab invicem distantias sita. Punctum a, vi quâlibet acceleratrice urgeatur, secundum directionem, a q, et deinde cessante vis illius actione, per celeritatem acquisitam moveatur. Non poterit itâ moveri particula a, quin successive moveantur particulæ aliæ b, c, d, e, &c. et quia medium elasticum in intervallis b c, c d, d e, &c. gradatim condensatur et vim elasticam majorem acquirit quâ celeritas particulæ a, sibi relictæ continuò minuitur ac tandem prorsus extinguitur; tum verò medium condensatum vi suâ elasticâ utrinque tam versus a, quam versus q

pulsus per successivas condensationes et rarefactiones medii propagantur. * Hæc pulsum in medio elastico genitorum naturâ, ad Prop. XLVII. fusius expenditur, sed isto in loco hæc sufficere videntur.

^(e) * *Dilatabit sese tam versus, &c.* Per vim elasticam quæ vi comprimenti quâ partes medii condensantur, æqualis est, et in omnem loci circumferentiam agit.

295. Motus pulsum in medio elastico spectari potest ut analogus cum motu undarum in superficie aquæ stagnantis; nam condensatio partium medii elastici locum tenet elevationis aquarum, vis elastica medii locum gravitatis aquæ, et pars pulsum densissima parti undarum altissimæ correspondet. Undè in utroque motu, medii particulæ per brevía spatia eunt et redeunt, intereadum pulsus vel unda propagatur (294) et eodem modo quo (293 undarum reflexionem ex-

tam versus spatia illa K L, N O utrinque sita, quam versus pulsum rariora intervalla; eoque pacto rarius semper evadens e regione intervallo- rum ac densius e regione pulsum, participabit eorundem motum. Et quoniam pulsum progressivus motus oritur a perpetuâ relaxatione par- tium densiorum versus antecedentia intervalla rariora; et pulsus eâdem ferè celeritate sese in medii partes quiescentes K L, N O hinc inde re- laxare debent; pulsus illi eâdem ferè celeritate sese dilatabunt undique in spatia immota K L, N O, quâ propagantur directè a centro A; ideòque spatium totum K L N O occupabunt. Q. e. d. Hoc experimur in sonis, qui vel monte interposito audiuntur, vel in cubiculum per fenestram ad-

posuimus, demonstratur pulsus ab obstaculo plano B C, (vid. fig. not. 293.) ità reperi ut sit angulus reflexionis æqualis angulo incidentiæ, idemque sit medii motus post reflexionem qui produceretur, si pulsus ex centro H sublato ob- staculo, propagaretur.

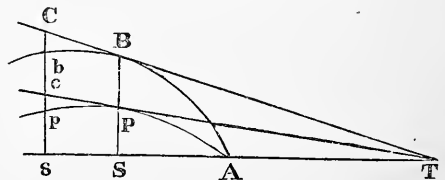
Sed ut hujus Sectionis doctrina quæ soni phæ- nomenis explicandis accommodata est, melius intelligatur, nonnulla de naturâ soni et de motu corporum resonantium præmittenda sunt.

296. Definitio. *Sonus directus est*, qui a corpore sonoro ad organum auditus rectâ lineâ fer- tur. *Sonus reflexus qui* a corpore sonoro in alia corpora fertur, et inde ad aurem reflectitur.

297. Propositio. *Sonus est particularum cor- poris resonantis motus tremulus ac vibratorius aëri communicatus et ad aures delatus.* Hæc Propo- sitio notissimis experimentis certa est. Nam corpora non resonant nisi percutiantur, et maxi- mē omnium resonant corpora dura atque elastica quorum partes igitur flectuntur, et deinde vi suâ elasticâ resiliunt, atque ità tremulo ac vibratorio motu agitantur. Particularum corporis resonantis subsultus visu et tactu percipitur; chartæ frustula corpori reso- nanti insidentia subsultare oculis cernun- tur et admotâ manu partium fremitus sentitur. Verum si fides instrumenti mu- sici tensa non fuerit, licet oscillationes tota peragat, sonum non edit; et forcipis foca- riæ crura digitis constricta et extemplo dimissa, oscillationes agunt sine sono; at si oscillando corpus aliquod durum percutiunt, resonant; ex quibus deducitur sonum non solo totius corporis oscillatorio motu, sed particularum ipsius tremore produci. Hic motus aëri conti- guo communicatur et pulsus excitat (294). Cum propè aquam stagnantem tympanum quatitur, subsultus observantur in aquæ superficie. Dum instrumentorum musicorum pulsantur nervi, pulvisculi qui aëri innant et radio Solis fiunt conspicui, conformiter ad fremitum nervorum subsultare videntur. Si ex duabus chordis mu- sici, homogeneis, æqualibus et æque tensis una pulsetur ut sonum edat, altera prioris vicina concutitur et similiter resonat. Tandem cor- pora sonora sub campanâ antiæ pneumaticæ

posita atque percussa, dum educitur aër, sonum languidiorem reddunt et exhausto aëre, nullum qui possit percipi. Est igitur aër vehiculum soni: attamen totius aëreæ molis motus qui in vento cernitur, per se ad producendum sonum non valet, sed vibratorius particularum motus satis validus necessarius est.

298. Lemma. *Si curvarum duarum A B, A P abscessam communem A S habentium, ordi- natæ S B, S P sint semper ad invicem in datâ ratione, imminutis iis in infinitum ut curvæ tan- dem coincident cum axe A S, erit ultima ratio curvaturæ eadem quæ ordinarum.* Duc novam ordinatam s p curvis occurrentem in p et b, et ad puncta B et P duc tangentes occurrentes ordi- natæ novæ in C et c. Tum ob datam ordinata- rum rationem, tangentes productæ ad idem axis punctum T concurrent (256. Lib. I.) et ideò ob parallelas S B, s C, erit s C : s c = S B : S P et (per Hyp.) S B : S P = s b : s p; unde s C : s c = s b : s p = s C — s b : s c — s p =

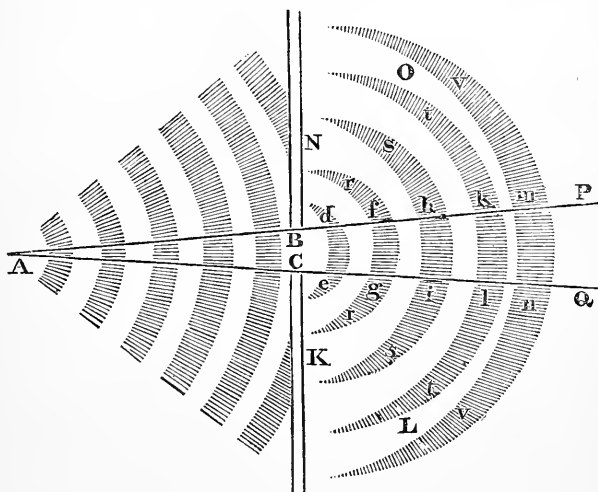


b C : p c = S B : S P, coincident jam ordina- tæ s b, S B, et lineolæ evanescentes b C, p c. erunt subtensæ angulorum contactûs b B C, p P c, et ordinatis S B, S P in infinitum dimi- nutis, ut curvæ tandem coincident cum axe A S, subtensæ illæ perpendiculares evadent ad curvas, fietque B b æqualis P p. Sed in hac hypothesi, anguli contactûs sunt ad invicem ut $\frac{b C}{B b}$, ad

$\frac{p c}{P p}$ (154. Lib. I.), hoc est, ut b C ad p c. Quare curvaturæ in B et P, quæ angulis contactûs pro- portionales sunt (121. Lib. I.) erunt subtensis b B C, p c, ac proinde (ex dem.) ordinatis S B, S P proportionales. Q. e. d.

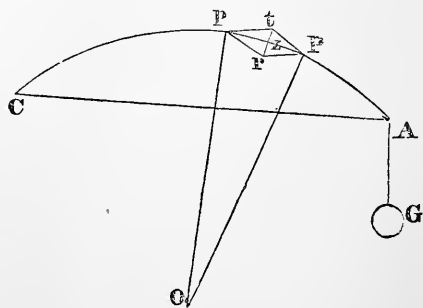
missi sese in omnes cubiculi partes dilatant, inque angulis omnibus audiuntur, non tam reflexi a parietibus oppositis, quam a fenestrâ directè propagati, quantum ex sensu judicare licet.

Cas. 3. Ponamus denique quod motus cujuscunque generis propagetur ab A per foramen B C : et quoniam propagatio ista non fit, nisi quâtenus partes mediî centro A propiores urgent commoventque partes posteriores;



et partes quæ urgentur fluidæ sunt, ideoque recedunt quaquaversum in regiones ubi minus premuntur: recedent eadem versus mediî partes omnes quiescentes, tam laterales K L et N O, quàm anteriores P Q, eoque pacto motus omnis, quam primum per foramen B C transiit, dilatari incipiet et inde tanquam a principio et centro, in partes omnes directè propagari. Q. e. d.

299. Lemma. *Vis acceleratrix quâ punctum quodlibet P nervi tensi et uniformiter crassi urgetur, dum per brevissimum spatium oscillatur, est ut nervi curvatura in eodem loco. Nervus A C pondere G tensus oscillando pervenerit ad positionem curvæ A P C, cum axe A C ferè coincidentis, et quia linea recta C A pondere G tenditur ubique æqualiter, æqualis quoque erit tensio omnium partium curvæ A P C quamproxime. Sumatur punctum p, puncto P quamproximum, et ductis tangentibus P t, p t concurrentibus in t, compleatur parallelogrammum P t p r, ducanturque ad curvam normales P O, p O concurrentes in O, vires æquales quibus arcus evanescens P p, (qui sumi potest pro arcu circuli radio P O descripti (121. Lib. 1.) in directionibus tangentium*



PROPOSITIO XLIII. THEOREMA XXXIV.

Corpus omne tremulum in medio elastico propagabit motum pulsum undique in directum; in medio verò non elastico motum circulem excitabit.

Cas. 1. Nam partes corporis tremuli vicibus alternis eundo et redeundo, itu suo urgebunt et propellent partes medii sibi proximas, et urgendo compriment easdem et condensabunt; dein reditu suo sinent partes compressas recedere et sese expandere. Igitur partes medii corpori tremulo proximæ ibunt et redibunt per vices, ad instar partium corporis illius tremuli: et quâ ratione partes corporis hujus agitabant hasce medii partes, hæ similibus tremoribus agitatae agitabunt partes sibi proximas, eæque similiter agitatae agitabunt posteriores, et sic deinceps in infinitum. Et quemadmodum medii partes primæ eundo condensantur et redeundo relaxantur, sic partes reliquæ quoties eunt condensabuntur, et quoties redeunt sese expandent. Et propterea non omnes ibunt et simul redibunt (sic enim determinatas ab invicem distantias servando, non rarefierent et condensarentur per vices) sed accedendo ab invicem ubi condensantur, et recedendo ubi rarefiunt, ^(f) aliquæ earum ibunt dum aliæ redeunt; idque vicibus alternis in infinitum. Partes autem euntes et eundo condensatae, ob motum suum progressivum, quo feriunt obstacula, sunt pulsus; et propterea pulsus successivi a corpore omni tremulo in directum propagantur; idque æqualibus circiter ab invicem distantiis, ^(g) ob æqualia temporis intervalla, quibus corpus tremoribus suis singulis singulos pulsus excitat. Et quanquam corporis tremuli partes eant et redeant secundum plagam aliquam certam et determinatam, tamen pulsus inde per medium

PROPOSITIO.

309. *Corpora sonora homogenea et similia quorum latera homologa rationem habent inversam numerorum 24, 27, 30, 32, 36, 40, 45, 48, tonos edunt, UT, RE, MI, FA, SOL, LA, SI, ut. Hanc Propositionem probant experimenta quæ in campanis, cylindris et prismatibus homogeneis et similibus habuerunt Mersennus in Harmoniâ Universali et D. Carré in Monum. Acad. Reg. an. 1709.*

PROPOSITIO.

310. *Dum corpus sonorum percutitur, tremulus particularum motus ex ictu et vi elasticâ creatus, remotis obstaculis, per superficiem cor-*
VOL. I.

poris propagatur: quod quidem leviora chartæ frustula superficiē corporis resonantis imposita, tremore suo indicant.

PROPOSITIO.

311. *Campanæ figura ictu clavæ ita mutari oculis cernitur ut cum rotunda esset, fiat ovala et quandiu auditur sonus, alternis mutatur oscillationibus.*

312. *Corol. Ex tribus ultimis Propositionibus concludere licet, ut in chordis ita et in aliis corporibus resonantibus, tonos pendere a numero vibrationum seu undulationum quæ dato tempore peraguntur.*

^(f) *Aliquæ earum ibunt (294).*

^(g) ** Ob æqualia temporis intervalla (300).*

propagati sese dilatabunt ad latera, per Propositionem præcedentem; et a corpore illo tremulo tanquam centro communi, secundum superficies propemodum sphaericas et concentricas, undique propagabuntur. Cujus rei exemplum aliquod habemus in undis, quæ si digito tremulo excitentur, non solum pergent hinc inde secundum plagam motus digiti, sed, in modum circularum concentricorum, digitum statim cingent et undique propagabuntur. Nam gravitas undarum supplet locum vis elasticæ.

Cas. 2. ^(h) Quod si medium non sit elasticum: quoniam ejus partes a corporis tremuli partibus vibratis pressæ condensari nequeunt, propagabitur motus in instanti ad partes ubi medium facillimè cedit, hoc est, ad partes quas corpus tremulum alioqui vacuas a tergo relinqueret. Idem est casus cum casu corporis in medio quocunque projecti. Medium cedendo projectilibus, non recedit in infinitum; sed in circulum eundo, pergit ad spatia quæ corpus relinquit a tergo. Igitur quoties corpus tremulum pergit in partem quamcunque, medium cedendo perget per circulum ad partes quas corpus relinquit; et quoties corpus regreditur ad locum priorem, medium inde repellitur et ad locum suum priorem redibit. Et quamvis corpus tremulum non sit firmum, sed modis omnibus flexile, si tamen magnitudine datum maneat, quoniam tremoribus suis nequit medium ubivis urgere, quin alibi eidem simul cedat; efficiet ut medium, recedendo a partibus ubi premitur, pergat semper in orbem ad partes quæ eidem cedunt. Q. e. d.

Corol. Hallucinantur igitur qui credunt agitationem partium flammæ ad pressionem, per medium ambiens, secundum lineas rectas propagandum conducere. Debebit ejusmodi pressio non ab agitatione solâ partium flammæ, sed a totius dilatatione derivari.

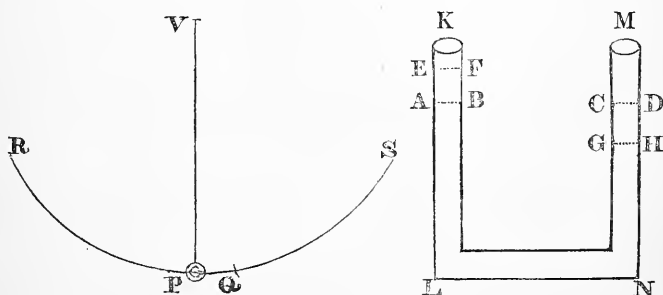
PROPOSITIO XLIV. THEOREMA XXXV.

Si aqua in canalis cruribus erectis K L, M N vicibus alternis ascendat et descendat; construatur autem pendulum cujus longitudo inter punctum suspensionis et centrum oscillationis æquetur semissi longitudinis aquæ in canali: dico quod aqua ascendet et descendet iisdem temporibus quibus pendulum oscillatur.

Longitudinem aquæ mensuro secundum axes canalis et crurum, eandem summæ horum axium æquando; et resistentiam aquæ, quæ oritur ab attritu

^(h) * Quod si medium continuum sit et non elasticum, &c.

canalis, hic non considero. Designent igitur AB , CD mediocrem altitudinem aquæ in crure utroque; et ubi aqua in crure KL ascendit ad altitudinem EF , descenderit aqua in crure MN ad altitudinem GH . Sit autem P corpus pendulum, VP filum, V punctum suspensionis, $RPQS$ cyclois quam pendulum describat, P ejus punctum infimum, PQ arcus altitudini AE æqualis. Vis, quâ motus aquæ alternis vicibus acceleratur et retardatur, est excessus ponderis aquæ in alterutro crure supra pondus in altero, ideóque, ubi aqua in crure KL ascendit ad EF , et in crure altero



descendit ad GH , ⁽ⁱ⁾ vis illa est pondus duplicatum aquæ $EABF$, et propterea est ad pondus aquæ totius ut AE seu PQ ^(k) ad VP seu PR . Vis etiam, quâ pondus P in loco quovis Q acceleratur et retardatur in cycloide (per Corol. Prop. LI.) est ad ejus pondus totum, ut ejus distantia PQ a loco infimo P , ad cycloidis longitudinem PR . Quare aquæ et penduli, æqualia spatia AE , PQ describentium, vires motrices sunt ut pondera movenda; ^(l) ideóque, si aqua et pendulum in principio quiescunt, vires illæ movebunt eadem æqualiter temporibus æqualibus, efficientque ut motu reciproco simul eant et redeant. Q. e. d.

Corol. 1. Igitur aquæ ascendentis et descenditis, sive motus intensior sit sive remissior, vices omnes sunt isochronæ.

Corol. 2. Si longitudo aquæ totius in canali sit pedum Parisiensium $6\frac{1}{2}$.

⁽ⁱ⁾ * Vis illa est pondus duplicatum, &c. Est enim vis illa pondus tam aquæ $EABF$, quam aquæ æqualis $CGHD$.

^(k) * Ad VP seu PR . Semi-cyclois PR , æqualis est longitudini penduli, (per Cor. Prop. L. Lib. I.).

^(l) 313. * Ideóque, si aqua et pendulum, &c. Id evidentissimum fit si pondus P quod, manente oscillationis unius tempore potest ad arbitrium assumi, capiatur æquale ponderi aquæ totius in canali; tûm enim vires motrices, massæ movendæ, et spatia describenda, ideóque et tempora quibus spatia illa describuntur, in canali

et in cycloide æquantur respectivè. Sed observandum est superficiem AB , esse locum æquilibrii, ad quem cum aqua pervenit, nullâ amplius vi acceleratrice urgetur, sed velocitate tantum acquisitâ ulteriùs descendit vel ascendit; sicuti corpus pendulum P dum pervenit in locum cycloidis infimum P solâ velocitate acquisitâ movetur. Undè quo tempore aqua descensum unum absolvit in crure alterutro canal, eodem tempore pendulum oscillationem unam ex descensu et ascensu compositam perficit, duas verò oscillationes absolvit intereadum aqua e loco E descendit et ad eundem redit.

aqua tempore minuti unius secundi descendet, et tempore minuti alterius secundi ascendet; et sic deinceps vicibus alternis in infinitum. ^(m) Nam pendulum pedum $3\frac{1}{8}$ longitudinis tempore minuti unius secundi oscillatur.

Corol. 3. Auctâ autem vel diminutâ longitudine aquæ, augetur vel diminuitur tempus reciprocationis in longitudinis ratione subduplicatâ.

ROPOSITIO XLV. THEOREMA XXXVI.

Undarum velocitas est in subduplicatâ ratione latitudinum.

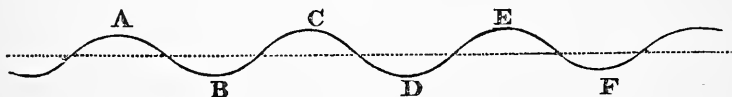
Consequitur ex constructione Propositionis sequentis.

PROPOSITIO XLVI. PROBLEMA X.

Invenire velocitatem undarum.

Constituatur pendulum cujus longitudo, inter punctum suspensionis et centrum oscillationis, æquetur latitudini undarum: et quo tempore pendulum illud oscillationes singulas peragit, eodem undæ progrediendo latitudinem suam propemodum conficiant.

Undarum latitudinem voco mensuram transversam, quæ vel vallibus imis, vel summis culminibus interjacet. Designet A B C D E F superficiem aquæ stagnantis, undis successivis ascendentem ac descendentem;



sintque A, C, E, &c. undarum culmina, et B, D, F, &c. valles intermediæ. Et quoniam motus undarum fit per aquæ successivum ascensum et descensum, sic ut ejus partes A, C, E, &c. quæ nunc altissimæ sunt, mox fiant infimæ; et vis motrix, quâ partes altissimæ descendunt et infimæ ascendant, est pondus aquæ elevata; alternus ille ascensus et descensus analogus erit motui reciproco aquæ in canali, easdemque temporis leges observabit: et propterea (per Prop. XLIV.) si distantiae inter undarum loca altissima A, C, E et infima B, D, F, ⁽ⁿ⁾ æquantur duplæ penduli longi-

^(m) * Nam pendulum ped. $3\frac{1}{8}$, seu ped. 3. et lin. 8. quamproximè (471. Lib. I.). Clariss. Hermanus Tom. III. Comm. Acad. Petrop. motum aquæ in tubis crura quomodolibet ad basim in-

clinata habentibus definivit. Rem generalius pertractavit celeb. D. Bernoullius in Hydrodynamica. Hos authores, si lubet, adeat lector.

⁽ⁿ⁾ * Æquantur duplæ penduli longitudini.

tudini; partes altissimæ A, C, E, tempore oscillationis unius evadent infimæ, et tempore oscillationis alterius denuo ascendent. Igitur inter transitum undarum singularum tempus erit oscillationum duarum; hoc est, unda describet latitudinem suam, quo tempore pendulum illud bis oscillatur; sed eodem tempore pendulum, cujus longitudo quadrupla est, ideóque æquat undarum latitudinem, oscillabitur semel. Q. e. i.

Corol. 1. Igitur undæ, quæ pedes Parisienses $3\frac{1}{8}$ latæ sunt, (°) tempore minuti unius secundi progrediendo latitudinem suam conficient; ideóque (P) tempore minuti unius primi percurrent pedes $183\frac{1}{3}$, et horæ spatium pedes 11000 quamproximè.

(^q) *Corol. 2.* Et undarum majorum vel minorum velocitas augebitur vel diminuetur in subduplicatâ ratione latitudinis.

Hæc ita se habent ex hypothesi quod partes aquæ rectâ ascendunt vel rectâ descendunt; sed ascensus et descensus ille (°) verius fit per circum-
lum, ideóque tempus hâc Propositione non nisi quamproximè definitum esse affirmo.

Quoniam, ex dictis, unda percurrit latitudinem suam A C vel B D intereadum altitudo A transfertur in C, vel cavitās B in D, quod fieri non potest nisi aqua ab altitudine undarum descendat, et deinde ad eandem altitudinem ascendat, et quia cavitās quæ est infrâ aquæ quiescentis superficiem quam in figurâ exhibet linea punctis distincta, est circiter æqualis elevationi aquæ suprâ eandem superficiem quæ est æquilibrii locus, patet (313) totius aquæ movendæ longitudinem æqualem esse longitudini cavitatis vel elevationis aquæ infrâ vel suprâ locum illum æquilibrii, ac proinde cum longitudo cavitatis vel elevationis illius æqualis sit distantie A B, vel B C, pendulum cujus longitudo est $\frac{1}{2}$ A B vel $\frac{1}{2}$ B C, semel oscillabitur eo tempore quo aqua ascendit, et iterum oscillabitur, intereadum aqua descendit (313.) atque ita oscillabitur bis quo tempore unda describit latitudinem suam. Quoniam igitur numeri oscillationum quas pendula eodem tempore peragunt, sunt in ratione subduplicatâ longitudinis pendulorum inversè (474. Lib. I.) pendulum cujus longitudo est A B C D, quadrupla longitudinis $\frac{1}{2}$ A B semel oscillabitur quo tempore unda latitudinem suam percurrit. In undis verò latioribus quæ altius non elevantur, linea curva A B C, vix differt a rectâ A C, quæ est undæ latitudo, et propterea in eo casu unda latitudinem suam describit, intereadum pendulum cujus longitudo est recta A C, semel oscillatur.

(°) * *Tempore minuti unius secundi* (471. Lib. I.).

(P) * *Tempore minuti unius primi.* Quia undarum datæ latitudinis velocitas æquabilis est (ex dem.). Si undæ latitudo data ped. $3\frac{1}{8}$, ducatur in tempus 60', factum $183\frac{1}{3}$ ped. erit spatium quod unda tempore minuti unius primi seu minutorum secundorum 60, describit et ducto rursus hoc numero $183\frac{1}{3}$ in 60', produetur spatium 11000 ped. quod unda tempore horæ unius conficit.

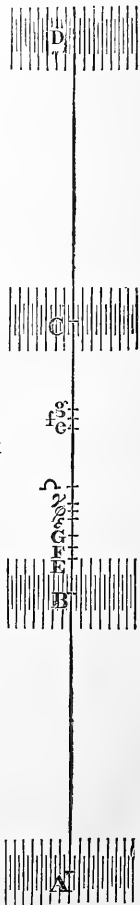
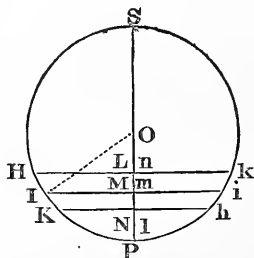
(^q) * *Corol. 2.* Undarum velocitates sunt ut earundem latitudines directè et tempora quibus latitudines illas percurrent inversè (5. Lib. I.). Sed tempora illa sunt in subduplicatâ ratione latitudinum undarum seu longitudinum pendulorum quæ eo tempore quo undæ latitudines suas describunt, semel oscillantur (472. Lib. I.). Undarum igitur velocitates sunt in ratione compositâ ex ratione latitudinum directè et ratione subduplicatâ earundem latitudinum inversè, ideóque sunt in ratione subduplicatâ latitudinum directè.

(°) * *Verius fit per circumlum*, seu per arcum curvilineum qui magis accedit ad figuram arcûs circularis quàm ad figuram canalīs rectilinei in quo aqua, rectâ ascendit et descendit.

PROPOSITIO XLVII. THEOREMA XXXVII.

Pulsibus per fluidum propagatis, singulæ fluidi particulæ, motu reciproco brevissimo euntes et redeuntes, accelerantur semper et retardantur pro lege oscillantis penduli.

Designent A B, B C, C D, pulsum successivorum æquales distantias; A B C plagam motus pulsum ab A versus B propagati; E, F, G puncta tria physica, ^(s) medii quiescentis in rectâ A C ad æquales ab invicem distantias sita; E e, F f, G g spatia æqualia perbrevia per quæ puncta illa motu reciproco ^(t) singulis vibrationibus eunt et redeunt; ε , φ , γ loca quævis intermedia eorundem punctorum; et E F, F G lineolas físicas seu medii partes lineares punctis illis interjectas, et successivè translatas in loca ε , φ , γ et e f, f g. Rectæ E e æqualis ducatur recta P S. Bisecetur eadem in O, centroque O et intervallo O P describatur circulus S I P i. Per hujus circumferentiam totam cum partibus suis exponatur tempus totum vibrationis unius cum ipsius partibus proportionalibus; sic ut com to tempore quovis P H vel P H S h, si demittatur ad P S perpendicularum H L vel h l, et capiatur E ε æqualis P L vel P l, punctum physicum E reperiatur in ε . Hâc lege punctum quodvis E, eundo ab E per ε ad e, et inde redeundo per ε ad E, iisdem accelerationis ac retardationis gradibus vibrationes singulas peraget ^(u) cum oscillante pendulo. Probandum est quod singula medii puncta physica tali motu agitari debeant. Fingamus igitur medium tali motu a causâ quâcunque cieri, et videamus quid inde sequatur.



^(s) * Medii quiescentis, id est, nondum agitati vibrationibus corporis tremuli, aut inde productis aëris pulsibus.

^(t) 314. * Singulis vibrationibus eunt et redeunt. Si corporis tremuli aut chordæ musicæ oscillantis particula incipiat moveri in E, et eundo secum transferat medii punctum E, in locum e, et deinde particula illa chordæ musicæ vi propriâ et punctum e, medii inter e, et C compressi ac condensati dilatatione redeant in locum E, unicus in

medio elastico pulsus secundum directionem B C, producet, et singulis aliis vibrationibus corporis tremuli vel chordæ musicæ ex itu et reditu compositis, singuli excitabuntur pulsus (Prop. XLIII.) atque adeo pulsus latitudinem suam describit intereadum punctum E, vibrationem unam ex itu et reditu per brevissimum spatium E e, compositam, absolvit.

^(u) * Cum oscillante pendulo (Prop. LII. Lib. I.).

In circumferentiâ $P H S h$ capiantur æquales arcus $H I$, $I K$ vel $h i$, $i k$, eam habentes rationem ad circumferentiam totam quam habent æquales rectæ $E F$, $F G$ ad pulsum intervallum totum $B C$. Et demissis perpendicularis $I M$, $K N$ vel $i m$, $k n$; quoniam puncta E , F , G motibus similibus successivè agitantur, et vibrationes suas integras ex itu et reditu compositas interea peragunt dum pulsus transfertur a B ad C ; si $P H$ vel $P H S h$ sit tempus ab initio motûs puncti E , (^x) erit $P I$ vel $P H S i$ tempus ab initio motûs puncti F , et $P K$ vel $P H S k$ tempus ab initio motûs puncti G ; et propterea $E \epsilon$, $F \phi$, $G \gamma$ erunt ipsis $P L$, $P M$, $P N$ in itu punctorum vel ipsis $P l$, $P m$, $P n$ in punctorum reditu, (^y) æquales respectivè. Unde $\epsilon \gamma$ seu $E G + G \gamma - E \epsilon$ in itu punctorum æqualis erit $E G - L N$, in reditu autem æqualis $E G + l n$. (^z) Sed $\epsilon \gamma$ latitudo est seu expansio partis medii $E G$ in loco $\epsilon \gamma$; et propterea expansio partis illius in itu est ad ejus expansionem mediocrem, ut $E G - L N$ (^a) ad $E G$; in reditu autem ut $E G + l n$ seu $E G + L N$ ad $E G$. Quare (^b) cùm sit $L N$ ad $K H$ ut $I M$ ad radium $O P$, (^c) et $K H$ ad $E G$ ut circumferentia $P H S h$ P ad $B C$, id est, si ponatur V pro radio circuli circumferentiam habentis æqualem intervallo pulsum $B C$, (^d) ut $O P$ ad V ; et ex æquo $L N$ ad $E G$ ut $I M$ ad V : erit expansio partis $E G$ punctive physici F in loco $\epsilon \gamma$ ad expansionem mediocrem, quam pars illa habet in loco suo primo $E G$, (^e) ut $V - I M$ ad V in itu, ut-

(^x) * *Erit $P I$ vel $P H S i$.* Quoniam puncta E , F , G , et alia deinceps, motibus similibus per medii compressionem et dilatationem communicatis successivè agitantur, pulsus per æqualia spatia $E F$, $F G$, &c. æqualibus temporibus propagatur, ideòque tempus quo transfertur ab E ad F , vel ab F ad G , est ad tempus totum quo transfertur a B ad C , et quo singula puncta E , F , G vibrationes suas integras ex itu et reditu compositas perficiunt, ut spatium $E F$ vel $F G$ ad spatium $B C$, in quâ ratione etiam est arcus $H I$, vel $I K$, ad totam circumferentiam $P H S P$, (per Hyp.) quæ tempus totum quo pulsus a B ad C transfertur, exponit, et differentia inter tempus sumptum ab initio motûs puncti E et tempus sumptum ab initio motûs puncti F , est tempus illud quod pulsus transfertur ab E ad F . Quare si $P H$ vel $P H S h$ exponat tempus ab initio motûs puncti E , $P I$ vel $P H S i$, exponet tempus ab initio motûs puncti F , cum $H I$ vel $h i$ exponat differentiam inter tempus ab initio motûs puncti E , et tempus ab initio motûs puncti F , &c.

(^y) * *Æquales respectivè* (per Prop. LII. vel XXXVIII. Lib. I.).

(^z) * *Sed $\epsilon \gamma$ est latitudo seu expansio partis medii $E G$, in loco $\epsilon \gamma$, quia punctum E translaturum est in locum ϵ , et punctum G in locum γ .*

(^a) * *Ad $E G$.* Nam cùm E , F , G sint

puncta tria medii quiescentis seu motu impresso nondum condensati vel rarefacti, expansio medii in loco $E G$, mediocris seu quasi media est inter minimam ipsius expansionem in locis pulsum densissimis, et maximam in locis rarissimis.

(^b) 315. * *Cum sit $L N$ ad $K H$.* Anguli ad centrum $I O P$ mensura est arcus $I P$ æqualis dimidio arcui $I P i$, seu $K P k$, et anguli ad circumferentiam $K H k$, mensura est etiam dimidius arcus $K P k$, et ideò anguli $I O P$ et $K H L$, æquales sunt. Hinc si ex puncto K , demissum intelligatur ad $H L$, perpendicularum æquale $L N$, hoc perpendicularum cum ordinatarum $H L$ et $K N$ differentiâ et cum arcu minimo $K H$ triangulum constituet simile triangulo $I O M$. Est igitur $L N$ ad $K H$, ut $I M$ ad $I O$ seu $O P$.

(^c) * *Et $K H$ ad $E G$* (per Hyp. supra.).

(^d) * *Ut $O P$ ad V .* Sunt enim circulorum peripheriæ $P H S P$ et $B C$ radiis suis $O P$ et V proportionales.

(^e) * *Ut $V - I M$ ad V .* Quia enim (ex dem.) $L N = \frac{E G \times I M}{V}$, erit $E G - L N$

$$= \frac{V \times E G - I M \times E G}{V}, \text{ et hinc } E G -$$

$L N$ ad $E G$ ut $V - I M$ ad V . Et similiter ob $L N = l n$, et $I M = i m$, erit $E G + l$ ad $E G$ ut $V + i m$ ad V .

cam puncti γ) ⁽¹⁾ est vis quâ interjecta medii lineola physica $\varepsilon \gamma$ acceleratur in itu et retardatur in reditu; et propterea vis acceleratrix physica $\varepsilon \gamma$, est ut ipsius distantia a medio vibrationis loco Ω . Proinde tempus (per Prop. XXXVIII. Lib. I.) rectè exponitur per arcum P I; et medii pars linearis $\varepsilon \gamma$ ^(m) lege præscriptâ movetur, id est, lege oscillantis penduli: estque par ratio partium omnium linearium ex quibus medium totum componitur. Q. e. d. (+)

vis elastica puncti F in loco $\varepsilon \gamma$ est ad vim ejus elasticam mediocrem in loco E G, ut $\frac{1}{V + i m}$,

ad $\frac{1}{V}$, et vires elasticæ punctorum physicorum

G et E, in loco $\varepsilon \gamma$, sunt ut $\frac{1}{V + h i}$, et

$\frac{1}{V + k n}$, ad $\frac{1}{V}$, et virium differentia ad medii vim elasticam mediocrem ut $\frac{k n - h i}{k n - h i}$

$\frac{V + V \times h i + V \times k n + h i \times k n}{V + V \times h i + V \times k n + h i \times k n}$, ad $\frac{1}{V}$, hoc est, ut $\frac{k n - h i}{V}$ ad $\frac{1}{V}$ sive ut $k n - h i$ ad V, &c.

(1) * *Est vis quâ interjecta lineola.* Medium in ε et in γ vi suâ elasticâ sese dilatare in plagas oppositas C et B nititur, his viribus interjecta lineola physica $\varepsilon \gamma$, seu punctum physicum ϕ , urgetur in utramque plagam, et excessu vis elasticæ in ε , suprâ vim elasticam in γ , acceleratur in itu et retardatur in reditu.

(m) * *Lege præscriptâ movetur.* Demonstratum est quod si punctum physicum E ad legem oscillantis penduli moveatur, uti si vibrationibus partium corporis tremuli aut nervi musici (quemadmodum in not. 314 exposuimus) agitur, tum solâ vi elasticâ medii punctum physicum F, et alia deindè puncta secundum eandem legem oscillantis penduli successivè movebuntur.

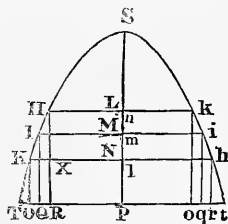
(+) *Jam pridem vir acutissimus Eulerus, hanc Newtoni theoriam suspectam habuit, aliamque formulam dedit quâ soni celeritatem determinaret a Newtonianâ diversam, sed suce formulæ demonstrationem, aut vitium Newtonianâ, palam non fecit, quod sciamus; observationes suas hanc in rem nobis communicavit vir doctissimus Gabriel Cramer, vir in his rebus expertissimus, sagacissimæ ingenii, quas suâ cum veniâ, publici juris facimus, quasque doctorum attentione dignissimas credimus; certè planissimè ostendit aliquod subreptionis vitium in hac demonstrandi formâ, quam Newtonus adhibet latere; scilicet demonstrationem ipsam non ex rei naturâ, sed ex hypothesi assumptâ fluere. Ipsi verò motus aëris secundum methodum Newtonianam assequi conabimur, nam ipsam ejus Propositionem veram esse, etsi ejus demonstratio vitio quodam laboret, persuasum habemus, sed eam ex naturâ motûs puncti elas-*

tici sonori esse deducendam, potius quàm ex motibus aëris, qui variis modis pro ratione agitationis ipsi impressæ peragi possent. Hæc autem sunt viri illustrissimi verba.

Propositio XLVII. Lib. II. Princip. Philos. Newtoni, minus firmâ demonstratione nititur, ut ex eo patet, quod si diversæ prorsus conclusioni demonstrandæ applicetur, eodem successu gaudeat. Id ego cum pluribus diversis tentassem modis, lubet unum, exempli gratiâ, apponere. Sit, verbi causâ, hoc Theorema a Newtoniano omnino diversum, eadem tamen demonstratio nemunitum.

Pulsibus per fluidum elasticum propagatis, singule fluidi particule, motu uniformiter retardato et accelerato euntes et redeuntes, oscillantur pro lege gravis ascendentis et descendentis.

Designent A B, B C C D, &c. pulsuum successivorum æquales distantias, A B C plagam motus pulsuum ab A versus B propagati, E, F, G, puncta tria physica medii quiescentis in recta B C ad æquales distantias sita, E e, F f, G g, spatia æqualia perbrevia per quæ puncta illa in motu uniformiter retardato moventur; ε , ϕ , γ , loca



quævis intermedia illorum punctorum, et E F, F G lineolas physicas seu partes medii lineares punctis illis interjectas et successivè translatis in loca ε , ϕ , γ , et e f, f g. Rectæ E e æqualis ducatur recta P S, quâ tanquam axe describatur parabola S H I K. Per basim T t exprimatut totum tem-



pus unius vibrationis, et per ejus partes, partes temporis proportionales exprimentur, sic ut completo tempore quovis T R, vel T r, si erigatur normalis R H aut r h, et capiatur E ε aequalis R H vel P L, aut r h vel P l, punctum physicum E reperiatur in ε . Hâc lege punctum quodvis E eundo ab E per ε ad e, et inde redeundo per ε ad E, iisdem retardationis et accelerationis gradibus vibrationem unam peraget cum ascendente et descendente corpore gravi, probandum est quod singula mediâ puncta physica tali motu agitari debeant. Fingamus igitur medium tali motu a causa quâcunque cieri, et videamus quid inde sequatur.

In recta T t, sumantur aequales partes O Q, Q R, vel o q, q r, eam habentes rationem ad rectam totam T t, quam habent aequales rectae E F, F G ad pulsum intervallum B C; et erectis O K, Q I, R H, vel o k, q i, r h: demissis etiam si placet K N, I M, H L; k n, i m, h l; quoniam puncta E, F, G, motibus similibus successive agitantur, et vibrationes suas integras itu et reditu compositas interea peragunt dum pulsus transfertur ex B ad C, si T R vel T r sit tempus ab initio motus puncti E, erit T Q vel T q tempus ab initio motus puncti F, et T O vel T o, tempus ab initio motus puncti G; et propterea E ε , F ϕ , G γ , erunt ipsi R H, vel P L, Q I vel P M, et O K vel P N in itu punctorum, vel ipsi r h aut P l, q i aut P m, et o k vel P n in reditu aequales respective: unde $\varepsilon \gamma$ seu E G + G γ — E ε in itu punctorum aequalis erit E G — L N: in reditu autem aequalis E G + l n. Sed $\varepsilon \gamma$ latitudo est seu expansio partis mediâ E G in loco $\varepsilon \gamma$, et propterea expansio partis illius in itu, est ad ejus expansionem mediocrem ut E G — L N ad E G; in reditu autem ut E G + l n seu E G + L N ad E G. Quare cum sit L N seu H X ad K X seu O R, ut L M ad semi-parametrum parabolæ, et O R ad E G ut T t ad B C, id est (si ponatur V ad semi-parametrum ut B C ad T t, vel si sit T t aequalis semi-parametro et V aequalis B C) ut semi-parameter ad V, et ex æquo L N ad E G ut I M ad V; erit expansio partis E G punctive physici F in loco $\varepsilon \gamma$ ad expansionem mediocrem quam pars illa habet in loco suo primo E G, ut V — I M ad V in itu, utque V + i n ad V in reditu. Unde vis elastica puncti F in loco $\varepsilon \gamma$ est ad vim ejus elasticam mediocrem

in loco E G, ut $\frac{1}{V - I M}$ ad $\frac{1}{V}$ in itu, in reditu verò ut $\frac{1}{V + i m}$ ad $\frac{1}{V}$. Et eodem argumento itus punctorum physicorum E et G in itu sunt ut $\frac{1}{V - H L}$ et $\frac{1}{V - K N}$ ad $\frac{1}{V}$, et virium differentia ad vim elasticam mediocrem, ut

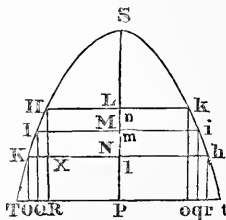
$$\frac{K N - H L}{V V - V \times H L - V \times K N + H L \times K N} \text{ ad } \frac{1}{V}, \text{ hoc est, ut } \frac{K N - H L}{V V} \text{ ad } \frac{1}{V} \text{ sive ut}$$

K N — H L ad V, si modo (ob angustos limites vibrationum) supponamus H L et K N indefinite minores esse quantitate V. Quare cum

quantitas V detur, differentia virium est ut K N — H L seu K X, seu O R, hoc est, ob proportionales O R, E F, et T t, B C, (datasque E F, T t et B C) constans. Et eodem argumento, differentia virium punctorum physicorum ε et γ in reditu lineolæ physice $\varepsilon \gamma$ est etiam constans. Sed differentia illa (id est, excessus vis elasticæ puncti ε supra vim elasticam puncti γ) est vis qua interjecta mediâ lineola physica acceleratur aut retardatur, et propterea vis acceleratrix lineolæ physice $\varepsilon \gamma$ est constans. Propterea tempus rectè exponitur per ordinatam I M et mediâ pars linearis $\varepsilon \gamma$, lege præscripta movetur, id est, lege ascenditis descenditque gravis, estque par ratio omnium linearum ex quibus medium totum componitur. Q. e. d.

Sed (quod sanè mirum) Prop. XLIX. in quâ ex sua hypothesisi Newtonus soni velocitatem computat, eandem dabit conclusionem in nostra, et, ut arbitror, in aliâ quâcunque. Sic

Fingamus medium ab incumbente pondere, per more aëris nostri, comprimi, sitque A altitudo mediâ homogenei, cujus pondus adæquet pendus incumbens et cujus



densitas eadem sit cum densitate mediâ compressi in quo pulsus propagatur. Et quo tempore corpus caeet ex altitudine aequali dimidio ipsius A eodem tempore pulsus percurrat spatium aequale toti altitudini A. (Id quod congruit cum Corol. 1. dictæ Prop. XLIX.).

Nam stantibus quæ in Prop. XLVII. constructa sunt, si lineâ quævis physica singulis vibrationibus describendo spatium P S urgeatur in itu et reditu a vi elastica quæ ipsius ponderi, æquetur, peraget semi-vibrationem quo tempore corpus cadet ex altitudine P S, adæque vibrationem, quo tempore corpus grave caderet ex altitudine 4 P S. Quare, cum tempora descensus sint in subduplicata ratione longitudinum percursarum, fiet tempus vibrationis unius ad tempus descensus ex altitudine $\frac{1}{2}$ A, in subduplicatâ ratione longitudinis 4 P S ad $\frac{1}{2}$ A, seu 8 P S ad A. Sed vis quâ in singulis punctis urgetur particula E G erat ad ejus vim mediocrem elasticam, ut K N — H L seu K X vel O R ad V, et vis illa mediocris, hoc est pondus incumbens quo lineola



E G comprimitur, est ad pondus lineolæ E G, ut A ad E G, adeoque ex æquo, vis quæ lineola E G in singulis punctis urgetur, est ad ejus pondus, ut O R X A ad E G X V, seu ut semi-parameter in A, ad V V (est enim O R ad E G ut T t ad B C; atque ideò ut semi-parameter ad V) vel ut 8 P S X A ad B C², ob V q ad B C q ut semi-parametri quadratum ad T t quad. (atque ideò ut 8 P S ad semi-parametrum.) Quare cum tempora quibus æqualia corpora per æqualia spatia impelluntur, sint reciproce in subduplicata ratione virium, erit tempus vibrationis unius, urgente vi illa elastica, ad tempus unius vibrationis urgente vi ponderis, in subduplicata ratione B C² ad 8 P S X A. Atque adeò ad tempus descensus ex altitudine $\frac{1}{2}$ A, in subduplicata ratione B C² ad 8 P S X A et subduplicata ratione 8 P S ad A, hoc est in ratione integra B C ad A. Sed tempore unius vibrationis pulsus progrediendo conficit latitudinem suam B C. Ergo tempus quo pulsus percurrit spatium B C est ad tempus descensus ex altitudine $\frac{1}{2}$ A, ut B C ad A. Tempus autem quo pulsus percurrit spatium A est ad tempus quo percurrit spatium B C, ut A ad B C, adeoque æquale temporis descensus ex altitudine $\frac{1}{2}$ A.

Hic notandum, quod absurda sit, et facilè refutanda hypothesis hic assumpta, quod nempe pulsus propagetur, particulis euntibus et redeuntibus pro lege gravis ascendentis et descendentis. Verùm id ipsum est quod demonstrationem Newtonianam everit, ostendendo nimirum eam ipsam absurdæ hypothesei probandæ æque inservire.

Hactenus vir doctissimus; sequuntur ea quibus restitui posse Newtonianam demonstrationem credimus.

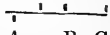
De Motibus in Fluido Elastico Genitis.

1. *Hypothesis.* Suppono medium elasticum constare punctis, quantitate exigua sed finita a se dissitis, et vi repulsivâ donatis quæ distantie illorum punctorum sit reciproce proportionalis; nec ad alia puncta præter ea quæ immediate proxima sunt sese extendit: hoc enim modo quæcumque sit partium medii elastici natura, satis feliciter representantur effectus qui ex eorum elaterio pendunt.

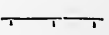
2. *Corol. 1.* Medii elastici status naturalis est ut puncta ejus elastica a se mutuo æqualiter distent.

3. *Corol. 2.* Puncta elastica velocitatem finitam suscipere possunt vel per immediatum contactum corporis moti, velocitate suâ finita punctum elasticum urgentis vel per actionem continuatam vis repulsivæ punctorum elasticorum si ab unâ parte fortior sit quàm ab aliâ. Reliquas causas motus, ut gravitatem, vires centrales, &c. hic non consideramus.

4. *Theor. 1.* Si velocitas finita quomodocumque excitetur in puncto elastico, distantie ejus a proximo puncto versus quod movetur minuetur finita quantitate antequam in reliquo medio factus sit ullus motus ullaque compressio: sint A, B, C, tria puncta medii elastici æquidistantia,

moveatur A versus B velocitate finita, et tempore infinite parvo describat spatium infinite parvum primi ordinis A a, vis motrix puncti B erit differentia virium repulsivarum puncti A et C, est autem vis repulsiva puncti A ubi pervenit in a, ad vim puncti C (si immotum supponatur) ut B C ad B a,  et dividendo vis motrix puncti B, ad vim repulsivam puncti C, ut A a B C ut B C — B a (= A a) ad B a. Sed A a, est infinite parvum ex hypothesi et B a est finita quantitas, ergo vis motrix puncti B, est infinite parva vis respectu vis repulsivæ puncti C, quæ vis repulsiva pro ipsa vi naturali elaterii assumi potest; vis autem elasticitatis est ex genere pressionum, tempore infinite parvo velocitatem infinite parvam generaret, quæ velocitas infinite parva durante tempore infinite parvo, spatium infinite parvum secundi ordinis describere faceret: ergo siquidem vis motrix puncti B hujus vis respectu est infinite parva, tempore infinite parvo spatium infinite parvum duntaxat tertii ordinis describere faceret; nullus ergo motus in puncto B generabitur nisi spatium descriptum A a sit finita quantitas, nulla ergo erit compressio inter puncta B et C. Q. e. d.

5. *Corol. 1.* Nullus ergo motus ex puncto medii elastici in punctum proximum transfertur nisi post tempus finitum, nam spatium finitum A a, nonnisi tempore finito percurri potest per velocitatem finitam.

6. *Corol. 2.* Et velocitas finita in puncto elastico excitata non mutabitur nisi post tempus finitum et postquam quantitate finita processerit. Sint enim medii particulæ Z, A, B, procedat punctum A velocitate finita utcumque in id punctum producta, et tempore infinite parvo describat spatium infinite parvum A a, vis quæ sistetur ea velocitas orietur ex differentia virium elasticarum puncti Z et puncti B, estque  vis puncti B ad vim puncti Z ut A B + A a ad A B — A a, et dividendo vis sistens punctum A ad vim puncti Z, ut 2 A a ad A B — A a, sed A a est infinite parvum respectu quantitatis A B — A a, ergo, vis sistens punctum A est infinite parva, respectu vis puncti Z, quæ est vis elaterii naturalis, ideò (eodem modo ac in Theorematis demonstratum fuit) probabitur, vim illam tempore infinite parvo spatium infinite parvum tertii ordinis producturam: quare etiamsi singula puncta a parte B posita æquali vi agerent eorumque numerus infinitus foret, vires illæ omnes non nisi spatium infinite parvum secundi ordinis infinite parvo tempore ex spatio A a eodem tempore descripto detraherent, maneret itaque idem, velocitas ergo puncti A non mutabitur ex actione omnium punctorum medii elastici, nisi post tempus finitum et postquam finita quantitate processerit.

7. *Corol. 3.* Si considerentur innumera puncta elastica ordine in lineâ rectâ posita, nec attendatur ad alia quæ circumquaque solidum spatium constituent, si unum velocitate finita quâcumque ex causâ urgeatur, quæ constans in eo maneat,

quoddam tempus finitum requiretur ut eadem velocitas in proximo puncto excitetur, paulo longius tempus ut in tertio producat, sicque deinceps, nam per Cor. 1. nullus motus ex puncto medii elastici in punctum proximum transfertur nisi elapso finito tempore, velocitas ergo primi puncti ad secundum non transit nisi post finitum tempus ab initio motus primi puncti et velocitas secundi puncti ad tertium non transit nisi post finitum tempus ab initio motus secundi ejus

$\dot{A} \quad \dot{B} \quad \dot{C} \quad \dot{D} \quad \dot{E}, \&c.$

puncti. Breviori autem tempore excitari debet data velocitas in secundo puncto per actionem continuatam ab initio motus primi puncti, quam in tertio per actionem continuatam ab initio motus puncti secundi: cum enim velocitas primi puncti sit finita et æqualis, compressio exinde orta ab initio ejus motus est major quam compressio quæ per motum secundi puncti ab initio ejus motus acquiritur, siquidem ad celeritatem primi puncti nonnisi per gradus pervenit, ergo vis motrix quæ urget secundum punctum ab initio, fortior est quam ea qua urgetur tertium punctum ab initio, ergo tertium punctum datam illam celeritatem tardius acquirit, et pari ratione, cum vis motrix secundi puncti sub initio fortior sit quam vis motrix tertii, compressio inter secundum et tertium punctum major erit sub initio quam inter tertium et quartum; unde vis motrix quæ urget tertium punctum sub initio, fortior est quam ea quæ urgetur quartum punctum; ergo cum punctum sequens aliqualem velocitatem suscipere non possit nisi postquam punctum præcedens spatium finitum descripserit, et longiori tempore ab initio motus suscepti datam velocitatem possit suscipere, liquet quod ea data velocitas nonnisi successivè ad successiva medii elastici puncta pertingit.

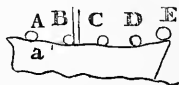
8. *Schol.* Hinc patet discrimen inter motum in medio elastico excitatum et motum qui excitatur in medio non elastico cujus partes contiguæ sunt, in tali enim medio, pressio cuidam particulæ applicata ad omnes partes in directum positas, aut divaricantes, puncto temporis extendi debet; motus vero instanti in circulum propagari debet; at in medio elastico, pressio ab uno puncto ad alterum non continuatur nisi per accessum punctorum medii, sive per realem motum, qui antrorsum propagetur, et post tempus finitum a puncto primum moto ad reliquas partes fluidi successivè perveniat.

PROBLEMA.

9. Si punctum medii elastici finitâ velocitate moveatur quæ constans maneat, definire motum punctorum sequentium in lineâ recta positorum, omissis aliis sphaericè circumquaque positus.

Primus Casus. Sint ordine puncta A, B, C, D, &c. fingatur ea omnia ad æquales distantias in navi posita, et punctum B ita adhærere malo ut ex ejus motu, navis motum suscipiat et reliqua puncta vehat; recipiat verò punctum A veloci-

tatem finitam quæ constans maneat relatè ad navis punctum in quo versabatur, et ponatur primo eam versus B tendere; ex accessu puncti A versus B vis repulsiva particulæ A fortior fiet vi repulsivâ particulæ C, quare ex differentia virium nasceretur vix motrix particulæ B; procedat enim A ad B quantitate A a, erit vis particulæ C in B, ad vim particulæ A in B, ut a B ad B C sive A B (quia particularum intervalla A B, B C initio erant æqualia) et dividendo, vis particulæ C, ad differentiam virium quæ est vis motrix puncti B ut a B ad A B — a B sive A a, sed vis particulæ C est vis ipsa elaterii in statu naturali, ex hypoth. Ergo vis elaterii est ad vim moventem punctum B, ut a B ad A a. Representet itaque I H tempus quo distantia A B punctorum elasticorum per velocitatem datam puncti A percurritur, dicaturque



illud tempus a, ducatur deorsum ad angulos rectos linea H G quæ vim elasticam singulæ particulæ medii in statu naturali designet, ductaque F G parallela I H, asymptotis F G et G H et dignitate æquali a X H G describatur hyperbolæ, transibit per punctum I, (siquidem $I F = H G$ et $F G = I H = a$, ideòque $I F \times F G = H G \times a$) et si I P repræsentet tempus quo durante A motum est, dicaturque x, dico quod P M repræsentabit vim motricem puncti B eo temporis momento. Erit enim ex naturâ hyperbolæ, $G R : G F = F I (H G) : R M$ et dividendo G R (H P) : F R (I P) = H G : P M; spatia verò uniformiter descripta sunt ut tempora; ergo A B : A a = I H : I P et dividendo a B : A a = H P : I P, sed a B ad A a ut vis elaterii ad vim motricem puncti B; ergo H P : I P = H G : P M = vis elaterii ad vim motricem puncti B, sed H G repræsentat vim elaterii, ergo P M ubique repræsentat vim motricem puncti B.

Repræsentabit ergo etiam linea P M velocitatem momento P genitam, et area I P M totam velocitatem a puncto B acquisitam tempore I P sive tempore quo percurritur A a puncto A.

Describatur verò ex puncto F logarithmica cujus axis sit linea H G producta, subtangens linea quævis G X quæ dicatur s, ductaque ex puncto P lineâ P T S dico quod linea T S repræsentabit velocitatem tempore I P acquisitam et area F T S spatium a puncto B descriptum.

Est enim (per nat. logarith.) area I F R M, ad rect. I F G H ut R S ad G X, et rect. I F G H ad rect. I F R P ut F G ad F R ut G X ad R T, ideòque ex æquo area I F R M ad rect. I F R P ut R S ad R T, et dividendo, est I P M ad I F R P ut T S ad R T; ergo area I P M est ad T S in ratione datâ, ob datum P R et rationem F R ad R T datam, ut pote

$$m \times \left\{ \begin{array}{l} m^2 a^2 - m^2 a x + * + * + \frac{m A x^4}{5} + \frac{m B x^5}{4} + \frac{C - O}{5} m x^6, \&c. \\ \frac{O m a x^5}{5} + \frac{P m a x^6}{6} \\ - \frac{A^2 x^6}{3 \times 3} \end{array} \right\}$$

Quod ducatur in fluxionem T V =

$$d x \times (2 A x + 3 B x^2 + 4 C x^3 + 5 D x^4 + 6 E x^5 + 7 F x^6) \text{ factum erit}$$

$$m \times d x \times \left\{ \begin{array}{l} 2 m^2 a^2 A x - 2 m^2 a A x^2 - 3 m^2 a B x^3 + 4 m^2 a C x^4 + \frac{2 m A^2 x^5}{3} + \frac{18 m B A x^6}{5 \times 4} \\ + 5 m^2 a^2 B x^2 + 4 m^2 a^2 C x^3 + 5 m^2 a^2 D x^4 - 5 m^2 a D x^5 + \frac{2 m a A O x^6}{5}, \&c. \\ + 6 m^2 a^2 E x^5 - 6 m^2 a E x^6 \\ + 7 m^2 a^2 F x^6 \end{array} \right\}$$

termini omnes hujus seriei dividantur per s m, et conferantur cum correspondentibus terminis seriei quam exhibet factum extremorum primæ proportionis et habebitur $m = \frac{2 m^2 a^2 A}{s}$, ideóque $A =$

$$\frac{s}{2 a^2}, \text{ tum } \frac{-2 m a A}{s} + \frac{3 m a^2 B}{s} = 0, \text{ ideóque } B = \frac{s}{3 a^3}, 3^o. - \frac{2 A}{5} = - \frac{3 m a B}{s} + \frac{4 m a^2 C}{s}, \text{ unde invenitur } C = \frac{s}{4 a^4} - \frac{s}{3 \times 4 m a^4}, 4^o. - \frac{2 B}{4} = - \frac{4 m a C}{s} + \frac{5 m a^2 D}{s}$$

$$\text{est ergo } D = \frac{s}{5 a^5} - \frac{6 s^2}{3 \times 4 \times 5 m a^5}; 5^o. \frac{O - 2 C}{5} = + \frac{2 m A^2}{5 s} - \frac{5 m a D}{s} + \frac{6 m a^2 E}{s}$$

$$\text{est ergo } E = \frac{s}{6 a^6} - \frac{3 \times 4 \times 5 \times 6 m a^6}{252 s^2} + \frac{2 s^3}{24 s^3} + \frac{s O}{5 \times 6 \times m a^2} \text{ et}$$

$$\text{denique invenitur } F = \frac{s}{7 a^7} - \frac{3.4.5.6.7 m a^7}{504 s^2} + \frac{3.4.5.6.7 m^2 a^7}{24 s^3} + \frac{s O}{6.7 m a^2}$$

In alterâ proportionē resumatur factum $(A B - B b + C c) \times A$ a quod est

$$m \times m(a + * + * - \frac{A x^3}{3} - \frac{B x^4}{4} - \frac{C - O}{5} x^5 - \frac{D - P}{6} x^6) \text{ ducatur in } A B - C c \text{ quod est}$$

$$m a + * + * + * + * - \frac{O x^5}{5} - \frac{P x^6}{6}, \&c. \text{ fit}$$

$$m \times \left(m^2 a^2 + * + * - \frac{m a A x^3}{3} - \frac{m a B x^4}{4} - \frac{m a C x^5}{5} - \frac{m a D x^6}{6}, \&c. \right) \text{ Multiplicetur}$$

$$\text{per fluxionem T X quæ est } d x \times (4 O x^3 + 5 P x^4 + 6 Q x^5 + 7 R x^6, \&c.)$$

$$\text{habetur } m \times d x \times \left\{ \begin{array}{l} 4 m^2 a^2 O x^3 + 5 m^2 a^2 P x^4 + 6 m^2 a^2 Q x^5 + 7 m^2 a^2 R x^6 + 8 m^2 a^2 S x^7 \\ - 4 m a A O x^6 - 4 m a B O x^7 \\ - \frac{5 m a A O x^7}{3} \end{array} \right\}$$

termini omnes hujus seriei dividantur per s m et conferantur cum terminis correspondentibus seriei quam exhibet factum extremorum secundæ proportionis, et habebitur $\frac{A}{s} = \frac{4 m a^2 O}{5}$ ideóque

$$O = \frac{s^2}{2 \times 3 \times 4 m a^4}; 2^o. \frac{B}{4} = \frac{5 m a^2 P}{s} \text{ hinc } P = \frac{s^1}{3 \times 4 \times 5 m a^5}; 3^o. \frac{C}{5} - \frac{2 O}{5} =$$

$$\frac{6 m a^2 Q}{s}, \text{ hinc } Q = \frac{s^2}{4 \times 5 \times 6 m a^6} - \frac{2 s^3}{3 \times 4 \times 5 \times 6 m^2 a^6}, \&c. \text{ unde tandem obtinentur}$$

hæ series, quibus velocitates et spatia descripta exprimuntur: exprimunt ergo velocitas puncti B,

$$\text{per T V} = \frac{s x^2}{2 a^2} + \frac{s x^3}{3 a^3} + \frac{s x^4}{4 a^4} + \frac{s x^5}{5 a^5} + \frac{s x^6}{6 a^6} + \frac{s x^7}{7 a^7}, \&c.$$

$$- \frac{2 s^2 x^4}{2.5 \times 4 m a^4} - \frac{6 s^2 x^5}{5 \times 4 \times 5 m a^5} - \frac{46 s^2 x^6}{3 \times 4 \times 5 \times 6 m a^6} - \frac{390 s^2 x^7}{3.4.5.6.7 m a^7}, \&c.$$

$$+ \frac{5 s^3 x^6}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 m^2 a^6} + \frac{50 s^3 x^7}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 m^2 a^7}, \&c.$$

$$\text{area F T V} = \frac{s x^2}{2 \times 3 a^2} + \frac{s x^4}{5 \times 4 a^3} + \frac{s x^5}{4 \times 5 a^4} + \frac{s x^6}{5 \times 6 a^5} + \frac{s x^7}{6 \times 7 a^6} + \frac{s x^8}{7 \times 8 a^7}, \&c.$$

$$- \frac{s^2 x^5}{3 \times 4 \times 5 m a^4} - \frac{s^2 x^6}{3 \times 4 \times 5 \times 6 m a^5} - \frac{s^2 x^7}{5 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 m a^6} - \frac{390 s^2 x^8}{3.4.5.6.7.8 m a^7}$$

$$+ \frac{5 s^3 x^7}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 m^2 a^6} + \frac{2.3.4.5.6.7.8 m^2 a^7}{50 s^3 x^8}$$

velocitas puncti C exprimitur per $TX = \frac{s^2 x^4}{2 \times 3 \times 4 m a^4} + \frac{s^2 x^5}{3 \times 4 \times 5 m a^5} + \frac{s^2 x^6}{4 \times 5 \times 6 m a^6} + \dots$ &c.

area denique $FTX = \frac{s^2 x^5}{2 \times 3 \times 4 \times 5 m a^4} + \frac{s^2 x^6}{3 \times 4 \times 5 \times 6 m a^5} + \frac{s^2 x^7}{4 \times 5 \times 6 \times 7 m a^6} + \dots$ &c.

Punctorum sequentium motus determinari possent simili ratione; etenim vires motrices punctorum B, C, D, E, &c. sunt ut A a — 2 B b, B b — 2 C c, C c — 2 D d, D d — 2 E e, &c. Vis enim cujusvis puncti ut C est ad vim puncti E ut d e ad c d sive ut A B +

A a B b C c D d E e

E e — D d ad A B + D d — C c et dividendo vis motrix puncti D ad vim puncti E ut C c — 2 D d + E e ad c d; vis puncti E est ad vim elasticam naturalem ut A B ad e d, ergo vis motrix puncti D ad vim elasticam naturalem ut C c — 2 D d + E e } ad $\begin{cases} c d \\ e d \end{cases}$ sive ut C c — 2 D d

+ E e ad $\frac{c d \times d e}{A B}$, ergo alternando est vis motrix puncti D ad C c — 2 D d + E e ut vis

elastica naturalis ad $\frac{c d \times d e}{A B}$, ideòque in paulò majori ratione, quàm vis elastica ad A B quia tam c d quàm d e paulò minores sunt quàm A B, sed vis motrix puncti D est ad C c — 2 D d in majori ratione quam eadem vis motrix ad C c — 2 D d + E e, ergo vis motrix puncti D est semper ad C c — 2 D d in majori ratione quam vis elastica ad A B, cùmque id verum sit in omnibus punctis et hæc ultima ratio sit constans, ratio vis motricis puncti cujusvis ad spatium a præcedenti puncto descriptum dempto duplo spatii ab ipso hoc puncto descripti, erit semper major ratione constante, non tamen multo, ideò physicè pro constante assumi potest, hinc alternando vires illæ motrices, punctorum successivorum, sunt in ratione indicatâ.

Sed calculum pro illis punctis instituire necesse non est, per analogiam enim ex motu duorum priorum punctorum B et C reliquorum motum statuere, sufficiens videtur.

10. Si, missis cæteris casibus, quærat intervallo temporis quo velocitas data m, in punctis successivis B, C, generetur, ut et ratio spatiorum A a, B b, C c eo tempore descriptorum; fiat $TV = m$, et utroque ducto in $\frac{a^2}{s}$, erit $\frac{a^2 TV}{s} = \frac{a^2 m}{s}$, dicatur $\frac{a^2 m}{s} = z^2$ et in serie $\frac{a^2 TV}{s}$, ponatur ubique $\frac{m}{z^2}$ loco $\frac{s}{a^2}$, hæc series in hanc

formam migrabit $z^2 = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3a} + \frac{x^4}{4a^2} + \frac{x^5}{5a^3} + \frac{x^6}{6a^4} + \dots$ &c.
 $-\frac{2x^4}{2.3.4z^2} - \frac{6x^5}{3.4.5az^2} - \frac{46x^6}{3.4.5.6a^2z^2} + \dots$ &c.

Juxta analyseos Newtonianæ methodum sumantur omnes termini in quibus differentiæ exponentium x et z minimum efficiunt valorem, fiantque æquales z^2 reliqui termini seriei $\frac{a^2 TV}{s}$ negligi possunt, quia per dignitates quantitatis $\frac{x}{a}$ respectu eorum qui assumpti fuerunt multiplicantur; (in hypothesi quæ velocitatem m aliquis momenti assumeret hi termini negligendi non forent, sed in casu præsentis velocitatem m minimam supponere nobis licet cùm de tali tantum in futurum simus acturi) erit ergo $z^2 = \frac{x^2}{2} - \frac{2x^4}{2.3.4z^2} + \frac{5x^6}{2.3.4.5.6z^4} - \frac{14x^8}{2.3.4.5.6.7.8z^6} + \frac{5x^{10}}{2.3.4.5.6.7.8.9.10z^8} - \frac{122x^{12}}{2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12z^{10}} + \dots$ &c. (qui termini continuatâ serie TV inveniuntur) et æquatione per approximationem soluta invenietur $x^2 = 3.57z^2 = \frac{3.57a^2m}{s}$.

Jam verò in aréâ FTV quæ spatium B b exprimit, loco $\frac{s}{a^2}$ ponatur ut prius $\frac{m}{z^2}$ et assumantur termini in quibus differentia exponentium quantitatum x et z minima evadit, ii sunt $\frac{2mx^5}{2.3.4.5z^4} + \frac{5mx^7}{2.3.4.5.6.7z^6} - \frac{14x^8}{2.3.4.5.6.7.8z^8}$ in quibus si valor $x^2 = \frac{3.57z^2}{2}$ substituitur, fiet hæc series $m \times \frac{3.57}{2} - \frac{2 \times 3.57 \times 3.57}{2.3.4.5} + \frac{5 \times 3.57 \times 3.57 \times 3.57}{2.3.4.5.6.7} - \frac{14 \times 3.57 \times 3.57 \times 3.57 \times 3.57}{2.3.4.5.6.7.8.9}$, &c. sive

B b = $m \times .428$.
 Eodem modo valor C c invenietur ex hac serie $\frac{m \times 5}{2 \times 3.4.5z^4} - \frac{3 \times 4.5.6.7z^6}{2.3.4.5.6.7z^6}$ sive substituto valore x^2 , erit C c = $m \times \frac{3.57 \times 3.57}{2.3.4.5} - \frac{2 \times 3.57 \times 3.57}{3.4.5.6.7} + \dots$ &c.)

sive $Cc = m \times .07$ sive circiter sexta pars intervalli a puncto B descripti eodem tempore quo acquirit celeritatem m.

Et celeritas a puncto C tunc temporis acquisita erit iisdem substitutionibus factis $m \times (\frac{3.57 \times 3.57}{2.3.4.} - \frac{2 \times 3.57 \times 3.57 \times 3.57}{3.4.5.6.}, \&c.)$
 $= m \times .279, \&c.$ circiter $\frac{1}{4}$ celeritatis m.

11. Quod si eventus quærat in hypothesi velocitatem m non esse quamminimam; supponatur illa æqualis ipsi s; si quærat spatium descriptum a puncto B, dum ejus velocitas fit m, fiat series T V = m, et utroque ducto in x, erit x T V = m x, ergo collatâ serie x T V, et F T V habebitur ratio spatorum percursorum

A a et B b, sed illæ series posito $\frac{s}{m} = 1.$ sunt

$$xTV = \frac{s x^3}{2 a^2} + \frac{s x^4}{3 a^3} + \frac{s x^5}{6 a^4} + \frac{s x^6}{10 a^5} + \frac{s x^7}{30 a^6} \&c.$$

$$\text{et } FTV = \frac{s x^3}{6 a^2} + \frac{s x^4}{12 a^3} + \frac{s x^5}{30 a^4} + \frac{s x^6}{60 a^5} + \frac{11 s x^7}{2160 a^6} \&c.$$

Ubi liquet quod primus terminus primæ seriei sit triplus primi termini secundæ, reliqui verò termini primæ seriei reliquorum terminorum secundæ seriei plusquam tripli, unde liquet quod A a est magis quam triplum spatii per punctum B descripti usque dum celeritatem m recipiat; ex quo consequitur, quod siquidem B eo momento non est in medio inter puncta A et C, sed vicinius puncto A ad minimum sextâ parte spatii a puncto A descripti ab eo ulterius urgetur et acceleratur, celeritatemque majorem quam m recipit donec ad medium inter A et C perveniat, ibique cum celeritate majore quàm A feratur, versus C magis accedet, sicque vim repulsivam puncti C sentiet, dumque ultra medium inter A et C promovebitur sensim tardabitur, tandem destructo ejus excessu celeritatis supra celeritatem m, cum sit vicinius puncto C quam puncto A diminuetur ulterius ejus celeritas m, ideòque puncto A vicinius gradatim fiet, in medio inter A et C iterum occurret, sed cum velocitate diminutâ, quare perget vicinius fieri puncto A, sicque ab ipso velocitatis incrementum de novo accipiet, sicque perpetuò oscillabitur punctum B circa medium inter punctum A et punctum C ad morem fibræ sonantis; eaque ratione fit ut particulæ aëris magnâ velocitate pulsæ sonum edant sponte, ut in tonitru, pulvere fulminante, flagellis, tapetibus aut lodicibus fortiter excussis, &c.

Sed ubi m minima fit, punctum B eam celeritatem m acquisivit eo tempore quo parum abest a medio inter puncta A et C, (per hujus n. 10.) una circiter vicesima spatii a puncto A descripti, ideòque agitationes supra dictas exiguas suscipit quas pro nullis habere physicis licere debet, quamvis mathematicè non omninò nullæ sint.

12. Supposito ut prius velocitatem datam m esse minimam, ut obtineatur intervallum temporis quo punctum C celeritatem eam datam m ac-

quiret sumpto ut prius $z^2 = \frac{a^2 m}{s}$ fiat T X

$$= m \text{ et } \frac{a^4 m^2}{s^2} F X = m z^4 \text{ et ponatur ubique}$$

in serie T X, $\frac{m}{z^2}$ pro $\frac{s}{a^2}$ fiet $m z^4 = \frac{m x^4}{2.3.4.} + \frac{m x^5}{3.4.5.}, \&c.$ sive sumptis terminis in quibus expo-

nentes quantitatum x et z differentiam minimam

$$\text{habent, erit } m z^4 = \frac{m x^4}{2.3.4.} - \frac{4 m x^6}{2.3.4.5.6.z^2}$$

$$+ \frac{13 m x^8}{2.3.4.5.6.7.8.z^4} - \frac{40 m x^{10}}{2.3.4.5.6.7.8.9.10.z^6}$$

&c. et æquatione per approximationem solutâ, invenitur $x^2 = 9 \frac{2}{5} z^2$. Et seriem F T X ulterius continuando et calculum instituendo ut pro serie F T V factum est, invenitur quod via a puncto A emensa, dum punctum C velocitatem m acquirit, est ad viam quam ipsum punctum C emititur, ut 100 ad 32 sive fere ut 3 ad 1. Quod quidem paulo majus est vero, quia ommissa est consideratio motus puncti D, quod cum discedat a puncto C efficit ut vis B in ipsum C sit fortior, breviorque tempore motum m ipsi impertiat.

13. Hinc, cum tempus quo punctum B celeritatem datam m acquisivit sit $z \sqrt{3.57}$ et tempus quo punctum C eam celeritatem acquisivit sit $z \sqrt{9 \frac{2}{5}}$, illa tempora sunt ut $\sqrt{3.57}$ ad $\sqrt{9 \frac{2}{5}}$ sive ut 19 ad 50 fere 2 ad 3; cum ergo punctum A uniformiter moveatur, spatium quod punctum A describit dum C acquirit velocitatem m, est ad spatium quod idem punctum A descriperat dum B eamdem velocitatem m acquisiverat, sicut 3 ad 2; spatium verò quod C descripsit dum eam celeritatem acquisivit, est proximè tertia pars spatii eodem tempore ab A descripti, et spatium quod B describit dum eamdem celeritatem m acquirit est fere dimidia pars spatii eo tempore ab A descripti, ergo illa spatia a punctis C et B descripta, donec velocitatem m singula acquirant sunt æqualia.

14. Ex analogiâ verò deducetur quòd spatium quod punctum quartum D describit, dum velocitatem m attingit, erit quarta pars spatii ab A descripti, siquidem spatium a secundo puncto descriptum est dimidia pars spatii ab A descripti, spatium a tertio puncto descriptum tertia pars spatii descripti ab A, &c. Imo eum ordinem accuratius observari in punctis remotioribus statuere licet quod punctum C tertiam partem spatii ab A descripti dum velocitatem m acquirit, accuratius describat quàm B dimidiam partem spatii ab A descripti dum velocitatem m suscipit. Calculum tentare potest qui hac analogiâ rem sufficienter demonstrari non censebit, et B. L. ignoscere rogamus quod talem laborem subire piguerit.

Ex eadem analogiâ (Art. 13) deducetur, spatia quæ percurrunt successiva puncta D, E, dum velocitatem m acquirunt, æqualia esse iis quæ puncta singula B et C descriperunt.

15. Quibus admissis sequitur diminutionem

intervalli inter particulas medii, cum motu communi cum puncto A feruntur, esse ubicumque eamdem, et æqualem dimidio spatio ab A descripto dum B celeritatem m acquirit.

Nam cum A bis id dimidium spatium descriperit et B semel dum B communem cum A motum suscipit, contrahitur spatium inter A et B dimidio illo spatio; A processit ter illo dimidio spatio et C semel dum C communem cum B et A motum suscipit, ergo intervallum inter A et C duplo ejus dimidii spatii diminutum est, sed inter A et C duo sunt particularum intervalla A et B, B et C, et primum intervallum est contractum dimidio illo spatio, ergo intervallum inter B et C eodem dimidio intervallo diminutum esse debet, sique de cæteris.

16. Ideò si quolibet tempore elapso sumatur via tota puncti A, ea via æqualis erit summæ diminutionum intervallorum inter omnes particulas ad quas celeritas m communicata fuit; cum ergo motus puncti A sit uniformis, uniformiter etiam crescit numerus particularum ad quas celeritas m communicatur; et numerus earum particularum æqualis erit viæ a puncto A percursæ divisæ per diminutionis intervalli unius quantitatem.

17. Manente autem fluido eodem, sed mutatâ celeritate puncti A, tempora quibus puncta successiva medii celeritatem ejus puncti A suscipiunt eadem tamen manent: nam si in formula

$$x^2 = \frac{3.57 a^2 m}{s} \text{ quâ determinatur quadratum}$$

temporis quo punctum B recipit celeritatem puncti A substituantur loco m et s quantitates ipsi æquipollentes, formula hæc fiet quantitas constans (manente elaterio medii et intervallo particularum) quæcumque sit velocitas puncti A; etenim dicatur f vis elastica medii, quoniam, ex hypothesi Problematis hujusce, uniformiter agere censetur tempore quod exprimitur per a ut celeritatem s generet, erit $s = a f$; præterea quoniam particularum intervallum BA

$$= \frac{3.57 a^2 m}{s} = \frac{3.57 a^2}{a f} = \frac{3.57 a}{f} \text{ quæ quantitas,}$$

constantes tantum continet à celeritate m independentes; hinc, tempus quo punctum B celeritatem puncti A recipit idem est quæcumque sit velocitas puncti A; idem demonstrabitur de tempore quo punctum C eam celeritatem recipit, nam habet (not. 13.) rationem constantem ad tempus quo punctum B eam celeritatem acquirit, est nempe ad id tempus ut 3 ad 2, et sic de cæteris punctis. Q. e. d.

18. Diminutiones intervallorum inter partes medii elastici (manente eodem fluido) sunt ut celeritas puncti A; nam spatium A a percursum a puncto A tempore quo certa quædam particula medii elastici celeritatem n recipit est semper m x, (x designante tempus quo illa particula medii celeritatem m suscipit) sed illud tempus est constans (n. 17. hujusce) quæcumque sit celeritas puncti A, ergo spatium A a est semper ut velocitas m; sed illud spatium A a est summa

diminutionum intervallorum inter partes ad quas celeritas m pervenit (n. 16.), singulæ autem diminutiones sunt æquales (n. 15.) ergo singulæ diminutiones sunt ut illud spatium A a, sive ut velocitates.

19. Et vice versâ, numerus partium compressarum quæ dato tempore celeritatem puncti A receperunt est semper idem quæcumque sit puncti A velocitas; nam ille numerus est ut spatium A a divisum per unius partis diminutionem, spatium A a dato tempore est ut celeritas puncti A, diminutio unius partis est etiam ut ea celeritas; ergo numerus partium quæ dato tempore celeritatem puncti A receperunt, est ut celeritas per celeritatem divisâ, hoc est, in ratione constanti; unde, in diversis temporibus numerus particularum ad quas celeritas m pervenerit, erit directè ut tempus.

20. Quod si particulæ datâ celeritate jam sint dimotæ, et certum gradum compressionis suscepint, postea verò nova velocitas addatur (vel detrahatur) puncto A, novus ille celeritatis gradus eodem tempore ab unâ particulâ ad aliam propagabitur quo prima celeritas propagata fuit, (in hypothesi quod tam velocitas m quàm hæc nova velocitas additiâ exiguæ sunt) idque hoc modo demonstrari potest.

Fingatur omnes particulas primâ celeritate motas et compressas in navi positas esse quæ ipsâ particularum earum celeritate feratur, ita ut illæ particulæ in eâ nave respectivè quiescant, urgeatur verò prima pars per excessum novæ celeritatis super primam, communicatio istius excessus celeritatis ad omnes partes in nave positas ut et nova compressio particularum determinabitur ut in præcedenti Problemate, mutatis celeritate, intervallo particularum medii, et ejus elasticitate; si ergo prima celeritas fuerit ut prius m; a tempus quo intervallum particularum A B eâ celeritate percurreretur, ideòque sit A B = m a, sit ut prius s velocitas genita tempore a per vim elasticam medii in statu naturali considerati et uniformiter agentis, inventum est quod tempus quo punctum B celeritatem m acquisiverat erat a $\sqrt{\frac{3.57 m}{s}}$ (n. 10.) quod spatium A a interea

a puncto A descriptum erat m a $\sqrt{\frac{3.57 m}{s}}$ et spatium B b erat .428 m a $\sqrt{\frac{3.57 m}{s}}$, ita ut compressio particularum sit A a — B b = .572 \times m a $\sqrt{\frac{3.57 m}{s}}$, ideòque novum intervallum inter particulas in nave positas erit m a \times (1 — .572 \times $\sqrt{\frac{3.57 m}{s}}$); est autem vis elastica prior ad vim elasticam novam inversè ut partium intervalla, sive ut m a \times (1 — .572 $\sqrt{\frac{3.57 m}{s}}$) ad m a, sive ut 1 — .572 $\sqrt{\frac{3.57 m}{s}}$ ad 1. Et, si excessus novæ velocitatis super priorem dicatur n, tempus quo novum intervallum inter particulas describeretur per hanc celeritatem n, erit

$\frac{a}{n} \times (1 - .572 \sqrt{\frac{3.57 m}{s}})$, nam tempus a , quo prius intervallum m a describebatur velocitate m debet esse ad istud tempus directè ut intervalla m a et m a $\times (1 - .572 \sqrt{\frac{3.57 m}{s}})$ et inversè ut velocitates m et n . Denique, subtangens logarithmicæ quæ designabatur per s in casu priore, est in isto $\frac{m s}{n}$, cùm enim designet velocitatem uniformiter genitam ab elaterio, tempore quo intervallum particularum describitur, est directè ut vis elastica et ut tempus, habetur ergo hæc proportio, est

$$1 - .572 \sqrt{\frac{3.57 m}{s}} \left\{ \begin{array}{l} \text{ad} \\ a \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ \frac{a m}{a} \cdot (1 - .572 \sqrt{\frac{3.57 m}{s}}) \end{array} \right\}$$

ut s ad $\frac{m s}{n}$.

In seriebus ergo supra inventis loco m ponatur n ; loco a ponatur $\frac{a m}{n} \times (1 - .572 \sqrt{\frac{3.57 m}{s}})$;

loco s ponatur $\frac{m s}{n}$, et tempus quo punctum B celeritatem n acquirit, invenietur (substituendo hos valores in formula $a \sqrt{\frac{3.57 m}{s}}$)

$$\frac{a m}{n} \times (1 - .572 \sqrt{\frac{3.57 m}{s}}) \times \sqrt{\frac{3.57 n}{\frac{m s}{n}}} = \frac{a m}{n} \times (1 - .572 \sqrt{\frac{3.57 m}{s}}) \times \sqrt{\frac{3.57 n n m}{m s}} = a \times (1 - .572 \sqrt{\frac{3.57 m}{s}}) \times \sqrt{\frac{3.57 m}{s}}.$$

Ideoque tempus $a \sqrt{\frac{3.57 m}{s}}$ quo in præcedenti casu punctum B acquirerebatur celeritatem m , est ad tempus quo in hoc casu acquirit celeritatem n , ut 1 ad $1 - .572 \sqrt{\frac{3.57 m}{s}}$, sed hæc ratio, existente m quantitate minimâ ut suppositio fert, est fere æqualitatis. Quare nova celeritas, sive excessus novæ celeritatis supra præcedentem, propagabitur ad punctum proximum medii elastici eodem temporis intervallo quo præcedens celeritatis gradus in eo puncto genitus fuerat, ideoque etiam ad puncta successiva iisdem temporibus perveniet.

21. Si per datum aliquod tempus primum punctum A medii elastici constanti celeritate m fuerit motum, postea urgeatur majori celeritate $m + n$ durante æquali tempore, omnes particulæ quæ primam celeritatem m susceperant, altero isto tempore celeritatem novam $m + n$ suscipient, et interea totidem particulæ posteriores priorem celeritatem m accipient; nam incrementum celeritatis n ad eas omnes particulas a primâ propagari potest dato tempore, ad quas eo ipso tempore celeritas m propagata fuerat (hujusce 20). Interea verò uniformiter propagata fuisset velocitas pristina m ab ultimis particulis quæ

eam susceperant ad totidem ultiores. Si itaque successive post æqualia tempora velocitas crescat, totidem formabuntur portiones medii elastici, æquali numero partium constantes, quæ successivas illas celeritates habebunt, portio proxima puncto A ultimam celeritatem habebit, secunda penultimam, et sic deinceps.

22. Hinc, si medium elasticum urgeatur per successivos velocitatis gradus, imprimi potest ejus partibus velocitas satis magna ut sensibilibiter in aures agat nec tamen excitetur in medii elastici partibus sensibilis ea vibratio quæ juxta n . 11. nasceretur si simul et semel tota illa velocitas ipsi imprimeretur; et hinc intelligitur differentia inter ærem sonum generantem, ærem sonum propagantem, et ærem ventum deferentem; si magna velocitas particulæ æræe imprimatur, particula ipsi proxima tremores suscipit, fitque punctum sonorum; si velocitas minor excitetur quæ constans maneat nec per gradus augeatur ær uniformiter transfertur et fit ventus; sed si ab exigua velocitate ad magnam assurgatur, æris particulæ successivos illos gradus recipiunt, et quia singula velocitas accepta est exigua tremores sensibiles non excitantur in particulis æreïs, quæ velocitatem illam magnam suscipientes et ad aurem deferentes sensationem soni producant.

23. Si autem velocitas nova minor sit velocitate præcedente, eodem modo constabit quod decrementum illud velocitatis eodem tempore ad proximum punctum transibit quo præcedens velocitatis gradus ab eo acquisitus fuerat, et ad successiva puncta iisdem etiam temporibus perveniet quibus priorem celeritatem acquisiverant, imo solutio per constructionem Problematis ipsius producta logarithmicâ ultra punctum F quæri potest, eademque obtinebuntur ac prius.

24. Quibus positis intelligitur effectus vibrationis fibræ flexæ et redeuntis in ærem. *Primus Casus.* Dividatur tempus ejus reditus in partes æquales quam minimas, et durante singulâ temporis parte, fibræ velocitas uniformis manere censeatur. Prima velocitas, ad certum numerum partium dato eo tempore communicabitur qui partium numerus dicatur N ; altero instanti secunda velocitas eidem partium numero N communicabitur dum prima velocitas ad totidem particulas ultiores N perveniet, tertio instanti primus partium numerus N tertiam velocitatem habebit, ulterior numerus N secundam velocitatem, numerus N adhuc ultior primam; hinc ergo si fibra dimidiâ vibrationem absolverit, hoc est ultra statum suum naturalem discesserit quantum potest, erunt in ære totidem successive portiones, quæ particulis numero N continebunt, quot successive velocitates erunt genitæ, et particulæ remotissimæ a fibrâ primum celeritatis gradum habebunt, proximæ fibræ ultimum, mediæ verò medium, qui maximus est; diminutiones intervallorum correspondebunt illis celeritatum gradibus, ut sint minimæ tam in particulis a fibrâ remotissimis, quam in particulis ipsi proximis, maximæ in mediis.

Regrediente fibrâ, eadem omnino lex observabitur, nisi quod partes æris fibræ proximæ retrò movebuntur et compressiones in dilatationes

mutabuntur, dum in portiones ultiores medii celeritates primo receptæ propagantur, ideòque tota vibratione absolutâ numerus particularum agitarum duplus erit ejus quem in dimidia vibratione notaveramus, pars dimidia remotior est planè aequalis illi de quâ primo actum est et similiter constituta, pars citerior verò negativam celeritatem obtinebit et dilatationem; ejus citerioris partis portio remotissima a fibrâ primum celeritatis fibræ regredientis gradum habebit, et portio fibræ proxima ultimum (quietem nempe), media portio medium, hoc est retrocedet eâ ipsâ celeritate quâ medium ulterioris partis procedit et dilatationes illis celeritatibus negativis correspondebunt, ideòque in medio illius proximæ portionis maxima erit dilatatio ut et maximus regressus.

Secundus Casus. Quod si singula tempuscula, quibus durantibus velocitas fibræ uniformis fingitur, æqualia non sint, eadem ratione intelliguntur effectus fibræ in partes medii, nisi quod portiones medii quæ singulis successivis velocitatis gradibus gaudent non sint æquales, sed (per not. 19.) sint sicut tempora quibus durantibus singulæ illæ velocitates in fibrâ permanserunt.

Tertius Casus. Quanvis autem fibræ velocitas nullo tempusculo uniformis maneat sed continuo acceleretur, eodem tamen modo fibraaget in medium ac si reverâ velocitas ejus cresceret per intervalla temporis, et durante tempusculo quam minimo (sed finito) uniformis maneret; idque propterea quod intervalla inter particulas medii sunt finitæ quantitates non verò infinitè parvæ; nam per notas 4. et 5. nullus motus ex puncto A in punctum B transire potest, nisi punctum A processerit finitâ quantulacumque quantitate, ideòque, nisi fibra quæ urget punctum A velocitatem finitam in eo generaverit (ut fert hypothesis Problematis not. 9.); pari ratiocinio punctum B non sentiet incrementa velocitatis puncti A, nisi postquam incrementum finitum velocitatis in eo genitum fuerit (not. 5. et 20). Ergo fibra agit in medium quasi singulo tempusculo (æquali vel inæquali) ejus velocitas uniformis persistisset; intelligitur ergo effectus vibrationis fibræ in aërem per primum et secundum casum hujusce demonstrationis. Q. e. i.

25. Totum autem spatium cujus particule commotæ fuerunt durante integrâ fibræ vibratione a Newtono pulsus vocatur, et si vibratione absolutâ fibrâ quiesceret, semper ulterius propagaretur ille pulsus; nam totus ille pulsus (momento quo absolvitur vibratio) divisus intelligatur in portiones totidem quot temporis intervalla in vibrationis duratione fuerunt assumpta, quæ temporis intervalla facilitatis ergo æqualia supponantur, singula portio medii eam velocitatem habebit quam habuit chorda in momento ipsi respondenti, ultima portio sive remotissima a fibrâ eam habebit celeritatem quam fibrâ habuerat primo instanti, penultima portio eam celeritatem habet quam fibrâ habuit secundo instanti, &c.; sequenti verò tempusculo ultima portio pulsus ad novam portionem sibi æqualem et ulteriorem suam velocitatem propagabit (hujus 21.) dum ipsa suscipiet penultimæ portionis celeritatem, penul-

tima verò portio celeritatem antepenultimæ, &c., postea altero temporis intervallo ad alteram novam portionem ulteriorem prima celeritas propagabitur, et secunda celeritas in primâ portione novi istius pulsus generabitur, sique deinceps: novus ergo pulsus formabitur plane similis priori æqualiter extensus, æquali celeritate in singulis partibus donatus (semotâ ut dixi consideratione partium circumquaque positarum remque considerando quasi de partibus in linea rectâ positissimè ageretur).

26. Ipse autem primus pulsus penitus quiescit quando in secundum totus transit si nulla nova chorda agitatio succedat, nam celeritas portionis pulsus quæ fibræ proxima est successivè ad sequentes portiones transit dum novus pulsus formatur, sed celeritas ejus portionis fibræ proximæ est ultima fibræ celeritas quæ in hac hyp. est quies, sed ubi pulsus secundus totus formatus est, celeritas portionis pulsus quæ fibræ proximæ erat ad initium secundi pulsus est translata et per omnes partes pulsus primi successivè transit, ideòque in quiete eas constituit in quâ permanserunt nullâ succedente novâ agitatione.

27. Quòd si chorda novam vibrationem faciat, ut evenit, restituetur primus pulsus æqualis præcedenti qualiscumque sit ejus vibrationis velocitas initialis, nam dividatur totius vibrationis hujusce tempus in totidem partes æquales partibus in quas tempus primæ vibrationis divisum fuerat, quod fieri potest cum vibrationes sint isochronæ, istæ partes temporis æquales erunt iis quæ in præcedenti vibratione assumptæ fuerunt; dato autem tempore numerus particularum compressarum est semper idem qualiscumque sit velocitas (n. 19. hujusce). Ergo siquidem singulo instanti dato totidem partes comprimuntur, totidemque sunt instantia data in vibrationibus isochronis, pulsus ad totidem particulas in quâvis vibratione isochronâ extendetur.

28. Si per velocitatem pulsus intelligatur (cum Newtono) distantia ad quam pulsus extenditur divisa per tempus quo pulsus ad eam distantiam pervenit, dico pulsus in eodem medio esse omnes æquiveoces quæcumque sit fibræ pulsum producentis vibratio: id jam liquet de vibrationibus isochronis in quibus tempore unius vibrationis ad totidem partes pulsus propagatur, ideòque æquale spatium æquali tempore percurrit, postea verò idem pulsus similiter propagatur, sed id pariter verum est de vibrationibus eterochronis; dividantur enim inæqualia vibrationum tempora in totidem utrinque tempuscula minima quæ totis temporibus sint proportionalia, numerus partium compressarum singulis tempusculis diversis sunt illis tempusculis proportionales (n. 19. hujusce) ideòque totis vibrationum temporibus proportionales, sed in singulâ vibratione totidem tempuscula assumpta sunt, ergo totus numerus partium quæ singulum pulsum constituunt est proportionalis tempori vibrationis. Sed distantia ad quam pervenit pulsus est semper numero partium proportionalis. Ideòque distantia ad quam pervenit pulsus est tempori vibrationis proportionalis, sed velocitas pulsus est distantia ad quam pervenit divisa per tempus quo

ad eam distantiam pervenit, ergo ea velocitas est constans. Ergo in eodem medio omnes pulsus sunt æquiveoces; quod de sono per experimenta verum esse demonstravit Derhamus. ⁴

29. Quò si medium diversum sit, velocitates pulsum erunt inversè in ratione subduplicatâ densitatis et directè in ratione subduplicatâ vis elasticæ, quippe (n. 17. hujusce) deprehendimus quadratum temporis quo celeritas puncti A transit in punctum B esse $\frac{3.57 \text{ A B}}{f}$ designante A B

particularum intervallo et f vi elasticâ, et uniformiter procedere motum in pulsu ab unâ particulâ ad sequentem, sumantur ergo totidem partes in utroque medio, tempora quibus motus pulsus a primâ ad ultimam perveniet erit ut $\frac{\sqrt{\text{A B}}}{\sqrt{f}}$ (neglectâ quantitate constanti 3.57.)

Velocitas verò pulsus est directè ut spatium quod occupant illæ omnes particulæ et inversè ut tempus quibus motus a primâ ad ultimam transit, spatium verò quod occupant illæ particulæ cum sint totidem est ut intervallum A B singulæ particulæ, ideòque est velocitas pulsus ut $\frac{\text{A B}}{\sqrt{\frac{\text{A B}}{f}}} = \sqrt{\text{A B} \times f}$.

$\sqrt{\text{A B} \times f}$. Intervallum particularum est inversè ut densitas mediæ (rem considerando ut in n. 25. hujusce) ergo velocitas pulsus est inversè in ratione subduplicatâ densitatis mediæ, et directè in ratione subduplicatâ vis elasticæ (quod Prop. XLVIII. statuit Newtonus).

30. His de toto pulsu dictis, nunc de motu singulæ particulæ pulsûs observandum est, in singulâ particulâ omnes velocitatis successivos gradus quos habuit prima particulâ A produci, et tantûdem temporis in eâ particulâ durare, quantum in ea particulâ A, hoc cum discrimine quod tardius eos velocitatis gradus suscipiat quam particulâ A, et quidem eò tardius quò ab ea remotior est; *Primus Casus*. Dividatur, ut prius, vibratio tempus in tempuscula, et durante uno tempusculo æqualis manere censeatur velocitas impressa particulæ A, fingamus singulo tempusculo velocitatem ad viginti particulas pervenire, et spectemus speciatim motum quem decima particulâ a puncto A suscipiet, quæ particulâ dicatur X, illa particulâ X motum puncti A non suscipit nisi post novem particulas antecedentes, tum ipsa particulâ X motum puncti A suscipit et uniformiter cum eo movetur durante reliquo tempusculo, tunc ex hypothesi mutatur celeritas puncti A, interea tamen uniformis manet celeritas puncti X donec nova ea celeritas ad ipsam pervenire potuerit, hoc est postquam successivè pervenit ad particulas novem antecedentes, sed nova hæc celeritas per novem particulas antecedentes particulam X propagatur eodem tempore quo prima celeritas per easdem novem particulas propagata fuerat; ergo prima celeritas tantò diutius permanet in particulâ X quantò tardius eam receperat, ergo ea prima celeritas tamdiù durat in particulâ X quamdiù duraverat in particulâ A; cumque idem de singulis successivis motibus puncti A dici possit, hinc quæ-

libet particulâ X ipsissimum habet motum ac particulâ A, nisi quod tardius in eâ incipiat et desinat. Ideòque etiam manifestum est in hoc casu, spatia a particulis A et X descripta æqualia fore et similiter descripta.

Secundus Casus. Ponatur nunc quod motus puncti A æqualis non maneat durante singulo tempusculo, velocitates tamen successivæ puncti X erunt illæ quas in fine singuli tempusculi quam minimi punctum A acquisiverit, ut liquet ex tertio casu notæ 24, ideòque punctum X suscipiet velocitates correspondentes velocitatibus puncti A sumptis per saltus, sed quoniam cum primùm punctum A spatium finitum descripsit, agere incipit in punctum proximum, saltus illi quamminimi intelligi debent, ideòque physicè nulli, hinc physicè particulâ X et particulâ A eosdem motus habebunt.

Pariter describunt spatia æqualia et similia; quippe abscissæ curvæ cujusvis representent tempus quo durante punctum A movetur, et ejus ordinatæ representent correspondentes velocitates, et dividatur axis curvæ in partes quamminimas sed finitas, eriganturque ordinatæ, illæ representabunt velocitates æquales puncti X initio singuli tempusculi, et parallelogrammata contenta sub ordinata et portione axis respondent representant spatia a puncto X descripta, aræ verò mixtilineæ inter easdem ordinatas easdem axis portiones et arcus curvæ comprehensæ representabunt spatia correspondentia a puncto A descripta, sed quando portiones axis sunt quamminimæ, summæ omnium eorum parallelogrammatum et arearum mixtilinearum correspondentium pro æqualibus habentur. Ergo spatia a particulis A et X descripta sunt æqualia et similiter descripta saltem quàm proximè.

31. Ideò uniformiter motus fibræ propagatur trans particulas mediæ; singulæ verò ejus particulæ successivè motum fibræ suscipiunt et ejus ad instar moventur, sed in fibrâ elasticâ vires sunt semper proportionales distantie fibræ a puncto medio motus sui, ut per experimenta constat, et illarum virium actio sensibiliter non turbatur per resistantiam aëris, propter ejus raritatem, nec per ejus elaterium quia hinc inde a fibrâ aër datur qui ferè æqualiter premit, ideò fibrâ elastica ac per consequens particulæ ipsæ mediæ moventur secundum legem Prop. XXXVIII. Lib. I. Sed eadem est lex motus penduli in cycloide oscillantis Prop. LI. Lib. I. Ergo *pulsibus per fluidum propagatis singulæ particulæ motu reciproco brevissimo euntes et redeuntes accelerantur semper et retardantur pro lege oscillantis penduli*. Q. e. d.

32. Sumatur tempus quodvis, simulque illud intervallum inter particulas pulsus, quod tale est ut eo tempore assumpto motus fibræ a primâ particulâ ejus intervalli ad ultimam perveniat. Dico, quod tempus illud erit ad totum vibrationis tempus ut illud intervallum ad totius pulsus longitudinem; res est evidentissima ex præcedentibus; nam cum motus propagetur in pulsu uniformiter qualiscumque sit celeritas, hoc est, cum ad totidem particulas dato tempore perveniat, manifestum est quod sic ut est totum vibra-

gressu. Nam lineola physica $\varepsilon \gamma$, quamprimum ad locum suum primum redierit, ⁽ⁿ⁾ quiescet; neque deinceps movebitur, nisi vel ab impetu corporis tremuli, vel ab impetu pulsum qui a corpore tremulo propagantur, motu novo cieatur. Quiescet igitur quamprimum pulsus a corpore tremulo propagari desinunt.

PROPOSITIO XLVIII. THEOREMA XXXVIII.

Pulsum in fluido elastico propagatorum velocitates sunt in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione vis elasticæ directè et subduplicatâ ratione densitatis inversè; si modo fluidi vis elastica ejusdem condensationi proportionalis esse supponatur.

Cas. 1. Si media sint homogenea, et pulsum distantiae in his mediis æquentur inter se, sed motus in uno medio intensior sit: contractiones et dilatationes partium analogarum ^(o) erunt ut iidem motus. Accurata qui-

⁽ⁿ⁾ * Quiescet; neque deinceps movebitur. Quamprimum lineola physica $\varepsilon \gamma$ ad locum suum primum redierit, ipsius velocitas quam ordinata, m i, semper exponit (Prop. XXXVIII. Lib. I.) extinguetur; et ejusdem lineolæ densitas visque elastica eadem erit cum densitate et vi elasticâ partis E G medii quiescentis; ideoque quiescet, &c. * Id liquet ex n. 20. additionis nostræ de Motibus in Fluido elastico Genitis.

316. Ex his intelligitur quomodo per vibrationes isochronas corporis resonantis producuntur in aëre pulsus quibus ad aurem appulsis, fit in nobis perceptio soni, et cur soni, cessante motu tremulo corporis sonori, statim cessent. Liquet etiam tonos a numero pulsum qui in aëre tempore dato excitantur, pendere, cum (per Cor. Prop. hujus) numerus pulsum æqualis sit numero vibrationum ex itu et reditu compositarum quas chorda musica peragit, et ab isto numero tonorum diversitas oriatur (308).

317. Patet etiam quomodo aëris pulsus sonum et tremores in aliis corporibus unisonis aut consonantibus creare possint. Nam cum aëris pulsus in nervum musicum incurrit qui vibrationem unam ex itu et reditu compositam absolvere aptus sit, eo tempore quo pulsus suam percurrit latitudinem, commoveitur nervus et oscillatur per exiguum licet spatium, et recurrentibus novis atque conspirantibus aëris pulsibus celerius agitur sonumque reddit. At si nervus vibrationes suas integras seu ex itu et reditu compositas perficere nequeat quo tempore pulsus aëris latitudinem suam describit, possit tamen in partes aliquotas hujusmodi vibrationibus peragendis aptas dividi; partes illæ, quiescentibus divisionum punctis, congruenter ad pulsum recursum sensim agitantur, vibrationesque suas cum pulsibus unisonas singulæ perficient. Si verò nervi duo proxi-

mi in eas partes aliquotas dividi possint quæ sint inter se ad unisonum, aut quod idem est, quæ vibrationes isochronas peragant, et horum nervorum unus pulsetur sonumque edat, nervi duo sese in partes suas aliquotas veluti dividunt ut ad unisonum reducantur. Ut si ejusdem nervi capiantur partes duæ quarum sit ratio 2 ad 3 et æqualiter tendantur, alteraque pars pulsetur, dividetur minor nervus in partes duas, et major in partes tres æquales quæ singulæ seorsim oscillantur. Nam brevior nervus duarum nempe partium, ter oscillando dum nervus longior partium trium, duas oscillationes absolvit (306) frequentiores in aëre pulsus excitat quorum recursus nervus longior citius quam par est agitur; et cum utriusque nervi aërisque motus congruere non possint nisi singulæ nervorum partes aliquotæ et æquales seorsim oscillentur, motus ille conspirans tam in nervis quam in aëre tandem producitur. Et hæc quidem in experimentis musicis ita contingere observarunt Joan. Wallis Operum in fol. Tom. II. pag. 466. Et deinde Acusticæ instaurator D. Sauveur in Monum. Acad. Paris. an. 1701. ubi alia experimenta refert quæ ex prædictis facile possunt explicari; * et inde ingeniosissimi systematis de tonorum productione et harmoniâ fundamenta derivavit ill. de Mairan omni laude superior, quod ad praxim felicissimè revocavit vir inter eruditos Orpheos illustrissimus D. Rameau.

^(o) * Erunt ut iidem motus. Motus enim illi sunt vel causæ vel effectus contractionis et dilatationis partium in pulsibus correspondentium. Hæc tamen proportio accurata non est, si contractiones et dilatationes sint valde intensæ, quemadmodum si chorda musica nimia vi pulsetur, vis motrix particularum ejus non est amplius proportionalis spatiis per quæ debet moveri, et

dem non est hæc proportio. Verumtamen nisi contractiones et dilatationes sint valde intensæ, non errabit sensibilter, ideóque pro physicè accuratâ haberi potest. (P) Sunt autem vires elasticæ motrices ut contractiones et dilatationes; et velocitates partium æqualium simul genitæ sunt ut vires. Ideóque æquales et correspondentes pulsuum correspondentium partes itus et reditus suos per spatia contractionibus et dilatationibus proportionalia, cum velocitatibus quæ sunt ut spatia, simul peragent: et propterea pulsus, qui tempore itûs et reditûs unius latitudinem suam progrediendo efficiunt, et in loca pulsuum proximè præcedentium semper succedunt, ob æqualitatem distantiarum, æquali cum velocitate in medio utroque progredientur.

Cas. 2. Sin pulsuum distantia seu longitudines sint majores in uno medio quàm in altero; (q) ponamus quod partes correspondentes spatia latitudinibus pulsuum proportionalia singulis vicibus eundo et redeundo describant: et (r) æquales erunt earum contractiones et dilatationes. Ideóque si media sint homogenea, æquales erunt etiam vires illæ elasticæ motrices quibus reciproco motu agitantur. Materia autem his viribus movenda est ut pulsuum latitudo; et in eâdem ratione est spatium per quod singulis vicibus eundo et redeundo moveri debent. (s) Estque tempus itûs et reditûs unius in ratione compositâ ex ratione subduplicatâ materiæ et ratione subduplicatâ spatii, atque ideò ut spatium. Pulsus

æris densitas vi ipsius elasticæ proportionalis non manet, si nimîa vi comprimatur vel dilatetur ær. * Singulæ diminutiones intervallorum sunt ut velocitates (n. 19.) non tamen ex eo sequitur contractiones esse ut velocitates, (hunc verò casum et reliquos demonstravimus n. 29. additionis de Mot. Fluid. Elast.)

(P) * *Sunt autem vires elasticæ motrices.* Nam vires elasticæ motrices sunt ut partium analogarum densitates, hoc est, datâ materiæ quantitate, ut contractiones; et contractiones sunt ut dilatationes quæ viribus elasticis mediis contracti producantur; et velocitates partium æqualium simul genitæ sunt ut vires (15. Lib. I.), hoc est, ut contractiones et dilatationes, ideóque cum spatia simul descripta sint ut velocitates simul genitæ, æquales et correspondentes pulsuum correspondentium partes itus et reditus suos, seu motus suos per spatia contractionibus proportionalia, cum velocitatibus quæ sunt ut spatia simul peragent; et propterea pulsus qui tempore itûs et reditûs latitudinem suam progrediendo efficiunt (314.) et in loca pulsuum proximè præcedentium semper succedunt, ob æqualitatem distantiarum æqualibus temporibus descriptarum æquali cum velocitate in medio utroque progredientur.

(q) *Ponamus quod partes correspondentes.* Quoniam (per Cas. 1.) in eodem medio homo-

geneo et datâ pulsuum latitudine spatium quod partes mediis oscillando describunt, manente tempore oscillationis, minui potest in datâ ratione; nihil obstat quominus in hoc secundo casu supponatur quod partes mediorum correspondentes spatia latitudinibus pulsuum proportionalia, iisdem manentibus oscillationum in unoquoque medio temporibus, eundo et redeundo percurrant.

(r) * *Æquales erunt.* Si media sint homogenea, uti in hoc secundo casu supponitur, vires elasticæ motrices sunt ut partium correspondentium contractiones et dilatationes quas producant, sed quia quantitates materiæ in partibus correspondentibus sunt ut pulsuum latitudines, seu ut partium analogarum volumina, et partes illæ analogæ eundo et redeundo dilatantur et contrahuntur per spatia quantitibus materiæ proportionalia (per Hyp.) contractiones et dilatationes ideóque vires elasticæ motrices æquales erunt.

(s) * *Estque tempus itûs et reditûs.* Nam tempus quo materia viribus æqualibus ad legem oscillantis penduli agitur, est in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione materiæ et subduplicatâ ratione spatii (per Cor. 5. Prop. XXIV. Lib. II.)

autem temporibus itis et reductis unius eundo latitudines suas conficiunt, hoc est, spatia temporibus proportionalia percurrunt; et propterea sunt æquveloces.

Cas. 3. In mediis igitur densitate et vi elasticâ paribus, pulsus omnes sunt æquveloces. Quod si medii vel densitas vel vis elastica intendatur, quoniam vis motrix in ratione vis elasticæ, et materia movenda in ratione densitatis augetur; ^(t) tempus, quo motus iidem peragantur ac prius, augebitur in subduplicatâ ratione densitatis, ac diminuetur in subduplicatâ ratione vis elasticæ. Et propterea velocitas pulsum erit in ratione compositâ ex ratione subduplicatâ densitatis medii inversè et ratione subduplicatâ vis elasticæ directè. Q. e. d.

Hæc Propositio ulterius patebit ex constructione sequenti.

PROPOSITIO XLIX. PROBLEMA XI.

Datis medii densitate et vi elasticâ, invenire velocitatem pulsum.

Fingamus medium ab incumbente pondere pro more aëris nostri comprimī; sitque A altitudo medii homogenei, cujus pondus adæquet pondus incumbens, et cujus densitas eadem sit cum densitate medii compressi, in quo pulsus propagantur. Constitui autem intelligatur pendulum, cujus

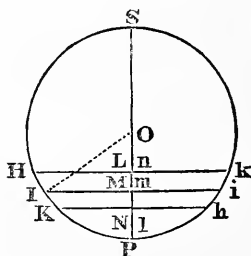
^(t) *Tempus, quo motus iidem peragantur, &c.* Tempus quo motus per equalia spatia peraguntur est in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione materiæ movendæ directè et subduplicatâ ratione vis motricis inversè (per Cor. 5. Prop. XXIV.) ideoque in hoc tertio casu, tempus, manente spatio descripto, augebitur in subduplicatâ ratione densitatis, ac diminuetur in subduplicatâ ratione vis elasticæ, et propterea velocitas quæ est ut spatium directè et tempus inversè, (ob datum spatium per Hyp.) erit in ratione compositâ ex ratione subduplicatâ densitatis medii inversè, et ratione subduplicatâ vis elasticæ directè; sed datis medii densitate et vi elasticâ, velocitas pulsum, utcumque varietur spatium, data est, (per Cas. 1. et 2.) ergò velocitas pulsum erit semper in ratione compositâ ex ratione subduplicatâ densitatis medii inversè et ratione subduplicatâ vis elasticæ directè.

318. Ex hac Propositione patet cur soni omnis generis, gravis et acutus, intensus et remissus, pari velocitate in eodem aëre propagentur. Nam sonorum diversitas, quoad *grave* et *acutum*, a numero pulsum qui in aëre tempore dato excitantur, pendet (316); at (per hanc Prop.) pulsus aëris, seu plures seu pauciores dato tempore producuntur, eadem semper velocitate diffunduntur et dato tempore datum spatium con-

ficiunt: soni verò in eodem aëre producti eo intensiores sunt, manente tono, quo majus est spatium quod aëris particulæ eundo et redeundo describunt dato tempore; ut si chorda musica validius pulsetur, majores vibrationes dato tempore peragit, majoresque oscillationes particularum aëris excitat, et sonus intensior percipitur, licet tonus idem maneat et proinde pulsum latitudo ac velocitas non mutantur. Cùm ergo tanta sit velocitas lucis ut per atmosphæram in instanti quoad sensum propagetur (per schol. ad Prop. XCVI. Lib. I.); si sonus et lux eodem puncto temporis exsistunt, uti in machinis bellicis flamma et fragor producuntur simul, et spectator spatium quo a corpore resonante distat, tempusque quod inter luminis et soni perceptiones intercedit, dimidiatur, soni velocitas innotescet. Atque eo modo in variis regionibus varia observata est velocitas soni, et in Angliâ eâ celeritate ferri, Flamstedio et Halleyo visum est, quâ pedes Londinenses plus minus 1142, Parisienses verò 1070, tempore minuti unius secundi percurreret. Quia verò densitas et vis elastica aëris in variis Terrarum locis, diversisque anni tempestatibus in eodem loco mutantur, inde quoque mutari oportet soni velocitatem. Diu creditum est, observantibus Mersenno, Gassendo, et Academicis Florentinis, sonum neque

longitudo inter punctum suspensionis et centrum oscillationis sit A : et quo tempore pendulum illud oscillationem integram ex itu et reditu compositam peragit, eodem pulsus eundo conficiet spatium circumferentiæ circuli radio A descripti æquale.

Nam stantibus quæ in Propositione XLVII. constructa sunt, si linea quævis physica $E F$, singulis vibrationibus describendo spatium $P S$, urgeatur in extremis itus et re-ditus ejusque locis P et S , a vi elasticâ ^(u) quæ ipsius ponderi æquetur; peraget hæc vibrationes singulas quo tempore eadem in cycloide, cujus perimeter tota longitudini $P S$ æqualis est, oscillari posset: id adeò quia vires æquales æqualia corpuscula per æqualia spatia simul impellent. Quare cùm oscillationum tempora ^(x) sint



in subduplicatâ ratione longitudinis pendulorum, ^(y) et longitudo penduli æquetur dimidio arcui cycloidis totius; foret tempus vibrationis unius ad tempus oscillationis penduli, cujus longitudo est A , in subduplicatâ ratione longitudinis $\frac{1}{2} P S$ seu $P O$ ad longitudinem A . Sed vis elastica, quâ lineola physica $E G$, in locis suis extremis P , S existens, urgetur, erat (in demonstratione Propositionis XLVII.) ^(z) ad ejus vim totam elasticam ut $H L - K N$ ad V , hoc est (cum punctum K jam incidat in P) ^(a) ut $H K$ ad V : ^(b) et vis illa tota, hoc est pondus incumbens, quo lineola $E G$ comprimitur, est ad pondus lineolæ ut ponderis incumbentis altitudo A ^(c) ad lineolæ longitudinem $E G$; ideòque ex æquo, vis

conspirante vento accelerari, neque adverso retardari; sed D . Derham experimentis accuratè institutis, falsum id esse assertit.

^(u) * Quæ ipsius ponderi æquetur, et quæ decrescat ut ipsius distantia a centro O ; peraget hæc vibrationes singulas quo tempore eadem in cycloide, cujus perimeter tota longitudini $P S$ æqualis est, oscillari posset; quia particulæ $E F$ in hujusmodi cycloide oscillantis vis motrix est semper ut distantia ipsius a puncto cycloidis infimo seu medio, et in altissimis seu extremis punctis cycloidis ponderi ipsius æquatur, per Cor. Prop. LI. Lib. I.

^(x) * Sint in subduplicata ratione longitudinis pendulorum (472. Lib. I.)

^(y) * Et longitudo penduli æquetur dimidio

arcui cycloidis totius, per Cor. Prop. L. et Cor. 2. Prop. LII. Lib. I.

^(z) * Ad ejus vim totam elasticam in loco $E G$ ubi medium quiescit, ut, &c.

^(a) * Ut $H K$ ad V . Cùm punctum K incidit in P , evanescit $K N$ et fit $H L - K N = H L = H K$, per Cor. 1. Lem. VII. Lib. I.

^(b) * Et vis illa tota, hoc est, pondus incumbens, quo, &c. Vis elastica tota partis $E G$ est in æquilibrio cum pondere comprimente, ubi medium quiescit.

^(c) * Ad lineolæ longitudinem $E G$. Cùm enim medium homogeneum, cujus altitudo est A , sit (per Hyp.) ejusdem densitatis cum medii parte $E G$, pondera sunt ut volumina, hoc est, ut lineæ A et $E G$.

quâ lineola $E G$ in locis suis P et S urgetur, est ad lineolæ illius pondus ut $H K \times A$ ad $V \times E G$, sive ut $P O \times A$ ad $V V$, ^(d) nam $H K$ erat ad $E G$ ut $P O$ ad V . Quare cùm tempora, quibus æqualia corpora per æqualia spatia impelluntur, sint ^(e) reciproçè in subduplicatâ ratione virium, erit tempus vibrationis unius, urgente vi illâ elasticâ, ad tempus vibrationis, urgente vi ponderis, in subduplicata ratione $V V$ ad $P O \times A$, ^(f) atque ideò ad tempus oscillationis penduli cujus longitudo est A in subduplicatâ ratione $V V$ ad $P O \times A$, et subduplicatâ ratione $P O$ ad A conjunctim; id est, in ratione integrâ V ad A . Sed tempore vibrationis unius ex itu et reditu compositæ, pulsus progrediendo conficit latitudinem suam $B C$. Ergo tempus, quo pulsus percurrit spatium $B C$, ^(g) est ad tempus oscillationis unius ex itu et reditu compositæ, ut V ad A , ^(h) id est, ut $B C$ ad circumferentiam circuli cujus radius est A . Tempus autem, quo pulsus percurreret spatium $B C$, est ad tempus quo percurreret longitudinem huic circumferentiæ æqualem, ⁽ⁱ⁾ in eâdem ratione; ideòque tempore talis oscillationis pulsus percurreret longitudinem huic circumferentiæ æqualem. Q. e. d.

Corol. 1. Velocitas pulsuum ea est, quam acquirunt gravia æqualiter accelerato motu cadendo, et casu suo describendo dimidium altitudinis A . Nam tempore casus hujus, cum velocitate cadendo acquisitâ, pulsus percurreret spatium ⁽¹⁾ quod erit æquale toti altitudini A ; ideòque tempore oscillationis unius ex itu et reditu compositæ percurreret spatium æquale circumferentiæ circuli radio A descripti: ^(m) est enim tempus casûs ad tempus oscillationis ut radius circuli ad ejusdem circumferentiam.

^(d) * Nam $H K$ erat ad $E G$ ut $P O$ ad V , in dem. Prop. XLVII.

^(e) * Sinti reciproçè in subduplicatâ ratione virium. Patet per Cor. 3. Prop. XXIV. Lib. hujus.

^(f) * Atque ideò ad tempus, &c. Patet per compositionem rationum et ex æquo; quia (ex demonstratis) tempus unius vibrationis particulæ $E F$, urgente vi ponderis ipsius, est ad tempus oscillationis penduli cujus longitudo est A , in subduplicatâ ratione $P O$ ad A .

^(g) * Est ad tempus oscillationis unius ex itu et reditu compositæ, penduli cujus longitudo est A .

^(h) * Id est, ut $B C$ ad circumferentiam circuli cujus radius est A . Nam (in demonstr. Prop. XLVII.) erat V radius circuli circumferentiam habentis æqualem intervallo $B C$; unde est V ad A ut $B C$ ad circumferentiam circuli cujus radius est A .

⁽ⁱ⁾ * In eâdem ratione. Quoniam tempus quo pulsus percurreret spatium $B C$, est ad tempus datum oscillationis integræ penduli cujus longi-

tudo A , datis medii densitate et vi elasticâ datâ, est ut spatium $B C$ ad datam peripheriam circuli radio A descripti; liquet, quod tempus, quo pulsus percurreret spatium $B C$, aut eadem celeritate percurreret datam peripheriam circuli radio A descripti, fore eis spatiis proportionalem. Quare tempus quo pulsus percurreret spatium $B C$, est ad tempus oscillationis unius ex itu et reditu compositæ penduli cujus longitudo est A , ut tempus quo pulsus percurreret idem spatium $B C$, ad tempus quo percurreret longitudinem æqualem circumferentiæ circuli cujus radius est A ; ideòque tempore talis oscillationis pulsus percurreret longitudinem huic circumferentiæ æqualem.

⁽¹⁾ * Quod erit æquale toti altitudini A (30. Lib. I.)

^(m) * Est enim tempus casûs, per dimidiam altitudinem A ad tempus oscillationis unius ex solo itu, vel solo reditu constantis, ut diameter circuli ad ejus circumferentiam (470. Lib. I.), ideòque ad tempus duplum oscillationis unius ex itu et reditu compositæ, ut radius circuli ad ejus

Corol. 2. Unde cum altitudo illa A sit ut fluidi vis elastica directè et densitas ejusdem inversè; ^(a) velocitas pulsuum erit in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione densitatis inversè et subduplicatâ ratione vis elasticæ directè.

PROPOSITIO L. PROBLEMA XII.

Invenire pulsuum distantias.

Corporis, cujus tremore pulsus excitantur, inveniatur numerus vibrationum dato tempore. Per numerum illum dividatur spatium quod pulsus eodem tempore percurrere possit, et pars inventa ^(o) erit pulsus unius latitudo. Q. e. i.

Scholium.

Spectant Propositiones novissimæ ad motum lucis et sonorum. ^(p) Lux enim cùm propagetur secundum lineas rectas, in actione solâ (per Prop.

circumferentiam. Quare cùm velocitates uniformes sint ut spatia eodem tempore descripta, pulsus verò propriâ velocitate æquabili peripheriam circuli radio A descripti tempore oscillationis unius ex itu et reditu compositæ percurrat, et grave cum uniformi velocitate, quam acquirere potest cadendo per dimidiam altitudinem A, eodem tempore idem spatium describat; patet velocitates illas pulsus et gravis esse æquales.

⁽ⁿ⁾ * *Velocitas pulsuum erit, &c.* Velocitas pulsuum, ut pote æqualis (per Cor. 1.) velocitati quam gravia per dimidiam altitudinem A cadendo acquirunt, est in ratione subduplicatâ altitudinis illius A (28. Lib. I.); sed altitudo A medii homogenei, cujus densitas eadem est cum densitate medii E G et pondus in æquilibrio cum ejusdem medii E G vi elasticâ, manente densitate est ut pondus seu ut vis elastica directè, et manente vi elasticâ seu pondere est ut densitas inversè, quia densitas est semper ut pondus directè et volumen seu altitudo A inversè; et propterea conjunctis his rationibus altitudo A est semper in ratione compositâ ex ratione vis elasticæ directè et ratione densitatis inversè. Quare velocitas pulsuum erit in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione densitatis inversè et subduplicatâ ratione vis elasticæ directè.

^(o) * *Erit pulsus unius latitudo.* Quoniam pulsus omnes uniformi cum velocitate propagantur (ex dem. Prop. XLVIII. et XLIX.) et tot pulsus æquales producuntur in aëre, quot sunt corporis tremuli vibrationes isochronæ ex itu et reditu compositæ (per Cor. Prop. XLVII.); si spatium quod pulsus seu sonus dato tempore percurrere possit, per numerum vibrationum,

quas corpus sonorum eodem tempore perficit, dividatur, quotus erit pulsus unius latitudo. Sed dato sono, numerus vibrationum quas corpus sonorum dato tempore peragit, invenitur (per formulas 303, 304); si nimirum chorda musica ad unisonum vel ad notam consonantiam cum sono dato reducatur. Cùm enim tonorum differentia a numero vibrationum quas corpus sonorum dato tempore absolvit, pendeat (308 et 312); iidem toni eodem vibrationum isochronarum numero producuntur. Notum verò est spatium quod sonus dato tempore describit (318).

Exempli causâ, si sonus omnium acutissimus, quem possimus distinguere, vibrationibus integris 6400 tempore minuti unius secundi absolutis producat, et omnium gravissimus vibrationibus $12\frac{1}{2}$ excitetur, uti D. Sauveur in Historia Acad. Scient. Paris. an. 1700. arbitratu est; divide spatium 1142. pedum Londinensium, quod sonus tempore minuti unius secundi conficit, per numeros 6400. et $12\frac{1}{2}$ successivè, et quoti, videlicet digiti 2, 14, et pedes 91, 36, erunt latitudines pulsuum, quibus soni acutissimus et gravissimus producuntur.

^(p) * *Lux enim cùm propagetur secundum lineas rectas*, et interpositis corporibus opacis intercipiatur, in actione solâ, seu pressione, motive per medium quodlibet fluidum propagato, consistere nequit; quia pressio et motus per medium omne fluidum propagata divergunt a recto tramite in spatia immota et pone obstacula circumquaque diffunduntur, per Prop. citatas. Cùm igitur lumen sit corpus, ut pote motu progressivo præditum, ab obstaculis reflexum et refractum.

XLI. et XLII.) consistere nequit. Soni verò propterea quod a corporibus tremulis oriantur, nihil aliud sunt quam aëris pulsus propagati per Prop. XLIII. Confirmatur id ex tremoribus quos excitant in corporibus objectis, si modo vehementes sint et graves, quales sunt soni tympanorum. (q) Nam tremores celeriores et breviores difficilius excitantur. Sed et sonos quævis, in chordas corporibus sonoris unisonas impactos, excitare tremores notissimum est. Confirmatur etiam ex velocitate sonorum. Nam cum pondera specifica aquæ pluvialis et argenti vivi sint ad invicem ut 1 ad $13\frac{2}{3}$ circiter, et ubi mercurius in barometro altitudinem attingit digitorum Anglicorum 30, pondus specificum aëris et aquæ pluvialis sint ad invicem ut 1 ad 870 circiter: (r) erunt pondera specifica aëris et argenti vivi ut 1 ad 11890. Proinde cum altitudo argenti vivi sit 30 digitorum, altitudo aëris uniformis, cujus pondus aërem nostrum subjectum comprimere posset, erit 356700 digitorum, seu pedum Anglicorum 29725. Estque hæc altitudo illa ipsa quam in constructione superioris Problematis nominavimus A. Circuli radio 29725 pedum descripti (s) circumferentia est pedum 186768. Et cum pendulum digitos $39\frac{1}{2}$ longum oscillationem ex itu et reditu compositam tempore minutorum duorum secundorum, uti notum est, (t) absolvat; pendulum pedes 29725 seu digitos 356700 longum (u) oscillationem consimilem tempore minutorum secundorum $190\frac{3}{4}$ absolvere debebit. Eo igitur tempore sonus progrediendo (x) conficiet pedes 186768, ideoque tempore minuti unius secundi pedes 979.

motumque in corporibus quæ inflammat excitans, necesse esse videtur ut a corporibus luminosis tenuissima corpuscula incredibili fere velocitate quaquaversum emittantur. Spatia igitur cælestia, quæ astrorum omnium lux immensâ illâ celeritate permeat, materiâ quâdam æthereâ densissimâ, quæ radiorum lucis motum interciperet, plena esse non possunt.

(q) 319. * *Nam tremores celeriores et breviores difficilius excitantur.* Corpora enim majora et minus elastica majoribus soni gravioris, cum quo consonare possunt, vibrationibus facilius concutiuntur et congruenter ad pulsum motum agitantur; nam debet esse proportio quædam inter pulsum aëris latitudinem et corporum circumjectorum magnitudinem, densitatem et vim elasticam, ut sonus iis communicetur; et quo fibræ breviores sunt, tenuiores et magis tensæ, eo facilius acuto sono seu brevioribus aëris pulsibus agitantur et contremunt. Quæ omnia patet per notam 317.

(r) * *Erunt, ex æquo et per compositionem rationum, pondera specifica sive densitates aëris et argenti vivi ut 1 ad 11890.* Sed fluidorum in se homogeneorum, eidem basi incumbentium, et in æquilibrio consistentium altitudines sunt in-

versè ut densitates (173. Lib. II.): est igitur 1 ad 11890 ut 30 digit. ad altitudinem aëris uniformis qui cum 30 digitis argenti vivi æquiponderat; et ideò altitudo hæc est digitorum 356700, seu, dividendo per 12, pedum Anglicorum 29725.

(s) * *Circumferentia est pedum 186768.* Est enim radius ad circumferentiâ ut 113 ad 710, sive ut 29725 ad 186768 quàm proximè.

(t) * *Absolvat.* Pendulum cujus longitudo est pedum Parisiensium 3 et linearum $8\frac{1}{2}$, oscillationem unam ex itu et reditu compositam tempore minutorum duorum secundorum absolvit (471. Lib. I.); et pes Londinensis est ad pedem Parisiensem ut 15 ad 16 quàm proximè, et ita sunt pedes 3 cum lineis $8\frac{1}{2}$ ad digitos $39\frac{1}{8}$, vel $39\frac{1}{2}$ quàm proximè.

(u) * *Oscillationem consimilem tempore, &c.* Oscillationum tempora sunt in subduplicatâ ratione longitudinis pendulorum (472. Lib. I.), et propterea ut $39\frac{1}{2}$ ad 356700, ita 4 ad quadratum numeri minutorum secundorum, qui quæritur, et peracto calculo invenitur esse $190\frac{3}{4}$ quàm proximè.

(x) * *Conficiet pedes, &c.* Per Prop. XLIX.

Cæterum in hoc computo nulla habetur ratio crassitudinis solidarum particularum aëris, per quam sonus utique ⁽⁷⁾ propagatur in instanti. Cum pondus aëris sit ad pondus aquæ ut 1 ad 870, et sales sint fere duplo densiores quàm aqua; si particulæ aëris ponantur esse ejusdem circiter densitatis cum particulis vel aquæ vel salium, et raritas aëris oriatur ab intervallis particularum: ⁽⁸⁾ diameter particulæ aëris erit ad intervallum inter centra particularum, ut 1 ad 9 vel 10 circiter, et ad intervallum inter particulas ut 1 ad 8 vel 9. Proinde ad pedes 979, quos sonus tempore minuti unius secundi juxta calculum superiorem conficiet, addere licet pedes $97\frac{9}{10}$ seu 109 circiter, ob crassitudinem particularum aëris: et sic sonus tempore minuti unius secundi conficiet pedes 1088 circiter.

His adde quod vapores in aëre latentes, cum sint alterius elateris et alterius toni, ^(a) vix aut ne vix quidem participant motum aëris veri quo soni propagantur. His autem quiescentibus, motus ille celerius propa-

⁽⁷⁾ * *Propagatur in instanti.* Nam corpus solidum quod condensari non potest, dum movetur, totum simul movetur, et ideo motus ab uno corporis illius extremo ad alterum extremum propagatur in instanti.

⁽⁸⁾ * *Diameter particulæ aëris erit, &c.* Fingantur cubi duo æquales, quorum alter aëre plenus sit, alter medio continuo ejusdem circiter densitatis cum aquâ vel salibus. Hoc medium continuum divisum sit in particulas æquales, tenuissimas et sese mutuo contingentes; aër verò ex hujusmodi particulis, quæ æqualibus intervallis distinctæ sint, constet. Harum particularum diameter dicatur D, spatium inter illas in aëre interceptum S, et ideo intervallum inter centra particularum aëris S + D, numerus particularum aëris in uno cubi latere N, et proinde earum numerus in cubo toto aëreo N³, et latus cubi N S + N D. Sit M numerus particularum alterius medii continui in uno latere cubi, et propterea M³ earum numerus in cubo toto, ac M D cubi latus. Quia duo cubi æquales supponuntur, erit N S + N D = M D. Si densitas aëris sit ad densitatem alterius medii continui ut 1 ad A; quia paribus voluminibus, densitates sunt ut quantitates materiæ, quæ sunt ut numeri particularum magnitudine et densitate æqualium, erit 1 : A = N³ : M³, et hinc 1 : A ^{$\frac{1}{3}$} = N : M, ideoque M = N A ^{$\frac{1}{3}$} . Quare cum sit N S + N D = M D = N D A ^{$\frac{1}{3}$} , erit S + D = D A ^{$\frac{1}{3}$} , et S = D × [A ^{$\frac{1}{3}$} - 1], ideoque D : S = 1 : A ^{$\frac{1}{3}$} - 1 ac D : S + D = 1 : A ^{$\frac{1}{3}$} . Jam si ponatur A fere æqualis numero 870, erit fere A ^{$\frac{1}{3}$} = 9; si verò ponatur A = 1000, vel A = 1100, vel A = 1200, erit fere A ^{$\frac{1}{3}$} = 10; unde diameter D solidæ

particulæ aëris erit ad intervallum S + D inter centra particularum, ut 1 ad 9 vel 10 circiter, et ad intervallum S inter particulas ut 1 ad 8 vel 9. Proinde spatium totum quod particulæ solidæ in lineâ rectâ datâ posite occupant, erit ad spatium reliquum quod intervalla particularum in eadem lineâ tenent, ut 1 ad 8 vel 9 circiter, et ad totam lineam ut 1 ad 9 vel 10. Sed si nulla habeatur ratio crassitudinis solidarum particularum aëris, sonus lineam rectam pedes 979 longam tempore minuti unius secundi describit: quare cum sonus per spatium totum quod solidæ particulæ aëris occupant, in instanti propagetur, et sit 9 ad 1 ut lineæ pedes 979 longa ad ipsius partem quam particulæ solidæ aëris occupant; partem illam, quæ est $\frac{979}{9}$, seu 109 pedum circiter, addere licet spatio 979 pedum.

^(a) * *Vix aut ne vix quidem participant motum aëris veri quo soni propagantur.* Nam vibratorius particularum aëris motus, quo sonus producitur, corporibus ejusdem toni facile, at corporibus alterius elateris et alterius toni aëre aut nullo modo communicari potest (517). Unde si atmosphæra constet ex decem partibus aëris veri et unâ parte vaporum, sitque proinde totum pondus atmosphære ad pondus vaporum ut 11 ad 1, et ad pondus aëris veri, subducto pondere vaporum, ut 11 ad 10, minuenda est quantitas materiæ movendæ in ratione 11 ad 10. Sed si densitas medii, sive quantitas materiæ sub dato volumine contentæ, cæteris paribus, minuitur, velocitas soni augetur in eadem ratione subduplicatâ (per Prop. XLVIII.). Quare (in Hyp. Newt.) velocitas soni augenda est in ratione subduplicatâ 10 ad 11, vel in integrâ circiter ratione 20 ad 21; et ideo spatium dato tempore minuti unius secundi descriptum, quod erat 1088 pedum, augendum in ratione 20 ad 21. Est autem fere 20 ad 21 ut 1088 ad 1142.

gabitur per solum aërem verum, idque in subduplicatâ ratione minoris materiæ. Ut si atmosphæra constet ex decem partibus aëris veri et unâ parte vaporum, motus sonorum celerior erit in subduplicatâ ratione 11 ad 10, vel in integrâ circiter ratione 21 ad 20, quam si propagaretur per undecim partes aëris veri: ideóque motus sonorum supra inventus, augendus erit in hâc ratione. Quo pacto sonus, tempore minuti unius secundi, conficiet pedes 1142.

Hæc ita se habere debent tempore verno et autumnali, ubi aër per calorem temperatum rarescit, et ejus vis elastica nonnihil intenditur. At hyberno tempore, ubi aër per frigus condensatur, et ejus vis elastica remittitur, motus sonorum tardior esse debet in subduplicatâ ratione densitatis; et vicissim æstivo tempore debet esse velocior.

Constat autem per experimenta quod soni tempore minuti unius secundi eundo conficiunt pedes Londinenses plus minus 1142, Parisienses vero 1070.

Cognitâ sonorum velocitate innotescunt etiam intervalla pulsuum. (b) Invenit utique D. Sauveur, factis a se experimentis, quod fistula aperta, cujus longitudo est pedum Parisiensium plus minus quinque, sonum edit ejusdem toni cum sono chordæ quæ tempore minuti unius secundi (c) centies recurrit. Sunt igitur pulsus plus minus centum in spatio pedum Parisiensium 1070, quos sonus tempore minuti unius secundi percurrit; ideóque pulsus unus occupat spatium pedum Parisiensium quasi $10\frac{7}{8}$, id est, duplam circiter longitudinem fistulæ. (d) Unde verosimile est quod latitudines pulsuum, in omnium apertarum fistularum sonis, æquentur duplis longitudinibus fistularum.

Porro cur soni cessante motu corporis sonori statim cessant, neque diutius audiuntur ubi longissimè distamus a corporibus sonoris, quam cum proximè absumus, patet ex Corollario Prop. XLVII. Libri hujus.

(b) * *Invenit utique D. Sauveur in Historiâ Acad. Scient. Paris. an. 1700.*

(c) * *Centies recurrit*, hoc est centum oscillationes ex itu et reditu compositas tempore minuti unius secundi absolvit. Idem D. Sauveur in Monumentis Acad. Paris. an. 1713. oscillationes 101 vel 102 pro ejusdem fistulæ sono posuit.

(d) * *Unde verosimile est*, &c. Idem confirmatur alio experimento ejusdem D. Sauveur, qui loco mox citato invenit quod fistula aperta, cujus longitudo est pedum Parisiensium plus minus 2, sonum edit ejusdem toni cum sono chordæ quæ 243 oscillationes integras tempore minuti unius secundi perficit. Unde si dividatur

numerus 1070 per 243, prodit pulsus unius latitudo ped. Paris. $4\frac{2}{3}$ circiter, id est, dupla circiter longitudo fistulæ. Est autem in organis pneumaticis fistula aperta, quæ patet in superiori et latiori extremo, alteri quo aër fistulam ingreditur, opposito. Si occludatur fistula, octavâ gravius sonat.

Huc usque de sono directo plura diximus, de reflexo pauca adjungenda sunt.

PROPOSITIO.

320. Sonus percipitur tanquam ex eo loco procedens ex quo quasi centro pulsus aëris propagantur. Constat experienciâ.

Sed et cur soni in tubis stentorophonicis valde augmentur, ex allatis principiis manifestum est. Motus enim omnis reciprocus singulis re-

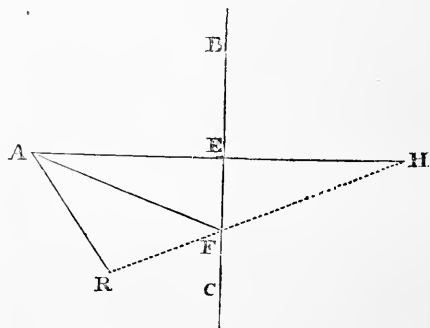
321. *Corol. 1.* Hinc si sonus e centro quovis A directe propagatus in obstaculum planum satis magnum B C incurrat, et ex A ducatur ad B C perpendicularis A E, producatque ad H ut sit E H æqualis A E; sonus reflexus eodem fere modo percipietur ac si ex loco H tanquam centro directè propagaretur (194).

322. *Corol. 2.* Similiter si sonus a centro quovis propagatus in obstaculum quodlibet impingat, a quo ita reflectatur ut post reflexionem radii soni in centrum aliud convergant; sonus reflexus tanquam ex hoc secundo centro propagatus audietur.

323. *Corol. 3.* Unde si radii sonori satis densi ad aurem appellentes et soni unius sensationem producentes, ab aure in diversa centra convergant; locus ex quo sonus propagatur, non bene distinguetur.

324. Si sonus producat in A, et deinde ab obstaculo quovis B C reflectatur tanquam ex centro H propagatus; auditor in loco R sonum directum per A R propagatum percipiet primum; deinde sonum reflexum quasi ex centro H procedentem, postquam motu directo spatium A F, et motu reflexo spatium F R descripsit, audiet. Idem igitur sonus audietur bis, modò tamen distantiarum A R et A F R differentia tanta sit ut sonus directus et sonus reflexus eodem sensibili momento organum auditus non afficiant; nam si sonus reflexus ad aurem perveniret eo tempore, quo soni directi impressio adhuc in eâ perseverat, non geminus, sed intensior tantum sonus audiretur. Porro experientia constat sonos vix posse distingui; si plures quàm 9 circiter syllabæ tempore minuti unius secundi successive producantur; et ideò ne sonus reflexus cum directo confundatur, inter eorum ad aurem appulsus intercedere oportet partem novam minuti unius secundi, quo tempore sonus describit spatium 127 pedum Londinensium circiter. Hoc igitur spatio minor esse non debet distantiarum A R et A F R differentia, ut sonus reflexus distinctè percipi possit in R. Quod si auditor in A locetur, ubi sonus directus producit, et spatium 2 A E quod sonus describit ut ad centrum A post reflexionem in E redeat, sit 127 pedum Londinensium, ideòque A E 63 vel 64 pedum circiter, distingui poterit sonus reflexus a directo. Si plura sint obstacula justis intervallis dissita, in quæ sonus directe offendant, is quasi ex variis locis pluries repetitus audietur; ut cum machinarum bellicarum fragorem vel tonitru boatum circumjecta ædificia vel crassiores nubes pluries referunt. Sæpe etiam obstacula sonum directum mutant, dum vehementiori aëris tremore concussa variè contremunt et aërem repercutiendo detonant.

325. Ex iisdem principiis explicari potest tubæ vocalis seu stentorophonicæ efficacia ad vocem articulata in loca maxime dissita propagandam. Sunt hujusmodi tubæ variarum figurarum, sed omnes satis angustæ, oblongæ et intus perpolitæ, quo sonus in arctum coactus in latius spatium sese diffandere et virium detrimentum pati prohibeatur, ac radii sonori in determinatam plagam confectiores dirigantur. Fabrefiunt ex materia ad concipiendum motum tremulum, quo sonus producit, aptâ, ut sonus hoc partium tubæ et aëris ab ipsis agitati tremulo motu multiplicatus impetum majorem acquirat et longius progrediendi vim habeat. Optima tubarum vocalium figura, auctore clar. Joh. Matthia Hasio, illa censetur, quæ fit ex conversione parabolæ circa ipsius axem, orificio exiguo tubæ, quod os



loquentis suscipit, in ipso foco parabolæ constituto. Hæc enim tubæ radii sonori, saltem magnam partem, reflectuntur ad axem tubæ paralleli (194. Lib. II. et Theor. III. de Parabola Lib. I.). Idem Hasius, quo tubam longiorem, non nimium auctâ amplitudine, reddat, tubum ellipticum oblongum parabolico ita jungit, ut elliptici focus unus concidat cum foco parabolici, et os loquentis in altero elliptici foco constituitur; quâ ratione fit ut radii soni ab ore in tubo elliptico ad focum parabolici partim directi, partim reflexi dirigantur (per Theor. IV. de Ellipsi), et deinde in tubo parabolico, ut modò dictum est, progrediantur. Limbus tubæ, qua parte amplissima est, quæque sonus emittitur, ad formam labiorum recurvandus est, quo minus effectum tubæ turbare possit aëris externi in tubam irruentis motus. Hæc omnia fusè et accuratè exposita vides, in ipsa laudati auctoris Dissertatione Physico-Mathematicâ de Tubis Stentoreis.

* Tubis stentoreis annumerandæ sunt omnes tubæ militares aut venatoriæ sive rectæ sive curvæ, exiguus enim sibilus quem edit tubicen

cursibus a causa generante augeri solet. Motus autem in tubis dilationem sonorum impredientibus, tardius amittitur et fortius recurrit, et propterea a motu novo singulis recursibus impresso magis augetur. Et hæc sunt præcipua phænomena sonorum.

constricto aëre inter labium et tubæ oram, in prodigiosum erumpit sonum, et observabile videtur ea instrumenta ita a parabolâ discrepare ut axis suæ respectu convexa potius sit tuba quàm concava. Incrementum itaque soni non tam pendere videtur ex eo quod sonus secundùm axis tubæ directionem parallelus exeat, quàm ex

eo ipso quod indicat Newtonus, nempe ex motus reciprocatione, ita ut forma tubæ ea esse debeat ut sonus ab uno pariete ad alterum repellatur, extrinsecus sonum derivando, ita tamen ut nonnisi per innumeras reflexiones sive reciprocationes foras emittatur.

SECTIO IX.

De motu circulari fluidorum.

HYPOTHESIS.

resistentiam, quæ oritur ex defectu lubricitatis partium fluidi, cæteris paribus, proportionalem esse velocitati, quâ partes fluidi separantur ^(e) ab invicem.

PROPOSITIO LI. THEOREMA XXXIX.

Si cylindrus solidus infinitè longus in fluido uniformi et infinito circa axem positione datum uniformi cum motu revolvatur, et ab hujus impulsu solo agatur fluidum in orbem, perseveret autem fluidi pars unaquæque uniformiter in motu suo; dico quod tempora periodica partium fluidi sunt ut ipsarum distantie ab axe cylindri.

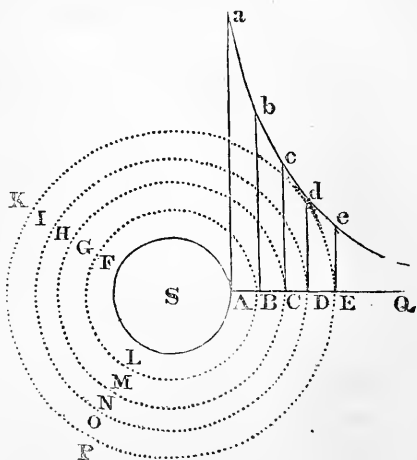
Sit A F L cylindrus uniformiter circa axem S in orbem actus, et circulis concentricis B G M, C H N, D I O, E K P, &c. distinguatur fluidum in orbes cylindricos innumeros concentricos solidos ejusdem crassitudinis. Et quoniam homogeneous est fluidum, impressiones contiguorum orbium in se mutuo factæ erunt (per Hypothesin) ^(a) ut eorum

^(e) * *Ab invicem.* Resistentia quæ oritur ex defectu lubricitatis partium fluidi, cæteris paribus, est semper eadem in spatiis æqualibus, quæcumque fuerit mobilis velocitas; cum in omnibus spatiis æqualibus idem defectus lubricitatis superandus sit. Est igitur hæc resistentia, cæteris paribus, ut spatium quod mobile describit, hoc est, dato tempore, ut velocitas. Quia verò partes contiguæ quæ simul pari velocitate moventur, sese mutuo non atterunt; capiendâ hic est velocitas partium relativa, quâ partes separantur ab invicem. Sed de hac Hypothesi vide scholium sequens.

^(a) 326. * *Ut eorum translationes ab invicem et superficies contiguæ, &c.* Si superficies contiguæ nullâ velocitate relativâ inter se moverentur, aut si essent perfectè lubricæ, nulla foret earum frictio; at si superficies sint asperæ et alia super aliam incedat, nascetur ex partium attritu resistentia, quæ, dato tempore et cæteris paribus, velocitatî superficialium relativæ pro-

portionalis est (per Hyp.). Unde si superficies contiguæ, homogeneæ et æqualis ubique asperitatis sese viribus æqualibus premant, et præterea superficies quæ super alias sibi contiguas incedunt, æquales sint; resistentiæ ex attritu dato tempore genitæ proportionales erunt translationibus superficialium contiguarum ab invicem, cum hujusmodi translationes sint spatia velocitatum relativis dato tempore descripta. Si verò translationes illæ seu velocitates relativæ superficialium contiguarum ponantur æquales; resistentiæ, cæteris paribus, erunt ut superficies contiguæ quæ sese mutuo atterunt. Quare si nec superficies contiguæ, nec earum velocitates relativæ seu translationes ab invicem æquantur; resistentiæ, cæteris paribus, erunt in ratione compositâ ex ratione superficialium contiguarum et ratione translationum ab invicem dato tempore factarum. Impressiones verò contiguorum orbium in se mutuo factæ, sunt ut resistentiæ quibus producuntur.

translationes ab invicem, et superficies contiguæ in quibus impressiones fiunt. Si impressio in orbem aliquem major est vel minor ex parte concavâ quam ex parte convexâ; prævalebit impressio fortior, et motum orbis vel accelerabit vel retardabit, prout in eandem regionem cum ipsius motu vel in contrariam dirigitur. Proinde ut orbis unusquisque in motu suo uniformiter perseveret, debent impressiones ex parte utrâque sibi invicem æquari et fieri in regiones contrarias. (b) Unde cum impressiones sunt ut contiguæ superficies et harum translationes ab invicem, erunt translationes inversè ut superficies, hoc est, inversè ut superficierum distantia ab axe. (c) Sunt autem differentia motuum angularium circa axem ut hæ translationes applicatæ ad distantias, sive ut translationes directè et distantia inversè; hoc est, conjunctis rationibus, ut quadrata distantiarum inversè. Quare si ad infinitæ rectæ $S A B C D E Q$ partes singulas erigantur perpendiculara $A a, B b, C c, D d, E e$, &c. ipsarum $S A, S B, S C, S D, S E$, &c. quadratis reciproce proportionalia, et per terminos perpendicularium duci intelligatur (d) linea curva hyperbolica; erunt summæ diffe-



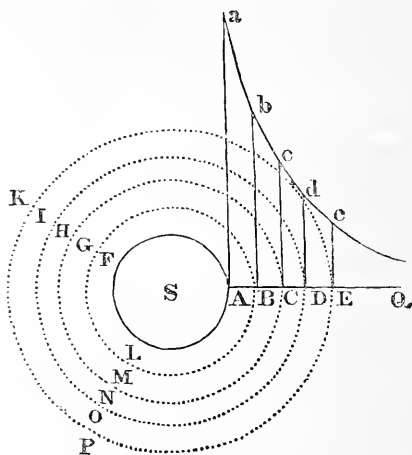
(b) * Unde cum (per Hyp.) orbis unusquisque in motu suo uniformiter perseveret, et proinde impressiones ex utraque parte cujusque orbis in plagas contrarias factæ æquales sint; impressiones illæ, dato tempore, datæ sunt, et ideo ratio composita ex rationibus translationum et superficierum contiguarum, quæ est ut impressio, data est. Translationes igitur dato tempore factæ, sunt inversè ut superficies, hoc est, inversè ut superficierum distantia ab axe: nam cylindrorum ejusdem longitudinis superficies sunt ut distantia ab axe cylindri, et hic omnes superficies cylindricæ; quæ circa axem infinitum revolvuntur, sunt ejusdem longitudinis infinitæ (per Hyp.)

(c) * 527. Sunt autem differentia motuum angularium, &c. Motus angulares dicuntur ii, quibus singula puncta A, B, C, D, E , &c. radiis ad axem cylindri perpendiculariter ductis angulos describunt. Sunt igitur anguli illi quasi spatia uniformi motu descripta, et ideo motus angulares sunt ut anguli descripti directe et tem-

pora quibus describuntur inversè, et dato tempore sunt ut anguli descripti. Hinc, dato tempore, motuum angularium differentia sunt ut differentia angulorum descriptorum, hoc est (154. Lib. I.) ut translationes punctorum seu superficierum ab invicem directè et distantia ab axe inversè: nam translationes illæ sunt arcus circulares quos singula puncta per suam velocitatem relativam describunt, et distantia ab axe sunt illorum arcuum radii. Sed translationes dato tempore factæ, sunt (ex demonstr.) ut distantia ab axe inversè. Quare differentia motuum angularium, dato tempore, sunt ut quadrata distantiarum inversè.

(d) * Linea curva hyperbolica. Quoniam ordinatæ $A a, B b$, &c. sunt inversè ut abscissarum $S A, S B$, &c. quadrata; crescente abscissâ ac sine fine productâ; correspondens ordinatâ decrescit et numquam evanescit, et ideo recta $S Q$ est curvæ asymptotus; et simili ratione patet rectam per S ductam normaliter ad $S Q$ esse alteram curvæ asymptotum.

rentiarum, ^(e) hoc est, motus toti angulares, ut respondentes summæ linearum A a, B b, C c, D d, E e, id est, si ad constituendum medium uniformiter fluidum, orbium numerus augeatur et latitudo minuatur in infinitum, ut areæ hyperbolicæ his summis analogæ A a Q, B b Q, C c Q, D d Q, E e Q, &c. Et ^(f) tempora motibus angularibus reciprocè proportionalia erunt etiam his areis reciprocè proportionalia. Est igitur tempus periodicum particulæ cujusvis D reciprocè ut area D d Q, hoc est (per notas curvarum quadraturas) ^(g) directè ut distantia S D. Q. e. d.



^(h) *Corol. 1.* Hinc motus angulares particularum fluidi sunt reciprocè ut ipsarum distantiarum ab axe cylindri, et velocitates absolutæ sunt æquales.

Corol. 2. Si fluidum in vase cylindrico longitudinis infinitæ contineatur, et cylindrum alium interiorem contineat, revolvatur autem cylindrus uterque circa axem communem, sintque revolutionum tempora ut ipsorum semi-diametri, et perseveret fluidi pars unaquæque in motu suo:

^(e) * *Hoc est, motus toti angulares.* Quoniam solo cylindri A F L impulsu agitur fluidum in orbem (per Hyp.), necesse est ut motus angularis partium fluidi, crescente earum distantia ab axe cylindri, continuo decrescat, ac tandem ad distantiam infinitam evanescat. Unde motus totus angularis puncti A seu orbis A F L est omnium maximus, et motus totus angularis puncti cujuslibet C æqualis est summæ omnium differentiarum motuum angularium punctorum D, E et sequentium in infinitum (106. Lib. I.); ideoque motus toti angulares sunt ut respondentes summæ linearum A a, B b, C c, D d, E e, &c. in infinitum.

^(f) * 528. *Tempora periodica motibus angularibus reciprocè proportionalia.* Motus angulares sunt ut anguli descripti directè et tempora quibus describuntur inversè (526); et propterea si anguli descripti capiantur æquales quatuor rectis, ut totus circulus describatur et tempora fiant temporibus periodicis æqualia, motus angulares erunt ut tempora periodica inversè.

^(g) * *Directè ut distantia S D.* Areæ D d Q momentum est $D d \times D E$; et ideo, ob ordinatam D d quadrato abscissæ S D reciprocè

proportionalem, momentum illud est ut $\frac{D E}{S D^2}$, et (per Cas. 4. Lem. II. Libri hujus) area D d Q est ut $\frac{1}{S D}$, quæ quantitas negativa prodit, quia area D d Q abscissæ D S non adjacet, sed ad partes contrarias vergit in infinitum. Est igitur tempus periodicum particulæ cujusvis D reciprocè ut $\frac{1}{S D}$, hoc est, directè ut S D.

^(h) * *Corol. 1.* Ex demonstratis, motus angulares partium fluidi sunt reciprocè ut tempora periodica, hoc est, reciprocè ut illarum distantiarum ab axe cylindri. Velocitates verò absolutæ, ut pote uniformes, sunt ut circumferentiæ descriptæ, seu ut distantiarum ab axe cylindri directè et tempora periodica inversè, hoc est, ut distantiarum directè et distantiarum inversè, ideoque sunt in ratione æqualitatis. Hinc verò (per Cor. 5. Prop. IV. Lib. I.) vires centrifugæ particularum æqualium fluidi sunt reciprocè ut ipsarum distantiarum ab axe cylindri; et propterea vis quæ tota superficies cylindrica nititur ab axe cylindri re-

(ⁱ) erunt partium singularum tempora periodica ut ipsarum distantiae ab axe cylindrorum.

Corol. 3. Si cylindro et fluido ad hunc modum motis addatur vel auferatur communis quilibet motus angularis; quoniam hoc novo motu non mutatur attritus mutuus partium fluidi, non mutabuntur motus partium inter se. Nam translationes partium ab invicem pendent ab attritu. Pars quaelibet in eo perseverabit motu, qui, attritu utrinque in contrarias partes facto, non magis acceleratur quàm retardatur.

Corol. 4. Unde si toti cylindrorum et fluidi systemati auferatur motus omnis angularis cylindri exterioris, (^k) habebitur motus fluidi in cylindro quiescente.

Corol. 5. Igitur si fluido et cylindro exteriore quiescentibus, revolvatur cylindrus interior uniformiter; communicabitur motus circularis fluido, et paulatim per totum fluidum propagabitur; nec prius desinet augeri quam fluidi partes singulae motum Corollario quarto definitum (^l) acquirant.

Corol. 6. Et quoniam fluidum conatur motum suum adhuc latius propagare, hujus impetu circumagetur etiam cylindrus exterior nisi violenter detentus; et accelerabitur ejus motus (^m) quoad usque tempora periodica cylindri utriusque æquentur inter se. Quod si cylindrus exterior violenter detineatur, conabitur is motum fluidi retardare; et nisi cylindrus inte-

cedere, est ut eadem superfices directè et distantia ejus ab axe inversè, et ideò data est.

(ⁱ) * *Erunt partium singularum tempora periodica ut, &c.* Patet, quia cylindrus exterior uniformi velocitate motus locum tenet superficiei cylindricæ, quæ in demonstratione adhibita est.

(^k) * *Habebitur motus fluidi in cylindro quiescente.* Sit E K P cylindrus exterior, cujus tempus periodicum in hypothesi Corollarii 2. dicatur t E; et quoniam in eadem hypothesi velocitates particularum absolutæ sunt æquales (per Cor. 1.), singulae illæ particulae spatia æqualia eodem tempore t E describunt, hoc est, spatia æqualia peripheriæ E K P, quam punctum E tempore t E percurrit. Jam si toti cylindrorum et fluidi systemati auferatur motus omnis angularis. Cylindri exterioris; ex spatio E K P, quod singulae particulae tempore t E describunt, auferenda erit integra circuli peripheria, quam particula quaelibet seorsim describit, ut habeatur spatium quod eadem particula eodem tempore t E percurrit in cylindro quiescente. Erit igitur E K P — D I O spatium quod particula quævis D tempore t E describit, postquam motus omnis angularis cylindri exterioris ablati est. Quia verò particulae singulae revolvuntur æqualiter (per Hyp.), erit spatium E K P — D I O ad D I O, sive S E — S D

ad S D, ut tempus t E ad tempus periodicum particulæ D in cylindro quiescente; et ideò si

hoc tempus dicatur T D, erit $T D = \frac{S D \times t E}{D E}$;

et simili modo tempus periodicum particulæ A in eadem hypothesi (quod dicatur T A) = $\frac{S A \times t E}{A E}$; unde habetur t E = $\frac{A E \times T A}{S A}$.

et ideò $T D = \frac{S D \times A E \times T A}{S A \times D E}$. Dato

igitur tempore periodico cylindri interioris, dabitur tempus periodicum particulæ cujusvis fluidi in cylindro quiescente. Quia verò A E, S A et T A datæ sunt, erit T D ut $\frac{S D}{D E}$, hoc est, particularum fluidi tempora periodica sunt ut distantiae ipsarum ab axe cylindri interioris directè et distantiae earumdem a superficiei cylindri quiescentis inversè.

(^l) * *Acquirant.* Patet per Cor. 3.

(^m) * *Quoad usque tempora periodica cylindri utriusque æquantur.* Tamdiu enim cylindrus interior atterit et urget fluidi partes, motumque ipsis eâ actione communicat qui ad cylindrum exteriorem transit, quamdiu omnium partium contiguarum motus angulares inæquales sunt, seu quamdiu tempora periodica non æquantur inter se.

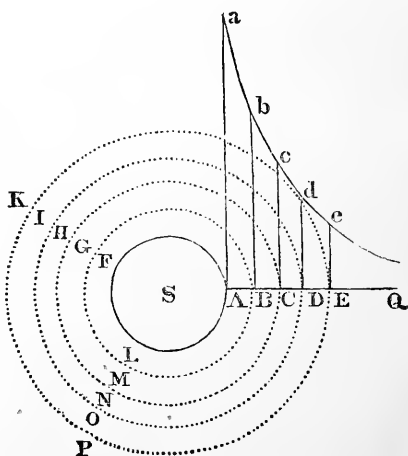
rior vi aliquâ extrinsecus impressâ motum illum conservet, efficiet ut idem paulatim cesset.

Quæ omnia in aquâ profundâ stagnante experiri licet.

PROPOSITIO LII. THEOREMA XL.

Si sphaera solida, in fluido uniformi et infinito, circa axem positione datum uniformi cum motu revolvatur, et ab hujus impulsu solo agatur fluidum in orbem; perseveret autem fluidi pars unaquæque uniformiter in motu suo: dico quod tempora periodica partium fluidi erunt ut quadrata distantiarum a centro sphaeræ.

Cas. 1. Sit A F L sphaera uniformiter circa axem S in orbem acta, et circulis concentricis B G M, C H N, D I O, E K P, &c. distinguatur fluidum in orbes innumeros concentricos ejusdem crassitudinis. Finge autem orbes illos esse solidos; et quoniam homogeneous est fluidum, impressiones contiguorum orbium in se mutuo factæ, erunt (per hypothesin) ut eorum translationes ab invicem et superficies contiguæ in quibus impressiones fiunt. Si impressio in orbem aliquem major est vel minor ex parte concavâ quàm ex parte convexâ; prævalet impressio fortior, et velocitatem orbis vel accelerabit vel retardabit, prout in eandem regionem cum ipsius motu vel in contrariam dirigitur. Proinde ut orbis unusquisque in motu suo perseveret uniformiter, debebunt impressiones ex parte utrâque sibi invicem æquari, et fieri in regiones contrarias. Unde cum impressiones sint ut contiguæ superficies et harum translationes ab invicem; erunt translationes inversè ut superficies, ⁽ⁿ⁾ hoc est, inversè ut quadrata distantiarum superficierum a centro. Sunt autem differentiae motuum angularium circa axem ut hæ translationes applicatæ ad distan-



⁽ⁿ⁾ * Hoc est, inversè ut quadrata distantiarum superficierum a centro. Nam superficies sphaericæ, ut pote similes, sunt ut quadrata radiorum seu distantiarum a centro.

tias, sive ut translationes directè et distantiae inversè; hoc est, conjunctis rationibus ut cubi distantiarum inversè. Quare si ad rectæ infinitæ $S A B C D E Q$ partes singulas erigantur perpendiculara $A a, B b, C c, D d, E e$, &c. ipsarum $S A, S B, S C, S D, S E$, &c. cubis reciproçè proportionalia, erunt summæ differentiarum, hoc est, motus toti angulares, ut respondentés summæ linearum $A a, B b, C c, D d, E e$: id est (si ad constituendum medium uniformiter fluidum, numerus orbium augeatur et latitudo minuatur in infinitum) ut areæ hyperbolicæ his summis analogæ $A a Q, B b Q, C c Q, D d Q, E e Q$, &c. Et tempora periodica motibus angularibus reciproçè proportionalia erunt etiam his areis reciproçè proportionalia. Est igitur tempus periodicum orbis cujusvis $D I O$ reciproçè ut area $D d Q$, hoc est, per notas curvarum quadraturas, (^o) directè ut quadratum distantiae $S D$. (^p) Id quod volui primò demonstrare.

(^q) *Cas. 2.* A centro sphæræ ducantur infinitæ rectæ quàm plurimæ, quæ cum axe datos contineant angulos, æqualibus differentiis se mutuo

(^o) * *Directè ut quadratum distantiae $S D$.* Areæ $D d Q$ momentum est $D d \times D E$, ideòque, ob ordinatam $D d$ cubo abscissæ $S D$ reciproçè proportionalem, momentum illud est

ut $\frac{D E}{S D^3}$, et propterea (per *Cas. 4. Lem. II.*

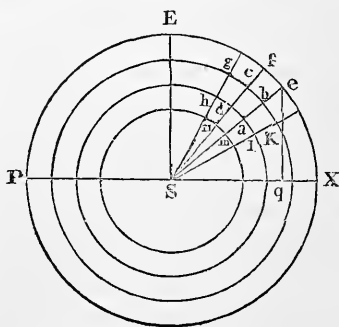
Libri hujus) area fluens $D d Q$ est ut $\frac{1}{S D^2}$,

quæ negativa prodit, quia non adjacet abscissæ $D S$, sed in plagam contrariam $D Q$ vergit. Est igitur tempus periodicum orbis cujusvis $D I O$ reciproçè ut $\frac{1}{S D^2}$, hoc est, directè ut quadratum distantiae $S D$.

(^p) * *Id quod volui primò demonstrare.* Casûs primi demonstratio valet, si medium sphæræ circumfusum ex innumeris orbibus solidis, tenuissimis ac concentricis constare fingatur. In casibus secundo et tertio singuli illi orbés sphærici in innumeros annulos, et annuli singuli in tenuissimas particulas, ad constituendum medium fluidum, dividuntur.

(^q) * *Cas. 2.* A centro sphæræ S ducantur rectæ quàm plurimæ, longitudine infinitæ $S k, S b, S c, S g$, &c., quæ æquales angulos $k S b, b S c, c S g$, &c. complectantur; et his rectis circa axem $P X$ revolutis et superficies conicas describentibus, concipe orbés in annulos innumeros secari. Nam cum superficies $P f e X$ circa axem $P X$ revolvitur, singuli arcus $k b, b c, c g, e f, a l$, &c. portiones superficierum sphæricarum annulares describunt, et particula quælibet ut $b c d a$, describit annulum solidum. Annulus unusquisque, ut ille qui revolutione superficiei $a b c d$ describitur, habebit annulos

quatuor sibi contiguos, unum interiorem ex revolutione figuræ $m a d n$, alterum exteriorem ex revolutione figuræ $b e f c$, et duos laterales ex revolutione figurarum $k b a l$ et $c g h d$. Attritu interioris et exterioris non potest annulus unusquisque nisi in motu juxta legem casûs primi factò, æqualiter et in partes contrarias urgeri. Alioquin partes fluidi non perseverarent in motu



suo uniformiter, sed intermedius iste annulus (contra *Hyp.*) in motu suo acceleraretur vel retardaretur, ut de orbibus integris ostensum est in casu primo. Et propterea annulorum series quælibet a globo in infinitum recta pergens et inter duas proximas superficies conicas comprehensa, qualis est series annulorum quos figuræ $m a d n, a b c d, b e f c$, &c. circa axem $P X$ rotatæ describunt, movebitur pro lege casûs primi, nisi, &c.

superantes; et his rectis circa axem revolutis concipe orbes in annulos innumeros secari; et annulus unusquisque habebit annulos quatuor sibi contiguos, unum interiorem, alterum exteriorem et duos laterales. Attritu interioris et exterioris non potest annulus unusquisque, nisi in motu juxta legem casus primi facto, æqualiter et in partes contrarias urgeri. Patet hoc ex demonstratione casus primi. Et propterea annulorum series quælibet a globo in infinitum rectâ pergens, movebitur pro lege casus primi, nisi quâtenus impeditur ab attritu annulorum ad latera. At in motu hâc lege facto attritus annulorum ad latera nullus est; neque idèò motum, quo minus hâc lege fiat, impedit. Si annuli (^r) qui a centro æqualiter distant, vel citius revolverentur vel tardius (^s) juxta polos quàm juxta eclipticam; tardiores accelerarentur, et velociores retardarentur ab attritu mutuo, et sic vergerent semper tempora periodica ad æqualitatem, pro lege casûs primi. Non impedit igitur hic attritus quo minus motus fiat secundum legem casus primi, et propterea lex illa obtinebit: hoc est, annulorum singulorum tempora periodica erunt ut quadrata distantiarum ipsorum a centro globi. Quod volui secundò demonstrare.

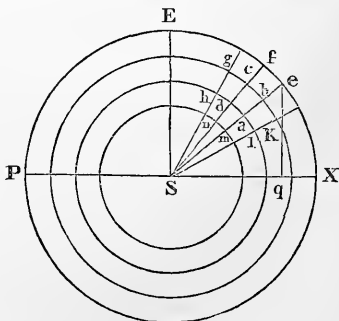
Cas. 3. Dividatur jam annulus unusquisque sectionibus transversis in particulas innumeras constituentes substantiam absolutè et uniformiter fluidam; et quoniam hæ sectiones non spectant ad legem motûs circularis, sed ad constitutionem fluidi solummodo conducunt, perseverabit motus circularis ut prius. His sectionibus annuli omnes quam minimi asperitatem et vim attritus mutui aut non mutabunt, (^t) aut mutabunt æqualiter. Et manente causarum proportionem manebit effectuum proportio, hoc est, proportio motuum et periodicorum temporum. Q. e. d. Cæterum cùm motus circularis, et inde orta vis centrifuga, (^u) major sit ad eclipticam

(^r) * Qui a centro æqualiter distant, seu qui sunt ex eodem orbe resecti, quales sunt annuli ex figurarum l k b a, a b c d, d c g h, et revolutione descripti.

(^s) * Juxta polos X et P, quam juxta æqualem, quem recta S E ad axem P X perpendicularis rotata describit.

(^t) * Aut mutabunt æqualiter. Quoniam enim hæ sectiones non nisi ad fluiditatem singulis annulis conciliandam factæ sunt, et fluidum homogeneum supponitur; si inde mutetur annulorum asperitas et vis attritus mutui, mutabitur æqualiter seu in data ratione. Et idcirco manente resistantiarum et impressionum, quæ ex mutuo partium attritu oriuntur, proportione, manebit effectuum inde productorum proportio, hoc est, proportio motuum et periodicorum temporum; et propterea partium singularum tempora periodica erunt, ut in superioribus casibus, proportionalia quadratis distantiarum ipsarum a centro globi.

(^u) * Major sit ad eclipticam quàm ad polos. Quoniam particularum E et e in eodem orbe



constitutarum tempora periodica æquantur, ipsarum vires centrifugæ sunt inter se ut radii cir-

quàm ad polos; debebit causa aliqua adesse quâ particulæ singulæ in circulis suis retineantur; ne materia, quæ ad eclipticam est, recedat semper a centro et per exteriora vorticis migret ad polos, indeque per axem ad eclipticam circulatione perpetuâ revertatur.

(^x) *Corol. 1.* Hinc motus angulares partium fluidi circa axem globi, sunt reciprocè ut quadrata distantiarum a centro globi, et velocitates absolutæ reciprocè ut eadem quadrata applicata ad distantias ab axe.

Corol. 2. Si globus in fluido quiescente simili et infinito circa axem positione datum uniformi cum motu revolvatur, communicabitur motus fluido in morem vorticis, et motus iste paulatim propagabitur in infinitum; neque prius cessabit in singulis fluidi partibus accelerari, quam tempora periodica singularum partium sint ut quadrata distantiarum a centro globi.

Corol. 3. Quoniam vorticis partes interiores (^y) ob majorem suam velocitatem atterunt et urgent exteriores, motumque ipsis eâ actione perpetuo communicant, et exteriores illi eandem motus quantitatem in alios adhuc exteriores simul transferunt, eâque actione (^z) servant quantitatem motûs sui planè invariata; patet quod motus perpetuo transfertur a centro ad circumferentiam vorticis, et per infinitatem circumferentiæ absorbetur. Materia inter sphæricas duas quasvis superficies vortici concentricas nunquam accelerabitur, eo quòd motum omnem a materiâ interiore acceptum transfert semper in exteriorem.

Corol. 4. Proinde ad conservationem vorticis constanter in eodem movendi statu, requiritur principium aliquod activum, a quo globus eandem

colorum quos describunt (per Cor. 3. Prop. IV. Lib. I.), hoc est, ut perpendiculares ad axem E S et e q. Vis igitur centrifuga eo major est, quo magis particula accedit ad æquatorem seu eclipticam S E, et in æquatore maxima est, in polo nulla.

(^x) 328. * *Corol. 1.* Motus angulares sunt reciproce ut tempora periodica (327), ideòque (ex demonstratis) reciprocè ut quadrata distantiarum a centro globi. Velocitates absolutæ particularum sunt ut peripheriæ circulorum quas describunt, seu ut ipsarum distantia ab axe directè, et tempora periodica inversè; et propterea sunt ut distantia ab axe directè et quadrata distantiarum a centro globi inversè, ac proinde sunt reciprocè ut eadem quadrata applicata ad distantias ab axe. Unde velocitates absolutæ particularum in æquatore sunt reciprocè ut ipsarum distantia a centro globi, et earum vires centrifugæ reciprocè ut cubi distantiarum a centro globi (per Cor. 1. Prop. IV. Lib. I.)

(^y) * *Ob majorem suam velocitatem, &c. Ve-*

locitates angulares orbium a centro globi minus distantium majores sunt (per Cor. 1.) quàm velocitates angulares orbium exteriorum et a centro vorticis remotiorum; sed orbes interiores excessu velocitatis angularis, quo relative ad orbes exteriores moventur, hos atterunt et urgent, *motumque ipsis, &c.*

(^z) * *Servant quantitatem motûs sui planè invariata.* Quia (per Hyp.) ea est vorticis conditio, ut unaquæque fluidi pars perseveret in suo motu uniformiter, et in eadem a centro distantia eodem semper tenore moveatur; et tamen, propter orbium interiorum majorem velocitatem angularem attritumque continuum, orbes exteriores perpetuò urgentur et ad motum accelerandum incitantur; necesse est ut motus perpetuo transferatur a centro ad circumferentiam vorticis, et per infinitatem extimæ circumferentiæ absorbeat. Quâ ratione fit ut orbium singulorum, qui eandem motûs quantitatem in alios exteriores simul et semper transferunt, idem sit perpetuò motus.

semper quantitatem motûs accipiat, quam imprimit in materiam vorticis. Sine tali principio necesse est ut globus et vorticis partes interiores, propagantes semper motum suum in exteriores, neque novum aliquem motum recipientes, tardescant paulatim et in orbem agi desinant.

Corol. 5. Si globus alter huic vortici ad certam ab ipsius centro distantiam innataret, et interea circa axem inclinatione datum vi aliquâ constanter revolveretur; hujus motu raperetur fluidum in vorticem: et primo revolveretur hic vortex novus et exiguus unâ cum globo circa centrum alterius, et interea latius serperet ipsius motus, et paulatim propagaretur in infinitum, ad modum vorticis primi. Et eâdem ratione, quâ hujus globus raperetur motu vorticis alterius, raperetur etiam globus alterius motu hujus, sic ut globi duo circa intermedium aliquod punctum revolventur, seque mutuo ob motum illum circularem fugerent, nisi per vim aliquam cohibiti. Postea si vires constanter impressæ, quibus globi in motibus suis perseverant, cessarent, et omnia legibus mechanicis permetterentur, languesceret paulatim motus globorum (ob rationem in Corol. 3. et 4. assignatam) et vortices tandem conquiescerent.

Corol. 6. Si globi plures datis in locis circum axes positione datos certis cum velocitatibus constanter revolverentur, fierent vortices totidem in infinitum pergentes. Nam globi singuli eâdem ratione quâ unus aliquis motum suum propagat in infinitum, propagabunt etiam motus suos in infinitum, adeò ut fluidi infiniti pars unaquæque eo agitetur motu qui ex omnium globorum actionibus resultat. Unde vortices non definientur certis limitibus, sed in se mutuo paulatim excurrent; globique per actiones vorticum in se mutuo, perpetuo movebuntur de locis suis, uti in Corollario superiore expositum est; neque certam quamvis inter se positionem servabunt, nisi per vim aliquam retenti. Cessantibus autem viribus illis quæ in globos constanter impressæ conservant hosce motus, materia ob rationem in Corollario tertio et quarto assignatam, paulatim requiescet et in vortices agi desinet.

Corol. 7. Si fluidum simile claudatur in vase sphærico, ac globi in centro consistentis uniformi rotatione agatur in vorticem, globus autem et vas in eandem partem circa axem eundem revolvantur, sintque eorum tempora periodica ut quadrata semi-diametrorum: partes fluidi non prius perseverabunt in motibus suis sine acceleratione et retardatione, quàm sint eorum tempora periodica ut quadrata distantiarum a centro vorticis.

(^a) Alia nulla vorticis constitutio potest esse permanens.

(^a) * *Alia nulla vorticis constitutio potest esse permanens.* Nam (ex demonstr.) ea debet esse vorticis constitutio, ut pars quælibet fluidi possit in suo motu uniformiter perseverare, et ut attritu

Corol. 8. Si vas, fluidum inclusum, et globus servant hunc motum, et motu præterea communi angulari circa axem quemvis datum revolvantur; quoniam hoc motu novo non mutatur attritus partium fluidi in se invicem, non mutabuntur motus partium inter se. Nam translationes partium inter se pendent ab attritu. Pars quælibet in eo perseverabit motu, quo fit ut attritu ex uno latere non magis tardetur quàm acceleretur attritu ex altero.

(b) *Corol. 9.* Unde si vas quiescat ac detur motus globi, dabitur motus fluidi. Nam concipe planum transire per axem globi et motu contrario

ex uno latere non magis tardetur quàm acceleretur attritu ex altero latere.

(b) * *Corol. 9.* Fluidum simile in vase sphærico E K P clausum ita agatur in vorticem, ut tandem partes fluidi in motibus suis sine acceleratione et retardatione perseverent, quemadmodum in Corollario 7. expositum est. In hac hypothesi velocitates particularum in æquatore existentium sunt ut distantiae a centro S inversè (328), et ideò ut S D ad S E, sive, ut peripheria D I O ad peripheriam E K P ita est peripheria E K P (quam particula E tempore suo periodico t E describit) ad spatium quod alia quævis particula D eodem tempore conficit, quod proinde spatium erit $\frac{E K P^2}{D I O}$. Quiescat

jam vas sphæricum, hoc est, toti systemati vorticis auferatur vasis motus angularis, et particula

D tempore t E describet spatium $\frac{E K P^2}{D I O}$ —

D I O. Sed hoc spatium est ad circumferentiam D I O, aut quod idem est, $S E^2 - S D^2$ est ad $S D^2$, ut tempus t E ad tempus periodicum (T D) particulae D in vase quiescente,

quod proinde tempus erit $\frac{S D^2 \times t E}{S E^2 - S D^2}$.

Et simili modo tempus periodicum particulae A, quod dicatur T A, erit in vase quiescente

$\frac{S A^2 \times t E}{S E^2 - S A^2}$. Si itaque detur motus globi,

seu tempus periodicum T A, dabitur tempus

$t E = \frac{T A \times [S E^2 - S A^2]}{S A^2}$, et inde

dabitur tempus periodicum T D = $\frac{S D^2 \times t E}{S E^2 - S D^2}$

= $\frac{S D^2 \times T A \times [S E^2 - S A^2]}{S A^2 \times [S E^2 - S D^2]}$. Si igitur

vas quiescat ac detur motus globi, dabitur motus fluidi ad quamlibet datam a centro distantiam.

Concipe nunc planum transire per axem globi et motu contrario revolvì; et pone summam

temporis revolutionis hujus et revolutionis globi esse ad tempus revolutionis globi, ut quadratum

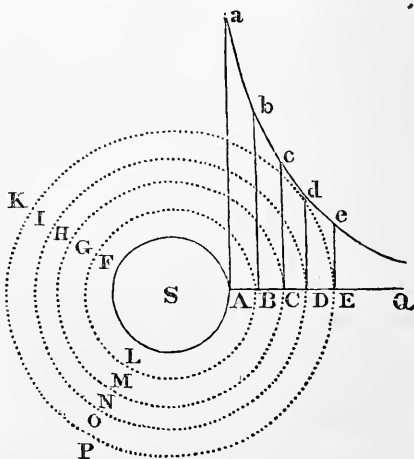
semi-diametri vasis ad quadratum semi-diametri globi; sive pone $S A^2$ ad $S E^2$ ut T A ad quar-

um, quod erit $\frac{S E^2 \times T A}{S A^2} = \frac{S E^2 \times t E}{S E^2 - S A^2}$;

et tempus periodicum plani erit $\frac{S E^2 \times t E}{S E^2 - S A^2}$

— $\frac{S A^2 \times t E}{S E^2 - S A^2} = t E$, quia T A = $\frac{S A^2 \times t E}{S E^2 - S A^2}$.

Quare planum, quo hic utitur Newtonus, ita movetur ut revolutionem suam absolvat eodem tempore t E, quo vas suam revolutionem perficit in hyp. Cor. 7. Sit X tempus periodicum particulae D respectu plani in vase quiescente; et quia planum et vortex in regiones contrarias moventur, erit T D ad X ut circumferentia



D I O, quam particula D tempore periodico T D describit, ad ejusdem circumferentiae

partem quam eadem particula tempore X per-

currit; et ideò pars illa erit $\frac{X \times D I O}{T D} =$

$\frac{X \times D I O \times [S E^2 - S D^2]}{S D^2 \times t E}$, et pars resi-

dua circumferentiae D I O, quam planum eodem

tempore X conficit, erit $\frac{D I O \times X}{T D} =$

$\frac{S D^2 \times D I O \times t E - X \times D I O \times [S E^2 - S D^2]}{S D^2 \times t E}$.

revolvi; et pone summam temporis revolutionis hujus et revolutionis globi esse ad tempus revolutionis globi, ut quadratum semi-diametri vasis ad quadratum semi-diametri globi; et tempora periodica partium fluidi, respectu plani hujus, erunt ut quadrata distantiarum suarum a centro globi.

Corol. 10. Proinde si vas vel circa axem eundem cum globo, vel circa diversum aliquem datâ cum velocitate quâcumque moveatur, dabitur motus fluidi. Nam si systemati toti auferatur vasis motus angularis, manebunt motus omnes iidem inter se qui prius, per Corol. 8. (c) Et motus isti per Corol. 9. dabuntur.

Quia verò planum tempore t E uniformi motu revolutionem suam DIO absolvit, est tE ad X ut DIO ad spatium modo inventum, seu ut $SD^2 \times tE$ ad $SD^2 \times tE - X \times [SE^2 - SD^2]$; unde habetur $SD^2 \times X \times tE = SD^2 \times tE^2 - X \times tE \times [SE^2 - SD^2]$, et ideo $SE^2 \times X = SD^2 \times tE$, ac proinde

$$\text{tempus } X = \frac{SD^2 \times tE}{SE^2}. \quad \text{Cum ergo } tE \text{ et}$$

SE sint quantitates datæ, tempus periodicum X particulæ fluidi D respectu plani prædicti est ut SD^2 , sive ut quadratum distantiae a centro globi. Et quia omnium particularum in eodem

PROBLEMA.

529. Sphæra solida in fluido infinito et in eadem a centro distantia similari, sed in diversis distantis in datâ quâvis distantiarum ratione in æqualiter denso circa axem positione datum uniformi cum motu revolvatur et a sphæræ impulsu solo agatur fluidum in orbem, perseveret autem fluidi pars unaquæque uniformiter in motu suo, sitque resistentia quæ oritur ex defectu lubricitatis partium fluidi, cæteris paribus, in ratione compositâ ex ratione quâlibet densitatis et ratione etiam quâcumque velocitatis relativæ, oportet invenire tempora periodica partium fluidi.

Distinguatür fluidum in orbes innumeros concentricos ejusdem crassitudinis ut in demonstratione Prop. LII. factum est; dicanturque $AD = x$, fluidi densitas in loco $D = z$, translatio orbium ab invicem tempore dato $= v$, densitas z sit proportionalis dignitati x^n , et resistentia, cæteris paribus, sit ut $z^m v^p$, seu ut $x^{mn} v^p$. Quia superficies spherica DIO , est ut x^2 , erit impressio orbis DIO , in orbem contiguum, ut $x^2 +^{mn} v^p$; sed ut orbis unusquisque in motu suo uniformiter perseveret, debent impressiones ex parte utrâque sibi invicem æquari et fieri in regiones contrarias, ac proinde quantitas $x^2 +^{mn} v^p$, debet esse constans. Quare erit

$$v^p \text{ ut } \frac{1}{x^2 +^{mn} v^p} \text{ et } v \text{ ut } \frac{1}{\frac{2 + mn}{2} x^p}. \quad \text{Sunt autem}$$

differentiæ motuum angularium circa axem ut translationes orbium applicatæ ad distantias,

$$\text{hoc est, ut } \frac{v}{x}, \text{ sive ut } \frac{1}{\frac{2 + mn}{2} x^{\frac{p}{2} + 1}}. \quad \text{Sit jam}$$

$DE = dx$, et ordinata Dd , ad curvam $abde$,

$$\text{sit ut } \frac{1}{\frac{2 + mn}{2} x^{\frac{p}{2} + 1}} \text{ erit summa differentiarum,}$$

hoc est, motus totus angularis ut area DdQ , quæ

$$\text{est ut } \int \frac{dx}{\frac{2 + mn}{2} x^{\frac{p}{2} + 1}} = - \frac{p}{2 + mn} \times$$

orbe constitutarum tempora periodica æquantur inter se; earum omnium tempora periodica respectu plani sunt ut quadrata distantiarum suarum a centro globi. $Q. e. d.$

(c) * Et motus isti per Corol. 9. dabuntur, proindeque si cum iis motibus datis componatur vasis motus angularis datus, dabitur motus fluidi in vase data cum velocitate moto.

Corol. 11. Si vas et fluidum quiescant et globus uniformi cum motu revolvatur, propagabitur motus paulatim per fluidum totum in vas, et circumagetur vas nisi violenter detentum, neque prius desinent fluidum et vas accelerari, quàm sint eorum tempora periodica æqualia temporibus periodicis globi. Quod si vas vi aliquâ detineatur vel revolvatur motu quovis constanti et uniformi, deveniet medium paulatim ad statum motûs in Corollariis 8. 9. et 10. definiti, nec in alio unquam statu quocunque perseverabit. Deinde verò si, viribus illis cessantibus quibus vas et globus certis motibus revolvebantur, permittatur systema totum legibus mechanicis; vas et globus in se invicem agent mediante fluido, neque motus suos in se mutuo per fluidum propagare prius cessabunt, quàm eorum tempora periodica æquentur inter se, et systema totum ad instar corporis unius solidi simul revolvatur.

$\frac{1}{x \frac{2+m}{p}}$; et tempora periodica motibus angu-

laribus reciprocè proportionalia, sunt ut $x \frac{2+m}{p}$,

neglectâ quantitate constante $\frac{p}{2+m}$. Q. e. i.

330. *Corol. 1.* Si resistentia, cæteris paribus, sit ut velocitas, et tempora periodica sint in ratione sesquuplicatâ distantiarum a centro, erit

$p = 1$, et $\frac{2+m}{p} = \frac{2}{2}$, ideòque $n = -\frac{1}{2m}$.

Sed cùm resistentia proportionalis supponatur densitatis dignitati cujus index est m , et crescente densitate crescat, necesse est ut m sit numerus positivus, ac proindè n numerus negativus. Quarè densitas, ut pote proportionalis dignitati x^n , crescente distantiâ in hypothesi Corollarii hujus decrescet. Hoc autem repugnat. Non materia vorticis eò densior esse debet quò longius distat a centro. Conatur enim materia per motum suum circularem recedere ab axe vorticis et proptereâ premit materiam omnem ulteriorem, eamque condensat, si condensari possit. Prætereâ velocitas absoluta partium fluidi in æquatore vorticis est ut earum distantia a centro globi directè et tempus periodicum inversè, hoc est,

in hypothesi Cor. hujus ut $\frac{x}{x \frac{2}{2}} = \frac{1}{x \frac{2}{2}}$, ideòque

vis centrifuga partium (per Cor. I. Prop. IV.

Lib. I.) cæteris paribus est ut $\frac{1}{x \frac{2}{2}}$, et proindè

decrescit in ratione duplicatâ distantie auctæ. Ut igitur vortex ad statum permanentem reducat, oportet ut partes densiores a centro recedant et rariores ad illud accedant, quo vis centrifuga partium centro propiorum, quæ ob majorem velocitatem et minorem distantiam nimia est, per minorem densitatem minuatur.

331. *Corol. 2.* Si tempora periodica sint in ratione sesquuplicatâ distantiarum a centro, hoc

est, si $\frac{2+m}{p} = \frac{2}{2}$, erit $p = \frac{4+2m}{2}$,

et ideò resistentia, cæteris paribus, ut velocitatis

dignitas cujus exponens est $\frac{4+2m}{2}$. Sed

(ex dem. Cor. 1.) m et n sunt numeri positivi. Quarè tempora periodica non possunt esse in ratione sesquuplicatâ distantiarum a centro, quin

index $\frac{4+2m}{2}$ sit unitate major, et quin proindè

resistentia, cæteris paribus, in majori ratione crescat quàm in ratione velocitatis auctæ.

332. *Corol. 3.* Si spatium quo vortex continetur sit ubique plenum et proptereâ medii densitas uniformis supponatur, littera z quæ densitatem exponebat, significet jam fluiditatis defectum, sitque resistentia, cæteris paribus, ut dignitas z^m . His positis ostendetur ut in Cor. 1. et 2. factum est, quod si tempora periodica statuatur in ratione sesquuplicatâ distantiarum a centro, materia vorticis eò fluidior erit quò longius distat a centro, vel resistentia augebitur in majori ratione quàm ea est in quâ velocitas relativa augeatur.

333. *Corol. 4.* Si resistentia, cæteris paribus, augeatur in ratione minore quàm in ratione velocitatis, hoc est, si index p , sit unitate minor,

erit $\frac{2+m}{p}$ binario major, et proindè tempora

periodica partium vorticis erunt in majori ratione quàm duplicatâ ratione distantiarum a centro. Nam vel est $m = 0$, quod contingit dùm eadem est ubique fluidi densitas ac fluiditas, vel $m = n$, est numerus positivus, quia defectus fluiditatis vel densitas, auctis distantiis a centro augeatur (per Cor. 1.)

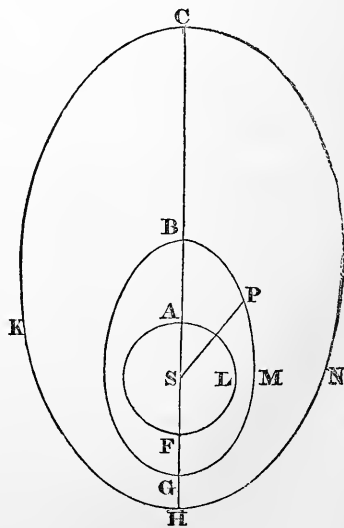
Scholium.

In his omnibus suppono fluidum ex materiâ quoad densitatem et fluiditatem uniformi constare. Tale est in quo globus idem eodem cum motu, in eodem temporis intervallo, motus similes et æquales, ad æquales semper a se distantias, ubivis in fluido constitutus, propagare possit. Conatur quidem materia per motum suum circulem recedere ab axe vorticis, et propterea premit materiam omnem ulteriorem. Ex hâc pressione fit attritus partium fortior et separatio ab invicem difficilior; et per consequens diminuitur materiæ fluiditas. Rursus si partes fluidi sunt alicubi crassiores seu majores, fluiditas ibi minor erit, ob pauciores superficies in quibus partes separentur ab invicem. In hujusmodi casibus deficientem fluiditatem vel lubricitatem partium vel lentorem aliâve aliquâ conditione restitui suppono. Hoc nisi fiat, materia ubi minus fluida est magis cohærebit et segnior erit, ideóque motum tardius recipiet ^(d) et longius propagabit quàm pro ratione superius assignatâ. ^(e) Si figura vasis non sit

^(d) * Et longius propagabit quàm pro ratione superius assignatâ. In superioribus demonstrationibus Newtonus supposuit fluidum homogeneum esse et pressionem ubique æqualem; si verò in diversis a vorticis centro distantibus aliqua sit partium fluidi aut pressionis inæqualitas, minorem vel majorem fluiditatem inde ortam, vel lubricitatem partium vel lentorem aliâve aliquâ conditione ad æqualitatem restitui supponit, ut vortex in eodem statu juxta leges præscriptas, permaneat. Hoc nisi fiat, materia ubi minus fluida est, magis cohærebit et segnior erit, ideóque motum a globo centrali communicatum difficilius ac tardius, cæteris paribus, recipiet; sed illum longius propagabit. Nam si vorticis partes ita inter se et cum globo cohærent, ut nullâ vi possent separari, non posset globus centralis circumvolvi, quin materia tota vorticis, tanquam vectis rigidus, simul circumvolveretur. Unde quò magis partes illæ cohærent, eò longius motum a globo centrali acceptum propagant. Et ideò etiamsi materia vorticis homogenea non sit, et pressio inæqualis supponatur, vim suam obtinent difficultates, quas contra vorticum in naturâ possibilitatem Newtonus proposuit in Cor. 2. 4. 5. et 6. Prop. LII.

^(e) * Si figura vasis non sit spherica. Sit C N H K, figura vasis in quo fluidum sclo spheræ A L F impulsu agatur in orbem, et particulæ fluidi quæ vasis superficiem C N H K, contingunt, movebuntur in lineis non circularibus, sed conformibus eidem vasis figuræ, particulæ verò quæ spheræ A L F proximæ sunt, circulos describent. Unde quò magis particulæ fluidi a spherâ centrali distant, eò magis orbitarum quas describunt, figura a circulari differt et ad vasis figuram accedit. Quia verò particula-

rum circulos descripturum tempora periodica erant (Prop. LII.) ut quadrata distantiarum a centro S; erunt in hoc vase ut quadrata mediorum distantiarum quam proximè. Sic parti-



culæ P orbitam B P G B descriptis tempus periodicum erit quam proximè ut quadratum distantie P S, quæ est media arithmetica inter distantiam maximam B S, et minimam S G, sive erit ut tempus periodicum particulæ P, cir-

sphærica, movebuntur particulæ in lineis non circularibus sed conformibus eidem vasis figuræ, et tempora periodica erunt ut quadrata mediocrium distantiarum a centro quam proximè. In partibus inter centrum et circumferentiam, ubi latiora sunt spatia, tardiores erunt motus, ubi angustiora velociores ^(f) neque tamen particulæ velociores petent circumferentiam. Arcus enim describent minus curvos, et conatus recedendi a centro non minus diminuetur per decrementum hujus curvaturæ, quàm augebitur per incrementum velocitatis. Pergendo a spatiis angustioribus in latiora recedent paulo longius a centro, sed isto recessu tardescent; et accedendo postea de latioribus ad angustiora accelerabuntur, et sic per vices tardescent et accelerabuntur particulæ singulæ in perpetuum. ^(g) Hæc ita se habebunt in vase rigido. Nam in fluido infinito constitutio vorticum innotescit per Propositionis hujus Corollarium sextum.

Proprietates autem vorticum hæc Propositione investigare conatus sum, ut pertentarem si quâ ratione phænomena cœlestia per vortices explicari possint. Nam phænomenon est, quod planetarum circa Jovem revolvendum tempora periodica sunt in ratione sesquuplicatâ distantiarum a centro Jovis; et eadem regula obtinet in planetis qui circa Solem revolvuntur. Obtinent autem hæ regulæ in planetis utrisque quam accuratissimè, quâtenus observationes astronomicæ hactenus prodidère. Ideoque si planetæ illi a vorticibus circa Jovem et Solem revolventibus deferantur, debebunt etiam hi vortices eâdem lege revoli. Verùm tempora periodica partium vorticis prodierunt in ratione duplicatâ distantiarum a centro motus: neque potest ratio illa diminui et ad rationem sesquuplicatam reduci, ^(h) nisi vel

culum describentis, cujus radius P S. Nam tempus periodicum, cæteris paribus, crescit ut velocitas absoluta decrescit; sed cùm vortex supponatur esse in statu permanenti, et eadem proinde materiæ quantitas per latiora spatia ut C A, et per angustiora ut F H, simul transeat; oportet ut materiæ velocitas in spatiis latioribus minuatur, et in angustioribus augeatur. Quo fit ut particula P, eodem ferè tempore describat orbitam B P G B, quo velocitate mediocri describeret circulum cujus esset radius P S.

^(f) * *Neque tamen particulæ velociores.* Nam vortex non potest esse in statu permanenti quin particula P, in spatiis angustioribus L N, F H, ad centrum S accedat; et ideò necesse est ut in iisdem spatiis conatus recedendi a centro minùs augeatur per incrementum velocitatis, quàm diminuitur per decrementum curvaturæ. Est enim vis quâ particula P, in loco G, nititur a circumferentiâ M G recedere, ut quadratum velocitatis particulæ directè et radius circuli curvam osculantis in G, inversè (Cor. 1. Prop. IV. et not. 121. Lib. I.).

^(g) * *Hæc ita se habebunt, in vase rigido aut in spatio aliis vorticibus circumdato, quo tanquam vase, juxta Cartesii opinionem materia vorticis continetur.* Ex his autem Newtoni observationibus sequitur. 1. Planetarum qui circa Cartesiani vorticis centrum eâdem lege cum vorticis partibus moventur, orbitas eò magis ad circuli figuram accedere debere quo centro vorticis propiores sunt; et propterea excentricitatem orbitæ Mercurii longè minorem esse excentricitatem orbitæ Saturni et omnium superiorum planetarum, contrâ observationes astronomicas. Sequitur 2. in Cartesianâ hypothesi explicari non posse cur planetæ ellipses accuratas, non verò circulos aut irregulares figuras describant. Sequitur 3. omnium orbitalium aphelia et perihelia a Sole spectata in iisdem inter fixas locis esse posita atquè immota manere; cùm tamen ex observationibus astronomicis certum sit, planetarum aphelia a se invicem longe distare et lento motu agi.

^(h) * *Nisi vel materia vorticis eò fluidior sit.* (For not. 332.)

materia vorticis eo fluidior sit quo longius distat a centro, vel resistentia, quæ oritur ex defectu lubricitatis partium fluidi, ex auctâ velocitate quâ partes fluidi separantur ab invicem, augeatur in maiore ratione quàm ea est in quâ velocitas augetur. Quorum tamen neutrum rationi consentaneum videtur. Partes crassiores et minus fluidæ, nisi graves sint in centrum, ⁽ⁱ⁾ circumferentiam petent; et verisimile est quod, etiamsi demonstrationum gratiâ hypothesin talem initio Sectionis hujus proposuerim, ut resistentia velocitati proportionalis esset, ^(k) tamen resistentia in minori sit ratione quàm ea velocitatis est. ^(l) Quo concesso, tempora periodica partium vorticis erunt in maiori quàm duplicatâ ratione distantiarum ab ipsius centro. Quod si vortices (uti aliquorum est opinio) celerius moveantur prope centrum, dein tardius usque ad certum limitem, tum denuo celerius juxta circumferentiam; certe nec ratio sesquuplicata neque alia quævis certa ac determinata obtinere potest. ^(m) Viderint itaque philosophi quo pacto phænomenon illud rationis sesquuplicatæ per vortices explicari possit.

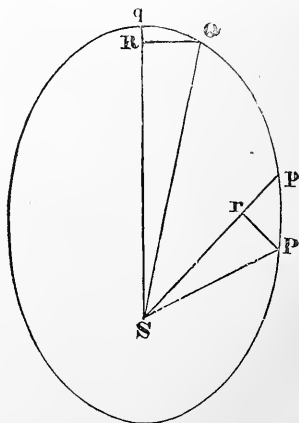
⁽ⁱ⁾ * *Circumferentiam petent.* Id experientiâ constat; nam si aqua in vase contenta in vortice agatur, paleæ et alia corpuscula minùs fluida petunt circumferentiam.

^(k) * *Tamen resistentia in minori sit ratione.* (Vid. ultimam not. in hoc schol.)

^(l) * *Quo concesso.* (Per not. 353.)

^(m) * *Viderint itaque philosophi.* Difficultas crescit, si tria simul conjungantur, quæ primus omnium Keplerus mirâ sagacitate ex observationibus astronomicis deduxit. Primum est, planetas in ellipsis, quarum umbilicum Sol occupat, revolutiones suas peragere. Secundum est planetas singulos radiis ad Solem ductis, et satellites radiis ad suum primum ductis, areas describere temporibus proportionales. Tertium est, tempora periodica planetarum circâ Solem et satellitum circâ primum suum, esse in ratione sesquuplicatâ distantiarum a centro sui motûs. Ex hac proportionem colligitur planetarum velocitates in mediocribus distantis ab umbilico communi esse reciprocè in ratione subduplicatâ distantiarum illarum. Sint enim D , et d , mediocres planetarum distantie T et t , eorum tempora periodica, et quoniam in singulis planetarum orbitis parva est distantie maximæ et minimæ differentia, si conferatur cum differentia quæ inter distantias duorum planetarum intercedit, spatia temporibus T et t , descripta erunt quam proximè ut distantie D et d ; unde velocitates erunt ut $\frac{D}{T}$ et $\frac{d}{t}$, hoc est, ut $\frac{D}{D^{\frac{3}{2}}}$, et $\frac{d}{d^{\frac{3}{2}}}$, sive ut $\frac{1}{D^{\frac{1}{2}}}$ et $\frac{1}{d^{\frac{1}{2}}}$, seu in subduplicatâ ratione mediocribus distantiarum inversè, in quâ etiam ratione sunt velocitates partium vorticis circularis in distantis D et d , a Sole (per Prop. LIII.)

Verùm per alteram analogiam, arearum scilicet et temporum, velocitates partium vorticis circularis sunt in ratione simplici distantiarum a Sole reciprocè. Nam si planeta P , orbitam ellipticam $PqQp$ describat et radiis ad umbilicum S ductis areas æquales SPp , SQq , tempusculo



dato verrat, centro S et radiis SP , SQ describantur arcus circulares quam minimi Pp , Qq , qui radiis $S p$, $S q$, occurrant in r , et R , erit area $SPp = Sp \times Pr = Sq \times Qr = Sq \times Qr$; et hinc $Pr : Qr = Sq : Sp$. Sed Pr et Qr sunt ut spatia circularia eodem tempore descripta ideòque ut velocitates circulares partium vorticis in P , et Q ; quare velocitates illæ sunt in ratione inversâ distantiarum. Porrò quàm

PROPOSITIO LIII. THEOREMA XLI.

Corpora, quæ in vortice delata in orbem redeunt, ejusdem sunt densitatis cum vortice, et eâdem lege cum ipsius partibus quoad velocitatem et cursus determinationem moventur.

Nam si vorticis pars aliqua exigua, cujus particulæ seu puncta physica datum servant situm inter se, congelari supponatur: hæc, quoniam neque

difficile sit ab his aliisque contradictionibus hypothesim vorticum liberare, ex variis hæc de re eruditorum dissertationibus satis manifestum est. Vide Leibnitii tentamen de Motuum Cœlestium Causis; Villemotii opus de Vorticibus; illustrissimi Marchionis Poleni dialogum de eâdem materiâ; Dissertationes celeberrimorum virorum Saurini in Comm. Acad. Reg. Scient. an. 1709., Bulffingeri de Causâ Gravitatis, Joan. Bernoulli Cogitationes Novas de Systemate Cartesii, ejusdem Physicam Cœlestem inter Academiæ præmia, Domini de Molieres Lectiones Physicas.

Illustrium auctorum qui vorticum hypothesim strenuè vindicantur, varias hæc de re dissertationes hic percurrere nimis longum foret, nec tantas componere lites nostrum est. Eam enim Newtonus sibi vel maximè impugnandam assumit vorticum hypothesim quam Cartesius ipse constituerat, natasque post primi auctoris mortem hujus systematis emendationes quam plurimas saltem directè non petit. At silentio prætermittere non licet dissertationem doctissimi viri Joan. Bernoulli ab Academiâ Regiâ Paris. præmio condecoratam, cui titulus est: Cogitationes Novæ de Systemate Cartesii. Existimat clariss. auctor superiorum Propositionum demonstrationes mero sophismate laborare, eò quod Newtonus orbium contiguum et sese mutuo atterentium impressionem solum definierit ex superficierum magnitudine et velocitate relativâ quâ ab invicem separantur; earum verò superficierum pressionem minimè consideraverit, vimque vectis neglexerit quæ, cæteris paribus, major est in majoribus rotis et minor in minoribus. Verum licet in suis demonstrationibus pressionem ubique æqualem supposuerit Newtonus, hujus tamen pressionis inæqualitatem in scholio consideravit, et quid ex illâ sequatur, generatim ostendit. Vim quidem vectis prorsus neglexit, et meritò quidem, quantum intelligere possumus. Quamvis enim in vecte regido cujus partes simul eodem motu angulari circa hypomoclon revolvuntur, eò major sit efficacia quæ cæteris paribus longior est vectis; quod videlicet vectis partes eò celerius moveantur, quò major est earum ab hypomoclio distantia, id tamen ad partes mediæ fluidi quæ circa centrum aliquod revolvuntur, non videtur transferendum. Et licet Newtonus orbis solidos, demonstrationis gratia, primum fingat, eos tamen divisos supponit ac deinde in particulis innumeras subdividit ut demonstratio

ad naturam mediæ fluidi accommodetur. Quod si ob qualemcumque partium fluidi cohæsionum, aliqua habenda sit ratio vis vectis, certè ea non videtur assumenda distantia a vorticis centro proportionalis, quemadmodum fit in vecte perfectè rigido, seu cujus partes vi quasi infinitâ connexæ supponuntur et eodem motu angulari revolvuntur.

Cæterum celeberrimorum virorum Joan. Bernoulli aliam usurpat hypothesim quæ mechanicis perspecta nondum est certòque explorata. Supponit enim cum D. Amontons in Monum. Paris. an. 1699. resistantiam quæ oritur ex frictione superficierum contiguarum utcumque inæqualium, manente earumdem in sese mutuo pressione, constantem esse; verum hypothesi illa minùs placuit clariss. Wolfio qui de eâ his verbis loquitur in Elementis Mechanicis num. 965. Equidem Amontons regulam universalem dedit computandi vim ad frictionem in dato quolibet casu superandam, sed cum omnem frictionem a solâ appensione ex pondere superincedentis derivet, ex antecedentibus satis apparet quod proposito satisfacere nequeat: veram frictionis legem accuratissimis experimentis tentarunt celeberrimi philosophi Desaguliers et Muschenbroek; at eam haud satis constantem observarunt, ut patet ex iis quas Muschenbroek Tom. I. Physices descripsit experimentorum tabulis. Nil ergò certi hæc de re pronuntiari potest. Newtonus tamen conjecturam fecit resistantiam in minori esse ratione quàm ea velocitatis est, eo forsân ductus argumento quod in Historiâ Acad. Reg. an. 1709. hoc ferè modo exposuit: si concipiantur superficies innumeris eminentiis asperæ, dum alia super aliam incedit, superficiei superioris eminentiæ intrâ cavitates inferioris, dato tempore, pressionis vi penetrant, fitque resistantia major, si intrâ superficiei inferioris cavitates altius ingrediantur superficiei superioris eminentiæ, at verò si major sit velocitas, superior superficies intrâ inferiorem eodem dato tempore minùs penetrat. Hinc si clariss. Parentii ratio valeat, satis patet resistantiam in minori esse ratione quàm ea velocitatis est. Attamen clariss. Muschenbroek, factis experimentis, resistantiam velocitatis proportionalem in motibus tardioribus inventit, in celerioribus verò eam in majori quàm velocitatis ratione observavit.

Assumit D. Bernoullius impressiones orbium contiguarum in se mutuo factas, esse in ratione

quoad densitatem suam, neque quoad vim insitam aut figuram suam mutatur, movebitur eâdem lege ac prius: et contra, si vorticis pars congelata et solida ejusdem sit densitatis cum reliquo vortice, et resolvatur in fluidum, movebitur hæc eâdem lege ac prius, nisi quâtenus ipsius particulæ jam fluidæ factæ moveantur inter se. Negligatur igitur motus particularum inter se, tanquam ad totius motum progressivum nil spectans, et motus totius idem erit ac prius. Motus autem idem erit cum motu aliarum vorticis partium a centro æqualiter distantium, propterea quod solidum in fluidum resolutum fit pars vorticis cæteris partibus consimilis. Ergo solidum, si sit ejusdem densitatis cum materiâ vorticis, eodem motu cum ipsius partibus movebitur, in materiâ proximè ambiente relativè quiescens. Sin densius sit, ^(a) jam magis conabitur recedere a centro vorticis quàm prius; ideoque vorticis vim illam, quâ prius in orbitâ suâ tanquam in æquilibrio constitutum retinebatur, jam superans, recedet a centro et revolvendo describet spiralem, non amplius in eundem orbem

compositâ ex ratione summæ virium centrifugarum orbium omnium inferiorum ad centrum usque vorticis, ex ratione velocitatis quâ orbes contigui ab invicem separantur, et ex ratione distantie orbium illorum a centro; undè per analysim deducit tempora periodica partium vorticis spherici homogenei esse in ratione radicum cubicarum dignitatis quintæ distantiarum a centro; earum verò celeritatem sub æquatore esse reciprocè in ratione radicum cubicæ quadrati distantiarum a centro. Si in hypothesi Bernoullii negligatur vis vectis, eodem calculo quo usus est, tempora periodica inveniuntur proportionalia radicibus cubicis dignitatis quartæ distantiarum a centro; si verò supponamus impressiones orbium in se mutuò factas, esse in ratione compositâ ex ratione pressionum, ratione velocitatum relativarum et ratione superficierum, tempora periodica Bernoulliano calculo inveniuntur quadratis distantiarum proportionalia, uti Newtonus per suam hypothesim invenerat; et si cum his tribus rationibus componatur ratio distantie a centro ut vis vectis exprimitur, tempora periodica reperiuntur proportionalia radicibus cubicis dignitatis septimæ distantiarum a centro. Hæc verò analogie omnes a regulâ illâ Keplerianâ, quâ tempora periodica statuantur esse in ratione sesquuplicata distantiarum, dissentiant. Ut ergo vorticis spherici leges cum Kepleri sancitis conciliet Bernoullius, supponit densitatem vorticis esse in ratione subduplicatâ distantie a centro reciprocè, planetas verò non esse ejusdem prorsus densitatis cum medio fluido in quo primum collocati sunt, ideoque ob majorem vel minorem suam densitatem in eo medio successivè descendere et ascendere, intereadum circulari motu vorticis abripiuntur, ex quibus motibus simul compositis nascuntur ellipticæ planetarum trajectoriæ et apheliorum lentissimi motus. Sed medium illud

in quo planeta, cùm densior est, descendit, et ubi rarior est, ascendit, vel grave est in centrum vorticis vel non. Si grave non sit, planeta in medio rariori positus, eodemque cum medio illo gyrationis motu actus, majori vi a centro recedere et spiralem trajectoriam describendo in infinitum abire debet; et contra, planeta in medio densiori primum collocatus, ad centrum per spiralem lineam perpetuò accederet, quod medi densioris major esse debeat vis centrifuga quàm planetæ rarioris. Si medium grave sit in centrum vorticis, ipsiusque densitas, decrescentibus distantis a centro, crescat, cœlestis materiæ densitas, ob parvam orbitarum quas planetæ describunt, excentricitatem, æqualis assumi potest densitati cujusque planetæ huic materiæ innatantis; atque adeò densitas cœlestis materiæ ad distantiam Saturni æqualis erit densitati Saturni, ad distantiam Jovis, Martis, &c. æqualis erit densitati horum planetarum, et omnes illæ densitates erunt inter se in ratione subduplicatâ distantiarum a Sole reciprocè. Si itaque Telluris densitas mediocris supponatur æqualis densitati aquæ, materia cœlestis inter Solem et Tellurem constituta aquâ densior erit et corporum motui maximè resistet. Sed ut ex cometarum motibus, aliisque observationibus constat, materia cœlestis inter Solem et Tellurem motui corporum minimè resistit. Nam cometarum motus sunt summè regulares, et easdem leges cum planetarum motibus observant, et in omnes cœli plagas liberrime feruntur, atque ad Solem usque ferè penetrant sine resistentiâ.

^(a) * Jam magis conabitur. Nam vis centrifuga motrix, cæteris paribus, augetur vel minuitur in ratione quantitatis materiæ (per Def. 8. Lib. I.) et materiæ quantitas, dato corporis volumine, augetur vel minuitur in ratione densitatis (2. Lib. I.)

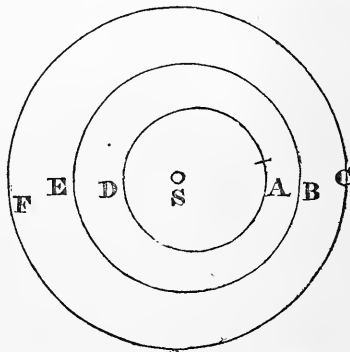
rediens. Et eodem argumento si rarius sit, accedet ad centrum. Igitur non redibit in eundem orbem nisi sit ejusdem densitatis cum fluido. Eo autem in casu ostensum est, quod revolveretur eâdem lege cum partibus fluidi a centro vorticis æqualiter distantibus. Q. e. d.

Corol. 1. Ergo solidum quod in vortice revolvitur et in eundem orbem semper redit, relativè quiescit in fluido cui innatat.

Corol. 2. Et si vortex sit quoad densitatem uniformis, corpus idem ad quamlibet a centro vorticis distantiam revolvi potest.

Scholium.

Hinc liquet planetas a vorticibus corporeis non deferri. Nam planetæ secundum hypothesin Copernicæam circa Solem delati revolvuntur in ellipsis umbilicum habentibus in Sole, et radiis ad Solem ductis areas describunt temporibus proportionales. At partes vorticis tali motu revolvi nequeunt. Designent A D, B E, C F, orbis tres circa Solem S descriptos, quorum extimus C F circulus sit Soli concentricus, et interiorum duorum aphelia sint A, B et perihelia D, E. Ergo corpus quod revolvitur in orbe C F, radio ad Solem ducto areas temporibus proportionales describendo, ^(o) movebitur uniformi cum motu. Corpus autem quod revolvitur in orbe B E, tardius movebitur in aphelio B et velocius in perihelio E, ^(p) secundum leges astronomicas; cùm tamen ^(q) secundum leges mechanicas materia vorticis in spatio angustiore inter A et C velocius moveri debeat quàm in spatio latiore inter D et F; id est, in aphelio velocius quàm in perihelio. Quæ duo repug-



^(o) * *Movibitur uniformi cum motu.* Æqualibus enim temporibus æquales aræ et proinde æquales arcus, hoc est, æqualia spatia describuntur.

^(p) * *Secundùm leges astronomicas.* Quoniam axis ellipseos per aphelium B et perihelium E transit, estque ellipsi normalis, area quam radius vector S B tempore quam minimo describit, erit æqualis rectangulo ex distantia S B in arcum quam minimum a corpore in B descriptum; et similiter area æqualis quam radius vector S E eodem tempore quam minimo describit, æquatur rectangulo ex distantia S E ducta in arcum a corpore in E descriptum, et ideo prior arcus est ad posteriorem, hoc est, ve-

locitas in B, est ad velocitatem in E, ut distantia S E, ad distantiam majorem S B.

^(q) * *Secundùm leges mechanicas.* Nam cùm vortex supponatur esse in statu permanenti, æquales materiæ quantitates per spatium angustius A C, et per spatium latius D F, ut sit in fluviis, eodem tempore transeunt, et propterea materia vorticis in spatio angustiore inter A et C, velocius movetur quàm in spatio latiore inter D et F. Quantitas autem materiæ, quæ dato tempore transit per spatium A C, vel D F, est ut spatium hoc directè et materiæ velocitas mediocris inversè, et ideo mediocris velocitas materiæ inter A et C, est ad mediocrem velocitatem materiæ inter D et F, ut F D ad A C.

nant inter se. Sic in principio signi Virginis, ubi aphelium Martis jam versatur, distantia inter orbes Martis et Veneris est ad distantiam eorundem orbium in principio signi Piscium ut tria ad duo circiter, et propterea materia vorticis inter orbes illos in principio Piscium debet esse velocior quàm in principio Virginis ^(*) in ratione trium ad duo. Nam quo angustius est spatium per quod eadem materiæ quantitas eodem revolutionis unius tempore transit, eo majori cum velocitate transire debet. Igitur si Terra in hâc materiâ cœlesti relativè quiescens ab eâ deferretur, et unâ circa Solem revolveretur, ^(*) foret hujus velocitas in principio Piscium ad ejusdem velocitatem in principio Virginis in ratione sesquialterâ. ^(†) Unde Solis motus diurnus apparens in principio Virginis major esset quàm minutorum primorum septuaginta, et in principio Piscium minor quàm minutorum quadraginta octo: et cùm tamen (experientiâ teste) apparens iste Solis motus major sit in principio Piscium quàm in principio Virginis, et propterea Terra velocior in principio Virginis quàm in principio Piscium. ^(u) Itaque hypothesis vorticum cum phænomenis astronomicis omnino pugnat, et non tam ad explicandos quàm ad perturbandos motus cœlestes conducit. Quomodo verò motus isti in spatiis liberis absque vorticibus peraguntur, intelligi potest ex Libro primo, et in Mundi Systemate plenius docebitur.

(*) * *In ratione trium ad duo* (per not. præced.)

(†) * *Foret hujus velocitas.* Ex observationibus astronomicis constat Terram inter Veneris et Martis orbes positam esse.

(†) * *Undè Solis motus diurnus apparens.* Hic motus est angulus quem Sol, radiis ad Terram ductis, proprio motu ab occidente in orientem unoquoque die describere nobis videtur, quem quidem angulum Terra, radiis ad Solem ductis, in hypothesi Copernicæ, conficit. Porro notissimum est, circulum illum quem Sol inter fixas motu annuo describere videtur, ab astronomicis dividi in partes duodecim æquales, seu signa quorum hæc duo Virgo et Pisces sunt directè opposita, ita ut dum Terra in hypothesi Copernici, est in principio Piscium, Sol appareat in principio Virginis et contrâ. Cùm igitur angularis velocitas Terræ in principio Piscium sit ad ejus velocitatem angularem in principio Virginis ut 3 ad 2, Solis motus diurnus apparens in principio Virginis est ad ejus motum apparentem in principio Piscium in eadem ratione 3 ad 2. Solis motus diurnus apparens medius est minutorum primorum 59 et secundorum 8, seu secundorum 5548, qui numerus dicatur M; quare si Solis motus diurnus apparens in principio Virginis, ponatur = $M + X$, et in principio Piscium = $M - X$, erit $M +$

$X : M - X = 3 : 2$, unde invenitur $X = \frac{1}{5} M = 707''$ quam proximè, ac proinde erit $M + X = 4255'' = 70' + 55''$, et $M - X = 2841'' = 47' + 21''$. Ergò Solis motus diurnus apparens in principio Virginis major esset quàm minutorum primorum septuaginta, et in principio Piscium minor quàm minutorum quadraginta octo; cùm tamen ex observationibus astronomicis Sol in principio Virginis e Tellure visus motu diurno conficere videatur minuta prima 58 tantùm in principio Piscium minuta prima 60 seu gradum unum.

(u) * *Itaque hypothesis vorticum.* Quoniam vorticis materia circulos describit æquatori vorticis parallelos, necesse est (per hanc Prop. LIII.) ut planetæ omnes ferantur in orbitis æquatori parallelis, sed observatum est nullum planetam in orbitâ æquatori parallela revolutiones suas absolvere, et cometas variis directionibus in omnes cœli plagas ferri. Eadem est difficultas si per vim centrifugam partium vorticis explicetur vis centripeta seu gravitas corporum quæ ad axem vorticis perpendiculariter tendere deberent, non verò ad vorticis centrum dirigi. Sed de his vide Acta Erudit. Lips. an. 1686. et 1695.; Diaria Erudit. 1703. 1707. Monumenta Acad. Paris. 1709. Dissertationes clariss. Hugenii et Bullfingeri de Causâ Gravitatis.

INDEX PROPOSITIONUM

LIBRI PRIMI.

AXIOMATA SIVE LEGES MOTUS.

LEX I.

Corpus omne perseverat in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare..... 15

LEX II.

Mutatio motus proportionalis est vi motrici impressæ et fit secundum lineam rectam quâ vis illa imprimitur..... ibid.

LEX III.

Actioni contraria semper et æqualis est reactio : sive corporum duorum actiones in se mutuò semper sunt æquales et in contrarias partes diriguntur..... 16

PROP. I. THEOR. I.

Areæ quas corpora in gyros acta radiis ad immobile centrum virium ductis, describunt, et in planis immobilibus consistunt et sunt temporibus proportionales..... 65

PROP. II. THEOR. II.

Corpus omne quod movetur in lineâ aliquâ curvâ in plano descriptâ et radio ducto ad punctum vel immobile vel motu rectilineo uniformiter progrediens, describit areas circa punctum illud temporibus proportionales, urgeturque a vi centripetâ tendente ad idem punctum..... 68

PROP. III. THEOR. III.

Corpus omne quod radio ad centrum corporis alterius utcumque moti ducto describit areas circa centrum illud temporibus proportionales, urgetur vi compositâ ex vi centripetâ tendente ad corpus illud alterum et ex vi omni acceleratrice quâ corpus illud alterum urgetur..... 69

PROP. IV. THEOR. IV.

Corporum, quæ diversos circulos æquali motu describunt, vires centripetas ad cen-

tra eorundem circulorum tendere, et esse inter se ut sunt arcuum simul descriptorum quadrata applicata ad circulorum radios..... "1

PROP. V. PROBL. I.

Datâ quibuscunque in locis velocitate quâ corpus figuram datam viribus ad commune aliquod centrum tendentibus describit, centrum illud invenire..... 78

PROP. VI. THEOR. V.

Si corpus in spatio non resistente circa centrum immobile in orbe quocunque revolvatur et arcum quemvis jamjam nascente tempore quâm minimo describat, et sagitta arcus duci intelligatur quæ cordam bisecet et producta transeat per centrum virium : erit vis centripeta in medio arcus, ut sagitta directè et tempus bis inversè... 75

PROP. VII. PROBL. II.

Gyretur corpus in circumferentiâ circuli, requiritur lex vis centripetæ tendentis ad punctum quodcunque datum..... 83

PROP. VIII. PROBL. III.

Moveatur corpus in semi-circulo P Q A : ad hunc effectum requiritur lex vis centripetæ tendentis ad punctum adeò longinquum S, ut lineæ omnes P S, R S, ad id ductæ, pro parallelis haberi possint.... 86

PROP. IX. PROBL. IV.

Gyretur corpus in spirali P Q S secante radios omnes S P, S Q, &c. in angulo dato : requiritur lex vis centripetæ tendentis ad centrum spiralis..... 104

PROP. X. PROBL. V.

Gyretur corpus in ellipsi : requiritur lex vis centripetæ tendentis ad centrum ellipseos..... 105

PROP. XI. PROBL. VI.	Pag.
Revolvatur corpus in ellipsi: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum ellipseos.....	118
PROP. XII. PROBL. VII.	
Moveatur corpus in hyperbolâ, requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum figuræ.....	120
PROP. XIII. PROBL. VIII.	
Moveatur corpus in perimetro parabolæ: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum hujus figuræ.....	123
PROP. XIV. THEOR. VI.	
Si corpora plura revolvantur circa centrum commune, et vis centripeta sit reciprocè in duplicatâ ratione distantie locorum a centro; dico quod orbium latera recta principalia sunt in duplicatâ ratione arearum quas corpora radiis ad centrum ductis eodem tempore describunt.....	125
PROP. XV. THEOR. VII.	
Iisdem positis, dico quod tempora periodica in ellipsis sunt in ratione sesquiquatâ majorum axium.....	126
PROP. XVI. THEOR. VIII.	
Iisdem positis, et actis ad corpora lineis rectis, quæ ibidem tangant orbitas, demissisque ab umbilico communi ad has tangentes perpendicularibus: dico quod velocitates corporum sunt in ratione compositâ ex ratione perpendicularorum inverse et subduplicatâ ratione laterum rectorum principalium directè.....	ibid.
PROP. XVII. PROBL. IX.	
Posito quod vis centripeta sit reciprocè proportionalis quadrato distantie locorum a centro, et quod vis illius quantitas absoluta sit cognita; requiritur linea quam corpus describit de loco dato cum datâ velocitate secundum datam rectam egrediens.....	130
PROP. XVIII. PROBL. X.	
Datis umbilico et axibus principalibus describere trajectoryas ellipticas et hyperbolicas, quæ transibunt per puncta data et rectas positione datas continget.....	136
PROP. XIX. PROBL. XI.	
Circa datum umbilicum trajectoryam parabolicam describere, quæ transibit per puncta data, et rectas positione datas continget.....	ibid.
PROP. XX. PROBL. XII.	
Circa datum umbilicum trajectoryam quamvis specie datam describere quæ per data puncta transibit et rectas tanget positione datas.....	137

PROP. XXI. THEOR. XIII.	Pag.
Trajectoryam circa datum umbilicum describere, quæ transibit per puncta data et rectas positione datas continget.....	144
PROP. XXII. PROBL. XIV.	
Trajectoryam per data quinque puncta describere.....	161
PROP. XXIII. PROBL. XV.	
Trajectoryam describere quæ per data quatuor puncta transibit, et rectam continget positione datam.....	163
PROP. XXIV. PROBL. XVI.	
Trajectoryam describere quæ per data tria puncta et rectas duas positione datas continget.....	166
PROP. XXV. PROBL. XVII.	
Trajectoryam describere, quæ per data duo puncta transibit et rectas tres continget positione datas.....	173
PROP. XXVI. PROBL. XVIII.	
Trajectoryam describere quæ transibit per punctum datum et rectas quatuor positione datas continget.....	174
PROP. XXVII. PROBL. XIX.	
Trajectoryam describere quæ rectas quinque positione datas continget.....	180
PROP. XXVIII. PROBL. XX.	
Trajectoryam specie et magnitudine datam describere, cujus partes datæ rectis tribus positione datis interjacebunt.....	195
PROP. XXIX. PROBL. XXI.	
Trajectoryam specie datam describere quæ a rectis quatuor positione datis in partes secebitur, ordine, specie, et proportionem datas.....	197
PROP. XXX. PROBL. XXII.	
Corporis in datâ trajectoryâ parabolicâ moti invenire locum ad tempus assignatum....	200
PROP. XXXI. PROBL. XXIII.	
Corporis in datâ trajectoryâ ellipticâ moti invenire locum ad tempus assignatum....	209
PROP. XXXII. PROBL. XXIV.	
Posito quod vis centripeta sit reciprocè proportionalis quadrato distantie locorum a centro, spatia definire quæ corpus rectâ cadendo datis temporibus describit.....	216
PROP. XXXIII. THEOR. IX.	
Positis jam inventis, dico quod corporis cadentis velocitas in loco quovis C est ad velocitatem corporis centro B intervallo B C circumloci describentis, in subduplicatâ ratione quam A C distantia corporis	

a circuli vel hyperbolæ rectangulæ vertice ulteriore A habet ad figuræ semi-diametrum principalem $\frac{1}{2}$ A B.....	228	PROP. XLIII. PROBL. XXX.	Pag.
PROP. XXXIV. THEOR. X.		Efficiendum est ut corpus in trajectoriâ quâcunque circa centrum virium revolvente perinde moveri possit atque corpus aliud in eâdem trajectoriâ quiescente.....	258
Si figura B E D parabola est, dico quod corporis cadentis velocitas in loco quovis C æqualis est velocitati quâ corpus centro B dimidio intervalli sui B C circumulum uniformiter describere potest.....	230	PROP. XLIV. THEOR. XIV.	
PROP. XXXV. THEOR. XI.		Differentia virium quibus corpus in orbe quiescente et corpus aliud in eodem orbe revolvente æqualiter moveri possunt, est in triplicatâ ratione communis altitudinis inversæ.....	259
Iisdem positis, dico quod area figuræ D E S, radio indefinito S D descripta, æqualis sit aræ quam corpus, radio dimidiûm lateris recti figuræ D E S æquante, circa centrum S uniformiter gylando eodem tempore describere potest.....	ibid.	PROP. XLV. PROBL. XXXI.	
PROP. XXXVI. PROBL. XXV.		Orbium qui sunt circulis maximè finitimi requiruntur motus apsidum.....	267
Corporis de loco dato A cadentis determinare tempora descensûs.....	233	PROP. XLVI. PROBL. XXXII.	
PROP. XXXVII. PROBL. XXVI.		Positâ cujuscunque generis vi centripetâ datoque tum virium centro tum plano quocunque in quo corpus revolvitur, et concessis figurarum curvilinearum quadraturis; requiritur motus corporis de loco dato, datâ cum velocitate, secundum rectam in plano illo datam egressi.....	278
Corporis de loco dato sursum vel deorsum projecti definire tempora ascensus vel descensus.....	234	PROP. XLVII. THEOR. XV.	
PROP. XXXVIII. THEOR. XII.		Posito quod vis centripeta proportionalis sit distantie corporis a centro; corpora omnia in planis quibuscunque revolventia describent ellipses, et revolutiones temporibus æqualibus peragent; quæque moventur in lineis rectis, ultrò citroque discurrendo singulas eundi et redeundi periodos iisdem temporibus absolvant....	279
Posito quod vis centripeta proportionalis sit altitudini seu distantie locorum a centro, dico quod cadentium tempora, velocitates et spatia descripta, sunt arcubus arcuunque sinibus rectis et sinibus versis respective proportionalia.....	235	PROP. XLVIII. THEOR. XVI.	
PROP. XXXIX. PROBL. XXVII.		Si rota globo extrinsecus ad angulos rectos insistat, et more rotarum revolvendo progrediatur in circulo maximo; longitudo itineris curvilinei quod punctum quodvis in rotæ perimetro datum, ex quo globum tetigit, confecit, (quodque cycloidem vel epicycloidem nominare licet) erit ad duplicatum sinum versum arcûs dimidiî qui globum ex eo tempore inter eundem tetigit, ut differentia diametrorum globi et rotæ ad semi-diametrum globi.....	280
Positâ cujuscunque generis vi centripetâ, et concessis figurarum curvilinearum quadraturis, requiritur corporis rectâ ascendentis vel descendentis tum velocitas in locis singulis, tum tempus quo corpus ad locum quemvis perveniet: et contra.....	236	PROP. XLIX. THEOR. XVII.	
PROP. XL. THEOR. XIII.		Si rota globi concavo ad rectos angulos intrinsecus insistat et revolvendo progrediatur in circulo maximo, longitudo itineris curvilinei quod punctum quodvis in rotæ perimetro datum, ex quo globum tetigit, confecit, erit ad duplicatum sinum versum arcûs dimidiî qui globum toto hoc tempore inter eundem tetigit, ut differentia diametrorum globi et rotæ ad semi-diametrum globi.....	ibid.
Si corpus cogente vi quâcunque centripetâ moveatur utcunque, et corpus aliud rectâ ascendat vel descendat, sintque eorum velocitates in aliquo æqualium altitudinum casu æquales, velocitates eorum in omnibus æqualibus altitudinibus erunt æquales.....	241	PROP. L. PROBL. XXXIII.	
PROP. XLI. PROBL. XXVIII.		Facere ut corpus pendulum oscilletur in cycloide datâ.....	285
Positâ cujuscunque generis vi centripetâ et concessis figurarum curvilinearum quadraturis, requiruntur tum trajectoriæ in quibus corpora movebuntur, tum tempora motuum in trajectoriis inventis.....	246		
PROP. XLII. PROBL. XXIX.			
Datâ lege vis centripetæ, requiritur motus corporis de loco dato, datâ cum velocitate secundum datam rectam egressi.....	256		

PROP. LI. THEOR. XVIII.

Si vis centripeta tendens undique ad globi centrum C sit in locis singulis ut distantia loci cujusque a centro et hæc solâ vi agente corpus T oscilletur (modo jam descripto) in perimetro cycloidis Q R S: dico quod oscillationum utcumque inæqualium æqualia erunt tempora..... 288

PROP. LII. PROBL. XXXIV.

Definire et velocitates pendulorum in locis singulis et tempora quibus oscillationes totæ, tum singulæ oscillationum partes peraguntur..... 290

PROP. LIII. PROBL. XXXV.

Concessis figurarum curvilinearum quadraturis, invenire vires quibus corpora in datis curvis lineis oscillationes semper isochronas peragent..... 295

PROP. LIV. PROBL. XXXVI.

Concessis figurarum curvilinearum quadraturis, invenire tempora quibus corpora vi quâlibet centripetâ in lineis quibuscunque curvis, in plano per centrum virium transeunt descriptis, descendant et ascendant..... 300

PROP. LV. THEOR. XIX.

Si corpus movetur in superficie quâcunque curvâ, cujus axis per centrum virium transit, et a corpore in axem demittatur perpendicularis, eique parallela et æqualis ab axis puncto quovis dato ducatur: dico quod parallela illa aream tempori proportionalem describet..... 302

PROP. LVI. PROBL. XXXVII.

Concessis figurarum curvilinearum quadraturis, datisque tum lege vis centripetæ ad centrum datum tendentis, tum superficie curvâ cujus axis per centrum illud transit; invenienda est trajectory quam corpus in eadem superficie describet, de loco dato, datâ cum velocitate, versum plagam in superficie illâ datam egressum..... 304

PROP. LVII. THEOR. XX.

Corpora duo se invicem trahentia describunt, et circum commune centrum gravitatis, et circum se mutuò figuras similes. 311

PROP. LVIII. THEOR. XXI.

Si corpora duo viribus quibusvis se mutuò trahunt, et interea revolvuntur circa gravitatis centrum commune: dico quòd figuris, quas corpora sic mota describunt circum se mutuò, potest figura similis et æqualis, circum corpus alterutrum immotum, viribus iisdem describi..... 312

PROP. LIX. THEOR. XXII.

Corporum duorum S et P circa commune

gravitatis centrum C revolvendum, tempus periodicum esse ad tempus periodicum corporis alterutrius P, circa alterum immotum S gyantis, et figuris quas corpora circum se mutuò describunt figuram similem et æqualem describentis, in subduplicatâ ratione corporis alterius S, ad summam corporum S + P..... 315

PROP. LX. THEOR. XXIII.

Si corpora duo S et P, viribus quadrato distantie suæ reciprocè proportionalibus, se mutuò trahentia, revolvuntur circa gravitatis centrum commune: dico quod ellipseos quam corpus alterutrum P hoc motu circa alterum S describit, axis principalis erit ad axem principalem ellipseos quam corpus idem P circa alterum quiescens S eodem tempore periodico describere posset, ut summa corporum duorum S + P ad primum duorum mediè proportionalium inter hanc summam et corpus illud alterum S..... ibid.

PROP. LXI. THEOR. XXIV.

Si corpora duo viribus quibusvis se mutuò trahentia, neque aliâs agitata vel impedita quomodocunque moveantur, motus eorum perinde se habebunt, ac si non traherent se mutuò, sed utrumque a corpore tertio in communi gravitatis centro constituto viribus iisdem traheretur: et virium trahentium eadem erit lex respectu distantie corporum a centro illo communi atque respectu distantie totius inter corpora.... 316

PROP. LXII. PROBL. XXXVIII.

Corporum duorum quæ viribus quadrato distantie suæ reciprocè proportionalibus se mutuò trahunt, ac de locis datis demittuntur, determinare motus..... 317

PROP. LXIII. PROBL. XXXIX.

Corporum duorum quæ viribus quadrato distantie suæ reciprocè proportionalibus se mutuò trahunt, deque locis datis, secundum datas rectas, datis cum velocitatibus exeunt, determinare motus..... ibid.

PROP. LXIV. PROBL. XL.

Viribus quibus corpora se mutuò trahunt crescentibus in simplici ratione distantiarum a centris, requiruntur motus plurium corporum inter se..... 319

PROP. LXV. THEOR. XXV.

Corpora plura quorum vires decrescunt in duplicatâ ratione distantiarum ab eorumdem centris, moveri posse inter se in ellipsis et radiis ad umbilicos ductis areas describere temporibus proportionales quamproximè..... 322

PROP. LXVI. THEOR. XXVI.

Pag.

Si corpora tria quorum vires decrescunt in duplicatâ ratione distantiarum, se mutuò trahant; et attractiones acceleratrices binorum quorumcunque in tertium sint inter se reciprocè ut quadrata distantiarum: minora autem circa maximum revolvantur: dico quod interius circa intimum et maximum, radiis ad ipsum ductis, describet areas temporibus magis proportionales, et figuram ad formam ellipseos umbilicam in concursu radiorum habentis magis accedentem, si corpus maximum his attractionibus agitetur, quàm si maximum illud vel a minoribus non attractum quiescat, vel multò minùs vel multò magis attractum; aut multò minùs aut multò magis agitetur..... 324

PROP. LXVII. THEOR. XXVII.

Positis iisdem attractionum legibus, dico quod corpus exterius S, circa interiorum P T, commune gravitatis centrum O, radiis ad centrum illud ductis, describit areas temporibus magis proportionales et orbem ad formam ellipseos umbilicam in centro eodem habentis magis accedentem, quàm circa corpus intimum et maximum T, radiis ad ipsum ductis, describere potest..... 352

PROP. LXVIII. THEOR. XXVIII.

Positis iisdem attractionum legibus, dico quod corpus exterius S, circa interiorum P et T, commune gravitatis centrum O, radiis ad centrum illud ductis, describit areas temporibus magis proportionales, et orbem ad formam ellipseos umbilicam in centro eodem habentis magis accedentem, si corpus intimum et maximum his attractionibus perinde atque cætera agitetur, quàm si id vel non attractum quiescat, vel multò magis aut multò minùs attractum aut multò magis aut multò minùs agitetur. 353

PROP. LXIX. THEOR. XXIX.

In systemate corporum plurium A, B, C, D, &c. Si corpus aliquod A trahit cætera omnia B, C, D, &c. viribus acceleratricibus quæ sunt reciprocè ut quadrata distantiarum a trahente, et corpus aliud B trahit etiam cætera A, C, D, &c. viribus quæ sunt reciprocè ut quadrata distantiarum a trahente; erunt absolutæ corporum trahentium A, B vires ad invicem, ut sunt ipsa corpora A, B, quorum sunt vires..... 354

PROP. LXX. THEOR. XXX.

Si ad sphericæ superficiei puncta singula tendant vires æquales centripetæ decrescentes in duplicatâ ratione distantiarum a punctis: dico quod corpusculum intra superficiem constitutum his viribus nullam in partem attrahitur..... 357

PROP. LXXI. THEOR. XXXI.

Pag.

Iisdem positis, dico quod corpusculum extra sphericam superficiem constitutum attrahitur ad centrum sphericæ; vi reciprocè proportionali quadrato distantie suæ ab eodem centro..... 358

PROP. LXXII. THEOR. XXXII.

Si ad sphericæ cujusvis puncta singula tendant vires æquales centripetæ decrescentes in duplicatâ ratione distantiarum a punctis; ac detur tum sphericæ densitas, tum ratio diametri sphericæ ad distantiam corpusculi a centro ejus: dico quod vis quæ corpusculum attrahitur, proportionalis erit semi-diametro sphericæ..... 360

PROP. LXXIII. THEOR. XXXIII.

Si ad sphericæ alicujus datæ puncta singula tendant æquales vires centripetæ decrescentes in duplicatâ ratione distantiarum a punctis: dico quod corpusculum intra sphericam constitutum attrahitur vi proportionali distantie suæ ab ipsius centro. 361

PROP. LXXIV. THEOR. XXXIV.

Iisdem positis, dico quod corpusculum extra sphericam constitutum attrahitur vi reciprocè proportionali quadrato distantie suæ ab ipsius centro..... ibid.

PROP. LXXV. THEOR. XXXV.

Si ad sphericæ datæ puncta singula tendant vires æquales centripetæ, decrescentes in duplicatâ ratione distantiarum a punctis, dico quod sphericæ quævis alia similis ab eadem attrahitur vi reciprocè proportionali quadrato distantie centrorum..... 362

PROP. LXXVI. THEOR. XXXVI.

Si sphericæ in progressu a centro ad circumferentiam (quoad materiæ densitatem et vim attractivam) utcunque dissimilares, in progressu verò per circuitum ad datam omnem a centro distantiam sunt undique similes; et vis attractiva puncti cujusque decrescit in duplicatâ ratione distantie corporis attracti: dico quod vis tota, quæ hujusmodi sphericæ una attrahit aliam sit reciprocè proportionalis quadrato distantie centrorum..... 364

PROP. LXXVII. THEOR. XXXVII.

Si ad singula sphericarum puncta tendant vires centripetæ proportionales distantii punctorum a corporibus attractis: dico quod vis composita, quæ sphericæ duæ se mutuò trahent, est ut distantia inter centra sphericarum..... 366

PROP. LXXVIII. THEOR. XXXVIII.

Si sphericæ in progressu a centro ad circumferentiam sint utcunque dissimilares et

- inæquabiles, in progressu verò per circuitum ad datam omnem a centro distantiam sint undique similes; et vis attractiva puncti cujusque sit ut distantia corporis attracti: dico quod vis tota quâ hujusmodi sphaeræ duæ se mutuò trahunt, sit proportionalis distantiae inter centra sphaerarum..... 568
- PROP. LXXIX. THEOR. XXXIX.**
Si superficies ad latitudinem infinitè diminutam jamjam evanescens $E F f e$, convolutione sui circa axem $P S$, describat solidum sphaericum concavo-convexum, ad cujus particulas singulas aequales tendant aequales vires centripetae: dico quod vis, quâ solidum illud trahit corpusculum situm in P , est $\propto n$ ratione composita ex ratione solidi $D E q \times F f$, et ratione vis quâ particula data in loco $F f$ traheret idem corpusculum..... 369
- PROP. LXXX. THEOR. XL.**
Si ad sphaeræ alicujus $A B E$, centro S descriptæ, particulas singulas aequales tendant aequales vires centripetae; et ad sphaeræ axem $A B$, in quo corpusculum aliquod B locatur, erigantur de punctis singulis D perpendicularia $D E$ sphaeræ occurrentia in E , et in ipsis capiantur longitudines $D N$, quæ sint ut quantitas $\frac{D E q \times P S}{P E}$ et vis, quam sphaeræ particula sita in axe ad distantiam $P E$ exercet in corpusculum P trahitur versus sphaeram, est ut area $A N B$ comprehensa sub axe sphaeræ $A B$, et lineâ curvâ $A N B$, quam punctum N perpetuò tangit..... 372
- PROP. LXXXI. PROBL. XLI.**
Stantibus jam positis, mesuranda est area $A N B$ 375
- PROP. LXXXII. THEOR. XLI.**
In sphaerâ centro S , intervallo $S A$ descripta, si capiantur $S I$, $S A$, $S P$, continuè proportionales: dico quod corpusculi intra sphaeram, in loco quovis I , attractio est ad attractionem ipsius extra sphaeram, in loco P , in ratione composita ex subduplicatâ ratione distantiarum a centro $I S$, $P S$, et subduplicatâ ratione virium centripetarum, in locis illis P et I , ad centrum tendentium..... 382
- PROP. LXXXIII. PROBL. XLII.**
Invenire vim quâ corpusculum in centro sphaeræ locatum ad ejus segmentum quodcunque attrahitur..... 385
- PROP. LXXXIV. PROBL. XLIII.**
Invenire vim quâ corpusculum extra centrum sphaeræ in axe segmenti cujusvis locatum, attrahitur ab eodem segmento.. 386
- PROP. LXXXV. THEOR. XLII.**
Si corporis attracti, ubi attrahenti contiguum est, attractio longè fortior sit, quàm cum vel minimo intervallo separantur ab invicem: vires particularum trahentis, in recessu corporis attracti, decrescunt in ratione plusquam duplicatâ distantiarum a particulis..... 388
- PROP. LXXXVI. THEOR. XLIII.**
Si particularum, ex quibus corpus attractivum componitur, vires in recessu corporis attracti decrescunt in triplicatâ vel plusquam triplicatâ ratione distantiarum a particulis, attractio longè fortior erit in contactu, quàm cum trahens et attractum intervallo vel minimo separantur ab invicem..... ibid.
- PROP. LXXXVII. THEOR. XLIV.**
Si corpora duo sibi invicem similia, et ex materiâ æqualiter attractivâ constantia, seorsim attrahant corpuscula sibi ipsis proportionalia et ad se similiter posita: attractiones acceleratrices corpusculorum in corpora tota, erunt ut attractiones acceleratrices corpusculorum in eorum particulas totis proportionales, et in totis similiter positas..... 389
- PROP. LXXXVIII. THEOR. XLV.**
Si particularum æqualium corporis cujus-cunque vires attractivæ sint ut distantiae locorum a particulis: vis corporis totius tendet ad ipsius centrum gravitatis, et eadem erit cum vi globi ex materiâ consimili et æquali constantis et centrum habentis in ejus centro gravitatis..... 391
- PROP. LXXXIX. THEOR. LXVI.**
Si corpora sint plura ex particulis æqualibus constantia, quarum vires sunt ut distantiae locorum a singulis: vis ex omnium viribus composita, quâ corpusculum quodcunque trahitur, tendet ad trahentium commune centrum gravitatis; et eadem erit ac si trahentia illa, servato gravitatis centro communi, coirent et in globum formarentur..... 392
- PROP. XC. PROBL. XLIV.**
Si ad singula circuli cujus-cunque puncta tendant vires aequales centripetae, crescentes vel decrescentes in quacunque distantiarum ratione: invenire vim quâ corpusculum attrahitur ubivis positum in rectâ quæ plano circuli ad centrum ejus perpendiculariter insitit..... 393
- PROP. XCI. PROBL. XLV.**
Invenire attractionem corpusculi siti in axe solidi rotundi, ad cujus puncta singula tendunt vires aequales centripetae in quacunque distantiarum ratione decrescentes. 395

PROP. XCII. PROBL. XLVI.
Dato corpore attractivo, invenire rationem decrementi virium centripetarum in ejus puncta singula tendentium..... 402

PROP. XCIII. THEOR. XLVII.
Si solidum ex unâ parte planum, ex reliquis autem partibus infinitum, constet ex particulis æqualibus æqualiter attractivis, quarum vires in recessu a solido decrescunt in ratione potestatis cujusvis distantiarum plusquàm quadraticæ, et vi solidi totius corpusculum ad utramvis plani partem constitutum trahatur: dico quod solidi vis illa attractiva, in recessu ab ejus superficie planâ, decrescet in ratione potestatis, cujus latus est distantia corpusculi a plano, et index ternario minor quàm index potestatis distantiarum.. 403

PROP. XCIV. THEOR. XLVIII.
Si media duo similaria, spatio planis parallelis utrinque terminato, distinguantur ab invicem, et corpus in transitu per hoc spatium attrahatur vel impellatur perpendiculariter versus medium alterutrum, neque ullâ aliâ vi agitetur vel impediatur; sit autem attractio, in æqualibus ab utroque plano distantibus ad eandem ipsius partem captis, ubique eadem: dico quod sinus incidentiæ in planum alterutrum erit ad sinum emergentiæ ex plano altero in ratione datâ 412

PROP. XCV. THEOR. XLIX.

Iisdem positis, dico quod velocitas corporis ante incidentiam est ad ejus velocitatem post emergentiam, ut sinus emergentiæ ad sinum incidentiæ..... 414

PROP. XCVI. THEOR. L.

Iisdem positis, et quod motus ante incidentiam velocior sit quàm postea, dico quod corpus inclinando lineam incidentiæ, reflectetur tandem, et angulus reflexionis fiet æqualis angulo incidentiæ..... 415

PROP. XCVII. PROBL. XLVII.

Posito quod sinus incidentiæ in superficiem aliquam sit ad sinum emergentiæ in datâ ratione; quodque incurvatio viæ corporum juxta superficiem illam fiat in spatio brevissimo, quod ut punctum considerare possit: determinare superficiem, quæ corpuscula omnia de loco dato successivè manantia convergere faciat ad alium locum datum.....

PROP. XCVIII. PROBL. XLVIII.

Iisdem positis, et circa axem A B descriptâ superficie quacunque attractivâ C D, regulari vel irregulari, per quam corpora de loco dato A exeuntia transire debent: invenire superficiem secundam attractivam E F quæ corpora illa ad locum datum B convergere faciat..... 422



INDEX PROPOSITIONUM

LIBRI SECUNDI.

Pag.
PROP. I. THEOR. I.
Corporis, cui resistitur in ratione velocitatis, motus ex resistantiâ amissus, est ut spatium movendo confectum..... 437

PROP. II. THEOR. II.
Si corpori resistitur in ratione velocitatis, et idem solâ vi insitâ per medium simile moveatur, sumantur autem tempora æqualia: velocitates in principiis singulorum temporum sunt in progressionem geometricâ, et spatia singulis temporibus descripta sunt ut velocitates..... ibid.

PROP. III. PROBL. I.
Corporis cui, dum in medio simili rectâ ascendit vel descendit, resistitur in ratione velocitatis, quodque ab uniformi gravitate urgetur, definire motum..... 439

PROP. IV. PROBL. II.
Posito quod vis gravitatis in medio aliquo simili uniformis sit, ac tendat perpendiculariter ad planum horizontis; definire motum projectilis in eodem resistantiam velocitatis proportionalem patientis..... 445

PROP. V. THEOR. III.
Si corpori resistitur in velocitatis ratione duplicatâ, et idem solâ vi insitâ per medium simile moveatur; tempora verò sumantur in progressionem geometricâ a minoribus terminis ad majores pergente: dico quod velocitates initio singulorum temporum sunt in eâdem progressionem geometricâ inversè, et quod spatia sunt æqualia, quæ singulis temporibus describuntur..... 461

PROP. VI. THEOR. IV.
Corpora spherica homogenea et æqualia, resistantiis in duplicatâ ratione velocitatum impedita et solis viribus insitis incitata, temporibus quæ sunt reciprocè ut velocitates sub initio, describunt semper æqualia spatia, et amittunt partes velocitatum proportionales totis..... 466

PROP. VII. THEOR. V.
Corpora spherica quibus resistitur in duplicatâ ratione velocitatum, temporibus quæ sunt ut motus primi directè et resistantiæ

Pag.
primæ inversè, amittunt partes motuum proportionales totis, et spatia describunt temporibus istis et velocitatibus primis conjunctim proportionalia..... 466

PROP. VIII. THEOR. VI.
Si corpus in medio uniformi, gravitate uniformiter agente, rectâ ascendat vel descendat, et spatium totum descriptum distinguatur in partes æquales, inque principiis singularum partium (addendo resistantiam medii ad vim gravitatis, quando corpus ascendit, vel subducendo ipsam quando corpus descendit) investigentur vires absolutæ; dico quod vires illæ absolutæ sunt in progressionem geometricâ..... 473

PROP. IX. THEOR. VII.
Positis jam demonstratis, dico quod si tangentibus angularum sectoris circularis et sectoris hyperbolici sumantur velocitates proportionales, existente radio justæ magnitudinis: erit tempus omne ascendendi ad locum summum ut sector circuli, et tempus omne descendendi a loco summo ut sector hyperbolæ..... 476

PROP. X. PROBL. III.
Tendat uniformis vis gravitatis directè ad planum horizontis, sitque resistantia ut medii densitas et quadratum velocitatis conjunctim: requiritur tum medii densitas in locis singulis, quæ faciat ut corpus in datâ quâvis lineâ curvâ moveatur; tum corporis velocitas et medii resistantia in locis singulis..... 487

PROP. XI. THEOR. VIII.
Si corpori resistitur, partim in ratione velocitatis, partim in velocitatis ratione duplicatâ, et idem solâ vi insitâ in medio simili movetur: sumantur autem tempora in progressionem arithmeticâ: quantitates velocitatum reciprocè proportionales, datâ quâdam quantitate auctæ, erunt in progressionem geometricâ..... 518

PROP. XII. THEOR. IX.
Iisdem positis, dico quod si spatia descripta sumantur in progressionem arithmeticâ, velocitates datâ quâdam quantitate auctæ erunt in progressionem geometricâ..... 520

PROP. XIII. THEOR. X.
 Posito quod corpus ab uniformi gravitate deorsum attractum rectè ascendit vel descendit; et quòd eidem resistitur partim in ratione velocitatis, partim in ejusdem ratione duplicatà: dico quod, si circuli et hyperbolæ diametris parallelæ rectæ per conjugatarum diametrorum terminos ducantur, et velocitates sint ut segmenta quædam parallelarum a dato puncto ducta; tempora erunt ut arearum sectores, rectis a centro ad segmentorum terminos ductis abscissi: et contrà..... 521

PROP. XIV. THEOR. XI.
 Iisdem positis, dico quod spatium ascensu vel descensu descriptum, est ut differentia areæ per quam tempus exponitur, et areæ cujusdam alterius quæ augetur vel diminuitur in progressionem arithmeticâ; si vires ex resistantiâ et gravitate compositæ sumantur in progressionem geometricâ..... 526

PROP. XV. THEOR. XII.
 Si mediæ densitas in locis singulis sit reciproce ut distantia locorum a centro immobili, sitque vis centripeta in duplicatâ ratione densitatis: dico quod corpus gyri potest in spirali, quæ radios omnes a centro illo ductos intersecat in angulo dato..... 537

PROP. XVI. THEOR. XIII.
 Si mediæ densitas in locis singulis sit reciproce ut distantia locorum a centro immobili, sitque vis centripeta reciproce ut dignitas quælibet ejusdem distantie: dico quod corpus gyri potest in spirali quæ radios omnes a centro illo ductos intersecat in angulo dato..... 545

PROP. XVII. PROBL. IV.
 Invenire et vim centripetam et mediæ resistantiam, quâ corpus in datâ spirali, datâ velocitatis lege revolvitur potest..... 548

PROP. XVIII. PROBL. V.
 Datâ lege vis centripetæ, invenire mediæ densitatem in locis singulis, quâ corpus datam spiralem describet..... ibid.

PROP. XIX. THEOR. XIV.
 Fluidi homogenei et immoti, quod in vase quocunque immoto clauditur et undique comprimitur, partes omnes (sepositâ condensationis, gravitatis, et virium omnium centripetarum consideratione) æqualiter premuntur undique, et sine omni motu a pressione illâ orto permanent in locis suis 552

PROP. XX. THEOR. XV.
 Si fluidi sphaerici et in æqualibus a centro distantis homogenei, fundo sphaerico concentrico incumbentis, partes singulæ versus centrum totius gravitent; sustinet

fundum pondus cylindri, cujus basis æqualis est superficiæ fundi, et altitudo eadem quæ fluidi incumbentis..... 551

PROP. XXI. THEOR. XVI.
 Sit fluidi cujusdam densitas compressioni proportionalis, et partes ejus a vi centripetâ distantis suis a centro reciproce proportionali deorsum trahantur: dico quod, si distantie illæ sumantur continuè proportionales, densitates fluidi in iisdem distantis erunt etiam continuè proportionales..... 559

PROP. XXII. THEOR. XVII.
 Sit fluidi cujusdam densitas compressioni proportionalis, et partes ejus a gravitate quadratis distantiarum suarum a centro reciproce proportionali deorsum trahantur: dico quod, si distantie sumantur in progressionem musicâ, densitates fluidi in his distantis erunt in progressionem geometricâ..... 562

PROP. XXIII. THEOR. XVIII.
 Si fluidi ex particulis se mutuò fugientibus compositi densitas sit ut compressio, vires centrifugæ particularum sunt reciproce proportionales distantis centrorum suorum. Et vice versâ, particulæ viribus quæ sunt reciproce proportionales distantis centrorum suorum se mutuò fugientes componunt fluidum elasticum, cujus densitas est compressioni proportionalis..... 568

PROP. XXIV. THEOR. XIX.
 Quantitates materiæ in corporibus funependulis, quorum centra oscillationum a centro suspensionis æqualiter distant, sunt in ratione compositâ ex ratione ponderum et ratione duplicatâ temporum oscillationum in vacuo..... 571

PROP. XXV. THEOR. XX.
 Corpora funependula quibus, in medio quovis, resistitur in ratione momentorum temporis, et corpora funependula quæ in ejusdem gravitatis specificæ medio non resistente moventur, oscillationes in cycloide eodem tempore peragunt, et arcuum partes proportionales simul describunt... 574

PROP. XXVI. THEOR. XXI.
 Corporum funependulorum, quibus resistitur in ratione velocitatum, oscillationes in cycloide sunt isochronæ..... 577

PROP. XXVII. THEOR. XXII.
 Si corporibus funependulis resistitur in duplicatâ ratione velocitatum, differentie inter tempora oscillationum in medio resistente, ac tempora oscillationum in ejusdem gravitatis specificæ medio non resistente, erunt arcubus oscillando descriptis proportionales quamproximè..... 578

PROP. XXVIII. THEOR. XXIII. Pag.

Si corpori funependulo in cycloide oscillanti resistitur in ratione momentorum temporis, erit ejus resistentia ad vim gravitatis ut excessus arcus descensu toto descripti supra arcum ascensum subsequente descriptum, ad penduli longitudinem duplicatam. 580

PROP. XXIX. PROBL. VI.

Posito quod corpori in cycloide oscillanti resistitur in duplicatâ ratione velocitatis, invenire resistentiam in locis singulis..... 581

PROP. XXX. THEOR. XXIV.

Si recta A B æqualis sit cycloidis arcui quem corpus oscillando describit, et ad singula ejus puncta D erigantur perpendicularia D K, quæ sint ad longitudinem penduli ut resistentia corporis in arcus punctis correspondentibus ad vim gravitatis: dico quod differentia inter arcum descensu toto descriptum et arcum ascensu toto subsequente descriptum ducta in arcum eorundem semi-summam, æqualis erit arcæ B K a perpendicularibus omnibus D K occupatæ..... 587

PROP. XXXI. THEOR. XXV.

Si corporis oscillantis resistentia in singulis arcuum descriptorum partibus proportionalibus augeatur vel minuatur in datâ ratione; differentia inter arcum descensu descriptum et arcum subsequente ascensu descriptum, augebitur vel diminuetur in eadem ratione..... 592

PROP. XXXII. THEOR. XXVI.

Si corporum systemata duo similia ex æquali particularum numero constant, et particulæ correspondentes similes sint et proportionales, singulæ in uno systemate singulis in altero, et similiter sitæ inter se, ac datam habeant rationem densitatis ad invicem, et inter se temporibus proportionalibus similiter moveri incipiant (eæ inter se quæ sunt in uno sunt systemate et eæ inter se quæ in altero) et si non tangent se mutuò quæ in eodem sunt systemate, nisi in momentis reflexionum, neque attrahant vel fugant se mutuò, nisi viribus acceleratricibus quæ sint ut particularum correspondentium diametri inversè et quadrata velocitatum directè: dico quod systematum particulæ illæ pergent inter se temporibus proportionalibus similiter moveri..... 615

PROP. XXXIII. THEOR. XXVII.

Iisdem positis, dico quod systematum partes majores resistuntur in ratione compositâ ex duplicatâ ratione velocitatum suarum et duplicatâ ratione diametrorum et ratione densitatis partium systematum..... 618

PROP. XXXIV. THEOR. XXVIII. Pag.

Si globus et cylindrus æqualibus diametris descripti, in medio raro ex particulis æqualibus et ad æquales ab invicem distantias liberè dispositis constante, secundum plagam axis cylindri, æquali cum velocitate moveantur: erit resistentia globi duplò minor quàm resistentia cylindri. 621

PROP. XXXV. PROBL. VII.

Si medium rarum ex particulis quàmminimis quiescentibus æqualibus et ad æquales ab invicem distantias liberè dispositis constet: invenire resistentiam globi in hoc medio uniformiter progredientis..... 632

PROP. XXXVI. PROBL. VIII.

Aquæ de vase cylindrico per foramen in fundo factum effluentis, definire motum. 635

PROP. XXXVII. THEOR. XXIX.

Cylindri, qui in fluido compresso infinito et non elastico secundum longitudinem suam uniformiter progreditur, resistentia, quæ oritur a magnitudine sectionis transversæ, est ad vim quâ totus ejus motus, interea dum quadruplum longitudinis suæ describit, vel tolli possit vel generari, ut densitas medii ad densitatem cylindri quamproximè..... 651

PROP. XXXVIII. THEOR. XXX.

Globi in fluido compresso infinito et non elastico uniformiter progredientis, resistentia est ad vim quâ totus ejus motus, quo tempore octo tertias partes diametri suæ describit, vel tolli possit vel generari, ut densitas fluidi ad densitatem globi quamproximè..... 659

PROP. XXXIX. THEOR. XXXI.

Globi, per fluidum in canali cylindrico clausum et compressum uniformiter progredientis, resistentia est ad vim quâ totus ejus motus, interea dum octo tertias partes diametri suæ describit, vel generari possit vel tolli, in ratione quæ componitur ex ratione orificii canalís ad excessum hujus orificii supra dimidium circuli maximi globi et ratione duplicatâ orificii canalís ad excessum hujus orificii supra circumulum maximum globi, et ratione densitatis fluidi ad densitatem globi quamproximè..... 662

PROP. XL. PROBL. IX.

Globi, in medio fluidissimo compresso progredientis, invenire resistentiam per phænomena..... ibid.

PROP. XLI. THEOR. XXXII.

Pressio non propagatur per fluidum secundum lineas rectas, nisi ubi particulæ fluidi in directum jacent..... 680

PROP. XLII. THEOR. XXXIII.	Pag.		
Motus omnis per fluidum propagatus divergit a recto tramite in spatia immota.....	681		
PROP. XLIII. THEOR. XXXIV.			
Corpus omne tremulum in medio elastico propagabit motum pulsuum undique in directum; in medio verò non elastico motum circularem excitabit.....	689		
PROP. XLIV. THEOR. XXXV.			
Si aqua in canalis cruribus erectis K L, M N vicibus alternis ascendat et descendat, construatur autem pendulum cujus longitudo inter punctum suspensionis et centrum oscillationis æquetur semissi longitudinis aquæ in canali: dico quod aqua ascendet et descendet iisdem temporibus quibus pendulum oscillatur.....	690		
PROP. XLV. THEOR. XXXVI.			
Undarum velocitas est in subduplicatâ ratione latitudinum.....	692		
PROP. XLVI. PROBL. X.			
Invenire velocitatem undarum.....	ibid.		
PROP. XLVII. THEOR. XXXVII.			
Pulsibus per fluidum propagatis, singulæ fluidi particulæ, motu reciproco brevissimo euntes et redeuntes, accelerantur semper et retardantur pro lege oscillantis penduli.....	694		
PROP. XLVIII. THEOR. XXXVIII.			
Pulsuum in fluido elastico propagatorum velocitates sunt in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione vis elasticæ directè et			
			Pag.
		subduplicatâ ratione densitatis inversè; si modo fluidi vis elastica ejusdem condensationi proportionalis esse supponatur....	711
PROP. XLIX. PROBL. XI.			
Datis medii densitate et vi elasticâ, invenire velocitatem pulsuum.....	713		
PROP. L. PROBL. XII.			
Invenire pulsuum distantias.....	716		
PROP. LI. THEOR. XXXIX.			
Si cylindrus solidus infinitè longus in fluido uniformi et infinito circa axem positione datum uniformi cum motu revolvatur, et ab hujus impulsu solo agatur fluidum in orbem, perseveret autem fluidi pars unaquæque uniformiter in motu suo; dico quod tempora periodica partium fluidi sunt ut ipsarum distantiarum ab axe cylindri.....	722		
PROP. LII. THEOR. XL.			
Si sphaera solida, in fluido uniformi et infinito, circa axem positione datum uniformi cum motu revolvatur, et ab hujus impulsu solo agatur fluidum in orbem, perseveret autem fluidi pars unaquæque uniformiter in motu suo: dico quod tempora periodica partium fluidi erunt ut quadrata distantiarum a centro sphaeræ...	726		
PROP. LIII. THEOR. XLI.			
Corpora, quæ in vortice delata in orbem redeunt, ejusdem sunt densitatis cum vortice, et eadem lege cum ipsius partibus quoad velocitatem et cursus determinationem moventur.....	737		

FINIS TOMI PRIMI.

GLASGUE:

EXCUDIT GEORGIUS BROOKMAN.





200-31

[illegible]

DOES NOT CIRCULATE
BOSTON COLLEGE
PHYSICS DEPT.

DOES NOT CIRCULATE

BOSTON COLLEGE



3 9031 01528483 9

DOES NOT CIRCULATE

67863

DOES NOT CIRCULATE

BOSTON COLLEGE LIBRARY

BOSTON COLLEGE LIBRARY

UNIVERSITY HEIGHTS

CHESTNUT HILL, MASS.

Books may be kept for two weeks and may be renewed for the same period, unless reserved.

Two cents a day is charged for each book kept overtime.

If you cannot find what you want, ask the Librarian who will be glad to help you.

The borrower is responsible for books drawn on his card and for all fines accruing on the same.



